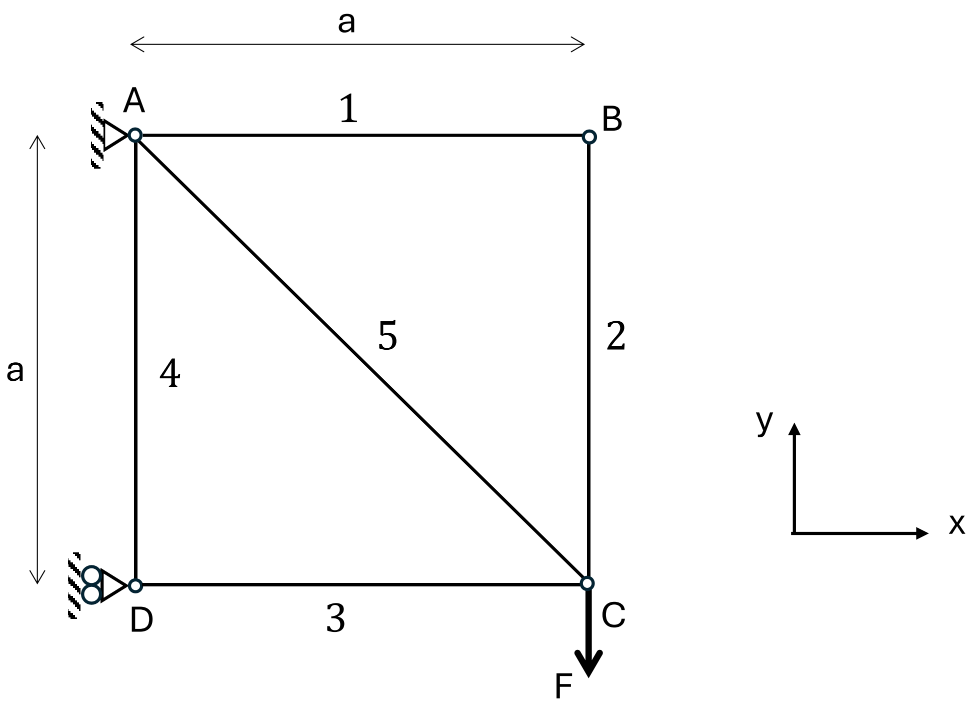
Résistance des Matériaux

Treillis isostatique, théorèmes énergétiques

Exercice : treillis

Soit le système articulé ci-dessous constitué de 5 barres. La structure est articulée en A et simplement appuyée en D. Une force F est appliquée au point C.



1/ Déterminer le degré d'hyperstaticité interne, externe et global de la structure

2/ Calculer les efforts dans les barres

3/ Calculer le déplacement vertical du point C à l'aide du théorème de Castigliano.

Données

- $F = 10\ kN$
- $a = 3m$
- Module $E = 74\ 000\ MPa$ (Alliage d'aluminium)
- Section $A = 1178\ mm^2$

Corrections

1/

$$d_e = 2 + 1 - 3 = 0$$

$$d_i = l_i - (3b - 3) = 4 + 2 + 4 + 2 - (3 * 5 - 3) = 0$$

$$d_g = d_e + d_i = 0$$

Système isostatique.

2/ Par convention, les efforts dans les barres sont orientés vers les nœuds pour l'écriture de l'équilibre.

Equilibre du nœud B

- Suivant l'axe x : $N_1 = 0$
- Suivant l'axe y : $N_2 = 0$

Equilibre du nœud C

$$N_3 + N_5 . \cos 45° = 0$$

$$-F - N_5 . \sin 45° = 0$$

Donc

$$\begin{cases} N_5 = -F . \dfrac{2}{\sqrt{2}} \\ N_3 = F \end{cases}$$

On a bien de la traction dans la barre 5 et de la compression dans la barre 3, compte-tenu de la convention de signe adoptée.

Equilibre du nœud D

- Suivant l'axe x

$$X_D - N_3 = 0 \Longrightarrow N_3 = X_D = F$$

(On détermine aisément X_D en écrivant l'équilibre global de la structure)

- Suivant l'axe y

$$N_4 = 0$$

3/ Théorème de Castigliano : $u_c = \sum \frac{1}{EA} . N_i . \frac{\partial N_i}{\partial F} . L_i$

Les barres ont toutes le même module E et section A donc $u_c = \frac{1}{EA} \sum N_i . \frac{\partial N_i}{\partial F} . L_i$

Barre	N	$\frac{\partial N_i}{\partial F}$	L
1	0		
2	0		
3	F	1	a
4	0		
5	$-F . \frac{2}{\sqrt{2}}$	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	$a . \sqrt{2}$

$$u_c = \frac{F . a}{EA} . \left(1 + 2\sqrt{2}\right) \approx 1{,}32\ mm$$