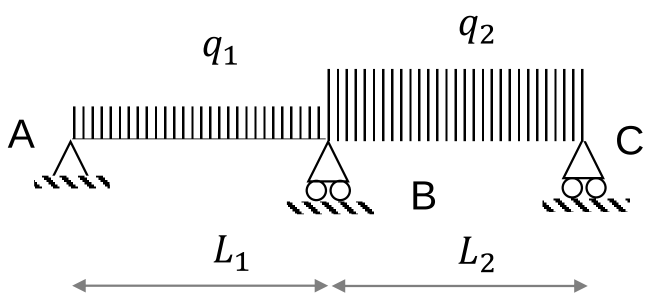
Exercices corrigés de Résistance des Matériaux

Poutres continues

1. Poutre continue à deux travées, moment sur appui

Soit une poutre à 2 travées de longueur L_1 et L_2, soumises aux charges linéiques q_1 et q_2



On suppose que le module E et le moment quadratique I sont constants le long de la poutre.

Montrer que le moment fléchissant en B a pour expression

$$M_B = -\frac{q_1 L_1^3 + q_2 L_2^3}{8(L_1 + L_2)}$$

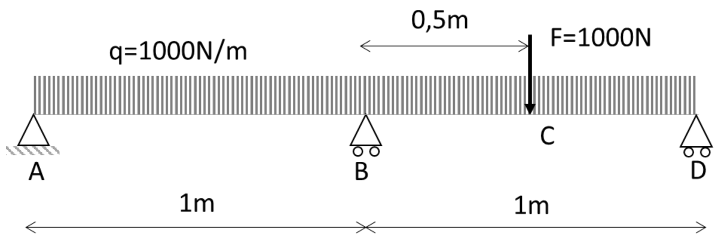
Voir la correction

2. Poutre continue par superposition

Soit la poutre continue ci-dessous, axe x, longueur L=2m, module E, moment quadratique I, soumise à une charge linéique q sur toute sa longueur, et à une force F en C.

La poutre est hyperstatique de degré 1.

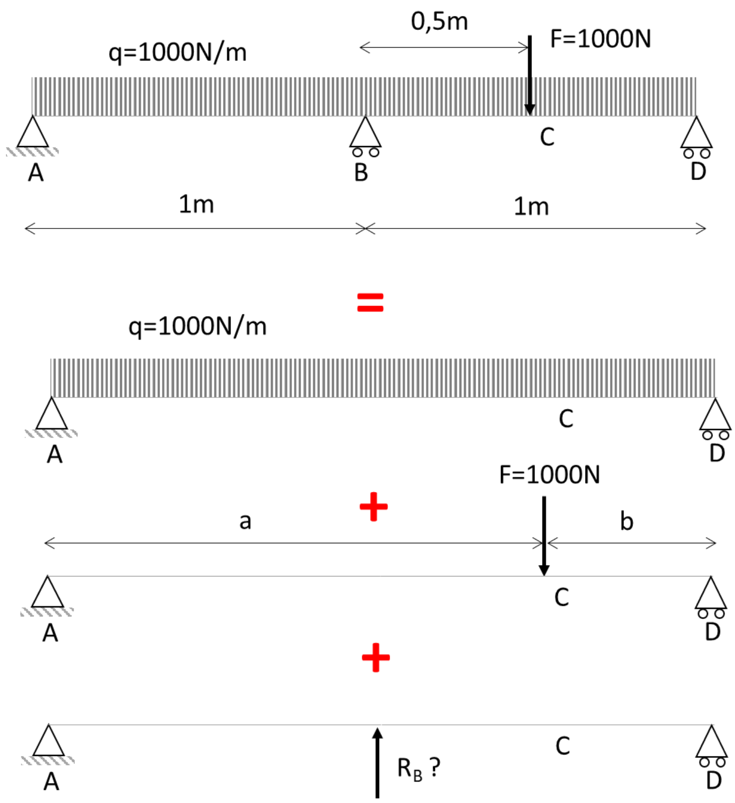
L'axe vertical ascendant est l'axe y.



On propose de résoudre cette poutre continue (estimation des appuis en A, B et D) par l'utilisation du théorème de superposition.

Soit la même poutre de longueur 2m uniquement portée par les appuis A et D.

Par superposition on a :



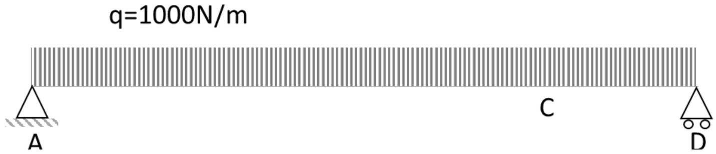
La partie 1 étudie les flèches des cas isostatiques.

Les résultats de la partie 1 peuvent être directement utilisés pour la partie 2.

Partie 1 : calcul des flèches pour les cas isostatiques

1/ Dans le cas de la charge linéique seule, pour la poutre sans l'appui en B, montrer que la flèche en x=L/2 a pour expression :

$$y_1 = -\frac{5}{384} \cdot \frac{qL^4}{EI}$$

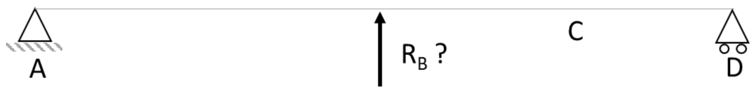


2/ Dans le cas de la force F seule appliquée en C, pour la poutre sans l'appui en B, montrer que la flèche en x=L/2 a pour expression :

$$y_2 = -\frac{F\,b}{6EIL} \cdot \left[a.(L+b) - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right]$$

3/ Dans le cas de la réaction R_B seule appliquée au centre de la poutre, montrer que la flèche en x=L/2 a pour expression :

$$y_3 = \frac{R_B L^3}{48EI}$$



Partie 2 : calcul de la réaction R_B à l'appui B de la poutre continue

1/ Pour la poutre continue, que vaut la flèche au point B ?

2/ En déduire une relation simple entre y_1, y_2 et y_3.

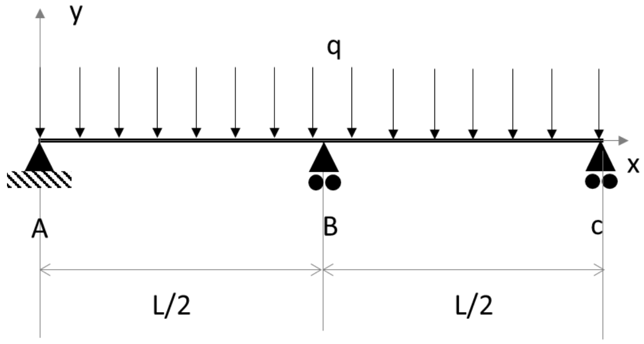
3/ En déduire la valeur de la réaction R_B.

Voir la correction

3. Poutre continue sur trois appuis

Soit la poutre de longueur L=4m ci-dessous, reposant sur trois appuis en A, B et C.

La poutre est soumise à une charge linéique q = -1000 N/m suivant y.



Partie 1 : superposition

Par superposition, en considérant que la flèche y_B est nulle, calculer R_{YB}, réaction d'appui en B suivant y.

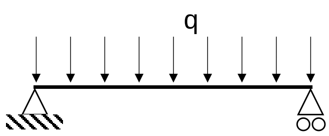
Partie 2 : théorème des 3 moments

Par le théorème des 3 moments, retrouver la valeur de R_{YB} calculée en partie 1.

Formulaire

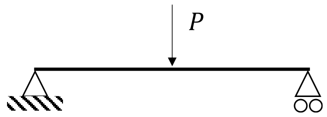
Poutre sur deux appuis, longueur L, effort linéique q : flèche maximale

$$y_{max} = -\frac{5qL^4}{384EI}$$



Poutre sur deux appuis, longueur L, effort ponctuel p au centre

$$y_{max} = -\frac{PL^3}{48EI}$$



Théorème des 3 moments

$$M_{i-1}.\frac{L_i}{6EI_i} + 2M_i\left(\frac{L_i}{6EI_i} + \frac{L_{i+1}}{6EI_{i+1}}\right) + M_{i+1}\frac{L_{i+1}}{6EI_{i+1}} = \Omega^0_{i,d} - \Omega^0_{i,g}$$

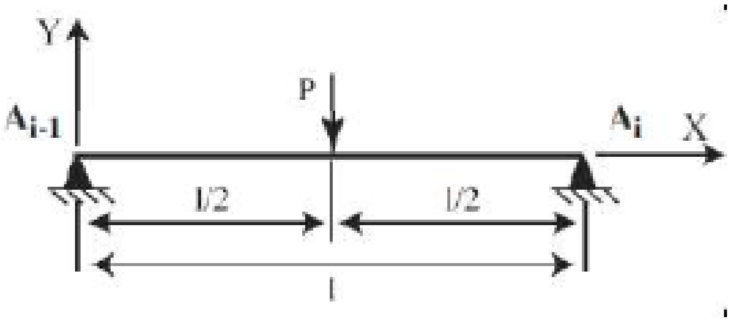
Effort tranchant

$$V(x) = V_0(x) + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_i}$$

Voir la correction

4. Rotation à un appui

Soit une poutre de longueur L, posée sur deux appuis A_{i-1} et A_i.



Montrer que, $\omega(0)$ rotation de la poutre au niveau de l'appui A_{i-1}, a pour expression :

$$\omega(L) = -\frac{P.L^2}{16EI}$$

Voir la correction

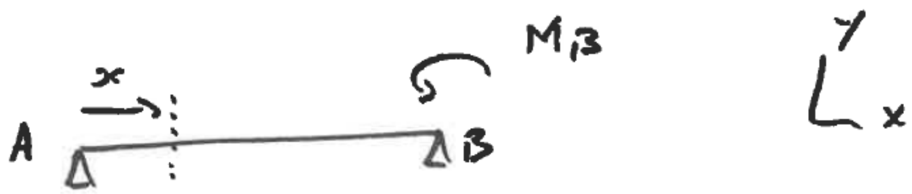
5. Rotation à un appui

Soit la poutre isostatique ci-dessous sur deux appuis en A et B, soumise à un moment M_B en B.

Calculer les rotations ω_A et ω_B en A et B.

On pourra écrire le PFS pour déterminer les appuis en A et B, en déduire le moment fléchissant dans une section d'abscisse et enfin la relation entre le moment fléchissant et la déformée y(x).

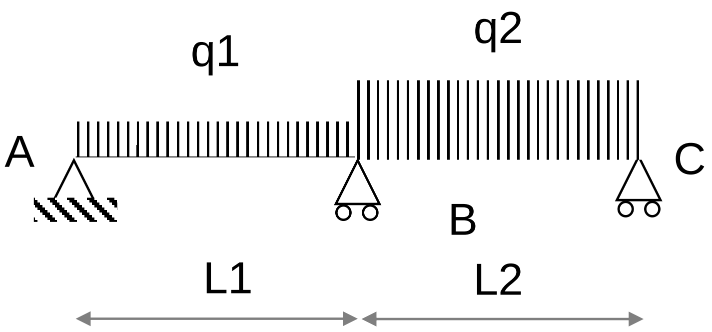
On sait que la rotation dans la section d'abscisse x est la dérivée de y(x) par-rapport à x.



Voir la correction

Corrections

1. Théorème des 3 moments



$$M_A.L_1 + 2M_B.(L_1 + L_2) + M_c.L_2 = 6EI.\left(\Omega^0_{i,d} - \Omega^0_{i,g}\right)$$

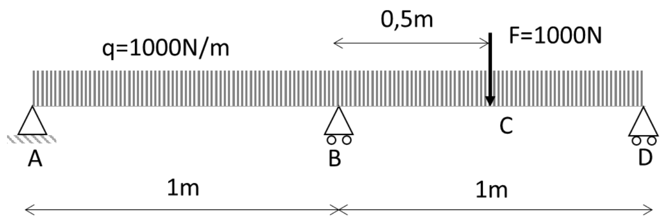
$$\begin{cases} M_A = 0 \\ M_C = 0 \end{cases}$$

$$\Omega^0_{i,d} = -q_2.\frac{L_2^3}{24EI}$$

$$\Omega^0_{i,g} = q_1.\frac{L_1^3}{24EI}$$

$$\boxed{M_B = -\frac{q_1 L_1^3 + q_2 L_2^3}{8(L_1 + L_2)}}$$

2. Poutre continue par superposition



Partie 1

1/ Calcul direct de déformée à partir de $M = EIy''$

2/ Calcul direct de déformée à partir de $M = EIy''$

3/ Calcul direct de déformée à partir de $M = EIy''$

Partie 2

1/ Pour la poutre continue, $y_B = 0$

2/ On a donc par superposition

$$\boxed{y_1 + y_2 + y_3 = 0}$$

3/ On en déduit :

$$R_B = -\frac{48EI}{L^3}.(y_1 + y_2) = \frac{48EI}{L^3}.\left[\frac{F\,b}{6EIL}.\left[a.(L+b) - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right] + \frac{5}{384}.\frac{FL^3}{EI}\right]$$

La connaissance de E et I n'est pas nécessaire puisque le facteur EI disparait de l'expression de R_B

Application numérique :

$$\boxed{R_B = 1937\ N}$$

On peut alors en déduire les réactions aux appuis en A et D.

3. Poutre continue sur trois appuis

Partie 1 : superposition

Le cas étudié est par superposition la somme de deux cas : Poutre sur deux appuis avec effort linéique q + Poutre sur deux appuis avec effort ponctuel R_{YB} au centre

La flèche en B est nulle donc la somme des flèches dues à chaque cas est nulle :

$$-\frac{5qL^4}{384EI} + \frac{R_{YB}.L^3}{48EI} = 0$$

$$\boxed{R_{YB} = 48 \times \frac{5qL}{384} = 0.625qL = 2500\ N}$$

Partie 2 : théorème des 3 moments

$$M_A.\frac{\frac{L}{2}}{6EI} + 2M_B\left(\frac{\frac{L}{2}}{6EI} + \frac{\frac{L}{2}}{6EI}\right) + M_C\frac{\frac{L}{2}}{6EI} = -\frac{q.\left(\frac{L}{2}\right)^3}{24} - -\frac{q.\left(\frac{L}{2}\right)^3}{24}$$

Moment sur appuis : $M_A = 0$ et $M_C = 0$

On a finalement

$$M_B = -\frac{qL^2}{32}$$

Effort tranchant :

Travée 1

$$V(x) = \frac{qL}{4} - q.\frac{L-x}{2} + \frac{qL^2}{32}.\frac{2}{L}$$

Donc l'effort tranchant à gauche de l'appui en B a pour valeur

$$V\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5qL}{16} = 1250N$$

Travée 2

$$V(x) = \frac{qL}{4} - q.\frac{L-x}{2} + \frac{qL^2}{32}.\frac{2}{L}$$

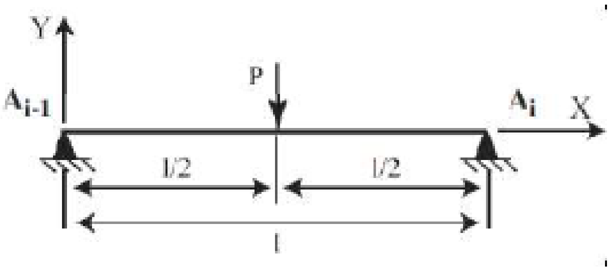
Donc l'effort tranchant à droite de l'appui en B a pour valeur

$$V(0) = \frac{qL}{4} + \frac{qL}{16} - \frac{qL^2}{32}.\frac{2}{L} = -\frac{5qL}{16} = -1250N$$

Par conséquent, on a

$$R_{YB} = 1250 - (-1250) = 2500\ N$$

4. Rotation à un appui



Soient X_{A_i} et Y_{A_i} les réactions en X et Y au niveau de l'appui A_i et $X_{A_{i-1}}$ et $Y_{A_{i-1}}$ réaction en X et Y au niveau de l'appui A_{i-1}.

Par symétrie,

$$X_{A_i} = X_{A_{i-1}} = 0$$

$$Y_{A_i} = X_{A_{i-1}} = \frac{P}{2}$$

Le moment fléchissant dans une section d'abscisse x a pour expression :

$$M_f(\mathrm{x}) = EI.y''(x)$$

Dans la partie [0 ;L/2]

$$M_f = -P.\left(\frac{L}{2} - x\right) + \frac{P}{2}.(L-x) = -\frac{PL}{2} + Px + \frac{PL}{2} - \frac{Px}{2} = \frac{Px}{2}$$

Donc

$$y'' = \frac{Px}{2EI}$$

Donc

$$y' = \frac{P}{2EI}.\frac{x^2}{2} + A$$

La rotation est la dérivée de la flèche y donc

$$y' = \omega$$

Conditions aux limites : ω(L/2)=0 donc

$$\omega\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{P}{2EI}.\frac{1}{2}.\frac{L^2}{4} + A = 0$$

Donc

$$\omega = \frac{P}{2EI}.\frac{x^2}{2} - \frac{P.L^2}{16EI}$$

Donc en x=0,

$$\omega(0) = -\frac{P.L^2}{16EI}$$

NB : pour la flèche en x=L, il faut changer l'expression du moment fléchissant :

$$Mf = \frac{P}{2}.(L - x)$$

On obtient

$$\omega(L) = \frac{P}{2EI}.\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) - 3.\frac{P.L^2}{16EI}$$

$$\boxed{\omega(L) = \frac{P.L^2}{16EI}}$$

5. Rotation à un appui

ΣM en A :

$$M_B + Y_B.L = 0$$

Donc

$$Y_B = -\frac{M_B}{L}$$

ΣF en y :

$$Y_A + Y_B = 0$$

Donc

$$Y_A = \frac{M_B}{L}$$

Moment fléchissant :

$$M_f(x) = M_B + Y_B.(L - x) = M_B - \frac{M_B}{L}.(L - x) = M_B.\frac{x}{L}$$

Donc

$$y'' = \frac{1}{EI}.M_B.\frac{x}{L}$$

Par intégration,

$$y' = \frac{1}{EI}.\frac{M_B}{L}.\frac{x^2}{2} + K_1$$

Condition aux limites :

$$K_1 = \omega_A$$

Par intégration,

$$y = \frac{1}{EI}.\frac{M_B}{L}.\frac{x^3}{6} + \omega_A.x + K_2$$

Condition aux limites : $y(0) = 0$ donc $K_2 = 0$. $y(L) = 0$ donc

$$\omega_A = -\frac{M_B.L}{6EI}$$

De plus,

$$y'(L) = \omega_B = \frac{1}{EI}\frac{M_B}{L}.\frac{L^2}{2} - \frac{1}{EI}.\frac{M_B.L}{6}$$

$$\omega_B = \frac{M_B.L}{3EI}$$