Résistance des Matériaux

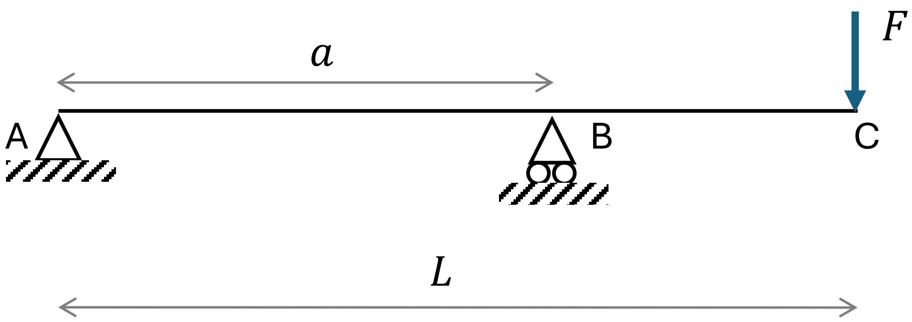
Méthodes énergétiques

Exercice : poutre en porte-à-faux

Soit la poutre en porte-à-faux ci-dessous.

1/ Calculer le déplacement vertical de C à l'aide du théorème de Castigliano.

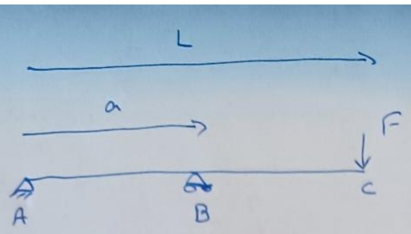
2/ Retrouver le résultat obtenu avec le théorème de la charge unitaire



Données

- $F = 10\ kN$
- $a = 2m$
- $L = 3m$
- $E = 210\ 000\ MPa$
- $I = 4219\ cm^4$

Correction



$$u_c = \frac{\partial W}{\partial F}$$

Castigliano

$$W = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}\, dx$$

$$\frac{\partial W}{\partial F} = \int \frac{M}{EI}\cdot\frac{\partial M}{\partial F}\cdot dx$$

PFS

$$X_A = 0$$

$$Y_A + Y_B - F = 0$$

$$Y_B \cdot a - F\cdot L = 0 \qquad Y_B = \frac{F\cdot L}{a}$$

$$Y_A = F - Y_B = F - \frac{F.L}{a} = F\left(1-\frac{L}{a}\right)$$

$x \in [0 ; a]$

$$M = -F\cdot(L-x) + Y_B(a-x)$$

$$= -F\cdot(L-x) + \frac{F\cdot L}{a}(a-x)$$

$$= -FL + Fx + FL - F.\frac{L.x}{a} = F\left(1-\frac{L}{a}\right)x$$

$x \in [a ; L]$

$$M = -F.(L-x)$$

$$u_c = \frac{1}{EI}\left(\int_0^a F\left(1-\frac{L}{a}\right)^2 x^2\, dx + \int_a^L -F(L-x)^2\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\left[F\left(1-\frac{L}{a}\right)^2\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^a + \left[+F.\frac{(L-x)^3}{3}\right]_a^L\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(F.\left(1-\frac{L}{a}\right)^2\cdot\frac{a^3}{3} + F\frac{(L-a)^3}{3}\right)$$

$$u_c = 1{,}13.10^{-3} m$$

La valeur obtenue est positive donc le déplacement se fait dans le sens de F donc vers le bas

2/ théorème de la charge unitaire

$$u_c = \int_0^L \frac{1}{EI} M_o M_1 dx$$

M_o moment fléchissant dans la poutre sous l'action de F

M_1 moment fléchissant dans la poutre sous l'action d'une force de 1N exercée en C, verticalement

$0 \leq x \leq a$

$$M_1 = \left(1 - \frac{L}{a}\right) x$$

$a \leq x \leq L$

$$M_1 = -(L - x)$$

Donc

$$u_c = \int_0^L \frac{1}{EI} F \left(1 - \frac{L}{a}\right)^2 x^2 dx + \int_0^L \frac{1}{EI} - F(L - x)^2 dx$$

On retrouve la même expression qu'avec Castigliano