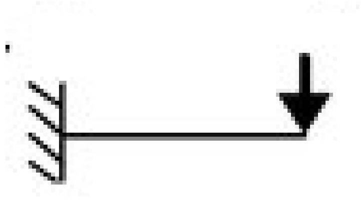
Exercices corrigés de Résistance des Matériaux

Loi de comportement d'une poutre en flexion

1.1 Flèche d'une poutre console sollicitée en flexion

Soit une poutre longueur L section constante S sur toute sa longueur, encastrée à une extrémité et soumise à un effort P à l'autre extrémité.

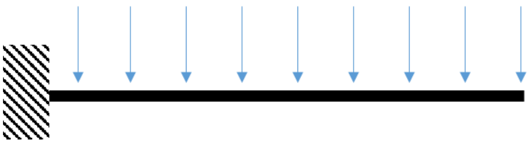


Dans une section d'abscisse x (axe de la poutre), la relation entre le moment fléchissant Mf(x) et la dérivée seconde de la flèche y''(x) est donnée par

$$M_f(x) = EI.y''(x)$$

Q1/ En déduire la flèche en bout de poutre induite par l'effort P.

Q2/ Reprendre l'exercice pour la flèche d'une poutre soumise à un effort réparti q en N/m tout le long de la poutre

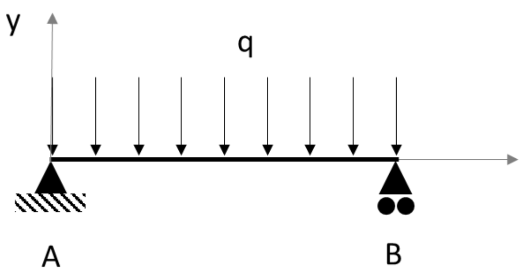


Voir la correction

1.2 Flèche d'une poutre isostatique en flexion

Soit une poutre de longueur L, axe x, module d'Young E, moment quadratique I, soumise à une charge linéique q orientée suivant -y.

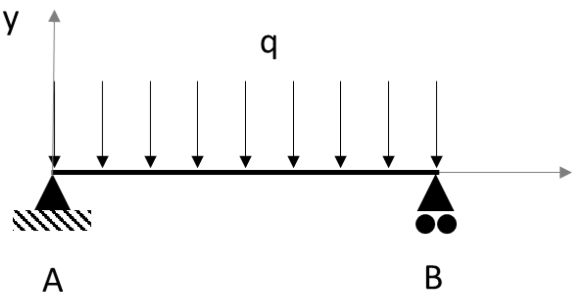
Déterminer l'équation de la déformée y(x) le long de la poutre.



Voir la correction

1.3 Flèche d'une poutre isostatique en flexion

Soit une poutre de longueur L, axe x, module d'Young E, moment quadratique I, soumise à une charge linéique q orientée suivant -y.



1/ Déterminer l'équation de la déformée y(x) le long de la poutre.

2/ La poutre est en acier. La section est pleine et carrée. Déterminer le côté a de la section pour que la flèche ne dépasse pas 1/500ème de la longueur L.

3/ On souhaite utiliser une poutre rectangulaire de largeur b en z, hauteur h en y. Tracer h et y en fonction de la masse de la poutre, dans le respect du critère sur la flèche. Quelles valeurs pour b et h peut-on proposer pour diviser la masse de la poutre dimensionnée en question 1 ?

4/ Quelle modification supplémentaire de la conception pourrions-nous opérer pour encore diminuer la masse de la structure ?

Données :

- Module d'Young E=210 000 MPa
- Masse volumique acier 7800 kg/m^3
- Longueur L=5m
- $q = 2\ kN/m$

Voir la correction

Corrections

1.4 Flèche d'une poutre console sollicitée en flexion

$$Mf(x) = EI.y''(x)$$

Moment fléchissant dans une section x

$$Mf(x) = -P.(L-x)$$

$$y'' = \frac{Mf}{EI} = \frac{-P}{EI}.(L-x)$$

$$y' = \frac{-P}{EI}.\left(L.x - \frac{x^2}{2}\right) + A$$

$$y(x) = \frac{-P}{EI}.\left(L.\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3}\right) + Ax + B$$

Conditions aux limites : encastrement en x=0

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Donc

$$A = 0$$

$$B = 0$$

Donc

$$y(x) = \frac{-P}{EI}.\left(L.\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3}\right)$$

En x=L,

$$y(L) = \frac{-P}{EI}.\left(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{6}\right)$$

$$y(L) = \frac{-PL^3}{3EI}$$

Q2/ Dans la section X, on sait que le moment revient à un effort de valeur q.(L-x), appliquée entre X et L donc à l'abscisse (X+L)/2 donc

$$Mf(X) = -q.(L-X).\frac{L-X}{2} = -\frac{q}{2}.(L^2 - 2XL + X^2)$$

$$y'' = \frac{Mf}{EI} = \frac{-q}{2EI}.(L^2 - 2XL + X^2)$$

$$y' = \frac{-q}{2EI}.\left(L^2.X - LX^2 + \frac{X^3}{3}\right) + A$$

$$y = \frac{-q}{2EI}.\left(L^2.\frac{X^2}{2} - L\frac{X^3}{3} + \frac{1}{3}.\frac{X^4}{4}\right) + AX + B$$

Conditions aux limites : encastrement en X=0

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Donc A=0 et B=0

$$y = \frac{-q}{2EI}.\left(L^2.\frac{X^2}{2} - L\frac{X^3}{3} + \frac{1}{3}.\frac{X^4}{4}\right)$$

En X=L

$$y = \frac{-q}{2EI}.\left(L^2.\frac{L^2}{2} - L\frac{L^3}{3} + \frac{1}{3}.\frac{L^4}{4}\right)$$

$$y = \frac{-q.L^4}{2EI}.\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) = \frac{-q.L^4}{2EI}.\left(\frac{6-4+1}{12}\right) = \frac{-q.L^4}{2EI}.\frac{3}{12}$$

$$\boxed{y(L) = \frac{-q.L^4}{8EI}}$$

1.5 Flèche d'une poutre isostatique en flexion

Principe fondamental de la statique

$$R_{yB} = R_{yA} = q.\frac{L}{2}$$

$$Mf = EIy''$$

$$Mf = \frac{qL}{2}.(L-x) - q.(L-x).\frac{L-x}{2}$$

Donc

$$y'' = \frac{Mf}{EI} = \frac{1}{EI}.\frac{q}{2}(L.(L-x) - (L-x)^2) = \frac{1}{EI}.\frac{q}{2}\left(L^2 - xL - (L^2 - 2xL + x^2)\right) = \frac{1}{EI}.\frac{q}{2}(xL - x^2)$$

Donc

$$y' = \frac{q}{2EI}.\left(L.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + A$$

$$y = \frac{q}{2EI}.\left(L.\frac{x^3}{6} - \frac{1}{12}.x^4\right) + Ax + B$$

$y(0) = 0$ donc B=0. De plus $y(L) = 0$ donc

$$y = \frac{q}{2EI}.\left(\frac{L^4}{6} - \frac{1}{12}L^4\right) + AL = 0$$

Donc

$$A = -\frac{q.L^3}{2EI}.\frac{1}{12}$$

Donc

$$y = \frac{q}{2EI}.\left(L.\frac{x^3}{6} - \frac{1}{12}.x^4\right) - \frac{q.L^3}{2EI}.\frac{1}{12}x$$

Pour x=L/2

$$y = \frac{q}{2EI}\left(\frac{L^4}{6*8} - \frac{1}{12}.\frac{L^4}{16}\right) - \frac{q.L^3}{2EI}.\frac{1}{12}.\frac{L}{2}$$

$$y = \frac{q}{2EI}.L^4.\left(\frac{1}{48} - \frac{1}{12}.\frac{1}{16} - \frac{1}{24}\right) = \frac{q}{EI}.L^4.\frac{1}{2}.\left(\frac{8}{384} - \frac{2}{384} - \frac{16}{384}\right) = \frac{q}{EI}.L^4.\frac{-5}{384}$$

$$\boxed{y = \frac{-5}{384}\frac{q.L^4}{EI}}$$

1.6 Flèche d'une poutre en flexion

1/ Principe fondamental de la statique

$$R_{yB} = R_{yA} = q.\frac{L}{2}$$

$$Mf = EIy''$$

$$Mf = \frac{qL}{2}.(L-x) - q.(L-x).\frac{L-x}{2}$$

Donc

$$y'' = \frac{Mf}{EI} = \frac{1}{EI}.\frac{q}{2}(L.(L-x) - (L-x)^2) = \frac{1}{EI}.\frac{q}{2}\left(L^2 - xL - (L^2 - 2xL + x^2)\right) = \frac{1}{EI}.\frac{q}{2}(xL - x^2)$$

$$y' = \frac{q}{2EI}.\left(L.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + A$$

$$y = \frac{q}{2EI}.\left(L.\frac{x^3}{6} - \frac{1}{12}.x^4\right) + Ax + B$$

$y(0) = 0$ donc B=0. De plus $y(L) = 0$ donc

$$y = \frac{q}{2EI}.\left(\frac{L^4}{6} - \frac{1}{12}L^4\right) + AL = 0 \Longrightarrow A = -\frac{q.L^3}{2EI}.\frac{1}{12}$$

Donc

$$y = \frac{q}{2EI}.\left(L.\frac{x^3}{6} - \frac{1}{12}.x^4\right) - \frac{q.L^3}{2EI}.\frac{1}{12}x$$

Pour x=L/2

$$y = \frac{q}{2EI}\left(\frac{L^4}{6*8} - \frac{1}{12}.\frac{L^4}{16}\right) - \frac{q.L^3}{2EI}.\frac{1}{12}.\frac{L}{2}$$

$$y = \frac{q}{2EI}.L^4.\left(\frac{1}{48} - \frac{1}{12}.\frac{1}{16} - \frac{1}{24}\right) = \frac{q}{EI}.L^4.\frac{1}{2}.\left(\frac{8}{384} - \frac{2}{384} - \frac{16}{384}\right) = \frac{q}{EI}.L^4.\frac{-5}{384}$$

$$\boxed{y_{max} = \frac{-5}{384}\frac{q.L^4}{EI}}$$

2/ Si l'on veut $|y_{max}| = \frac{L}{500}$ alors

$$\frac{5q.L^4}{384E.\frac{a^4}{12}} = \frac{L}{500}$$

$$\frac{5q.L^3}{32E.a^4} = \frac{1}{500}$$

$$32E.a^4 = 2500qL^3$$

$$a = \sqrt[4]{\frac{2500qL^3}{32E}}$$

$$\boxed{a = 9{,}82cm}$$

Masse

$$\boxed{m = \rho a^2 L}$$

3/ Soit une section de largeur b suivant z, hauteur h.

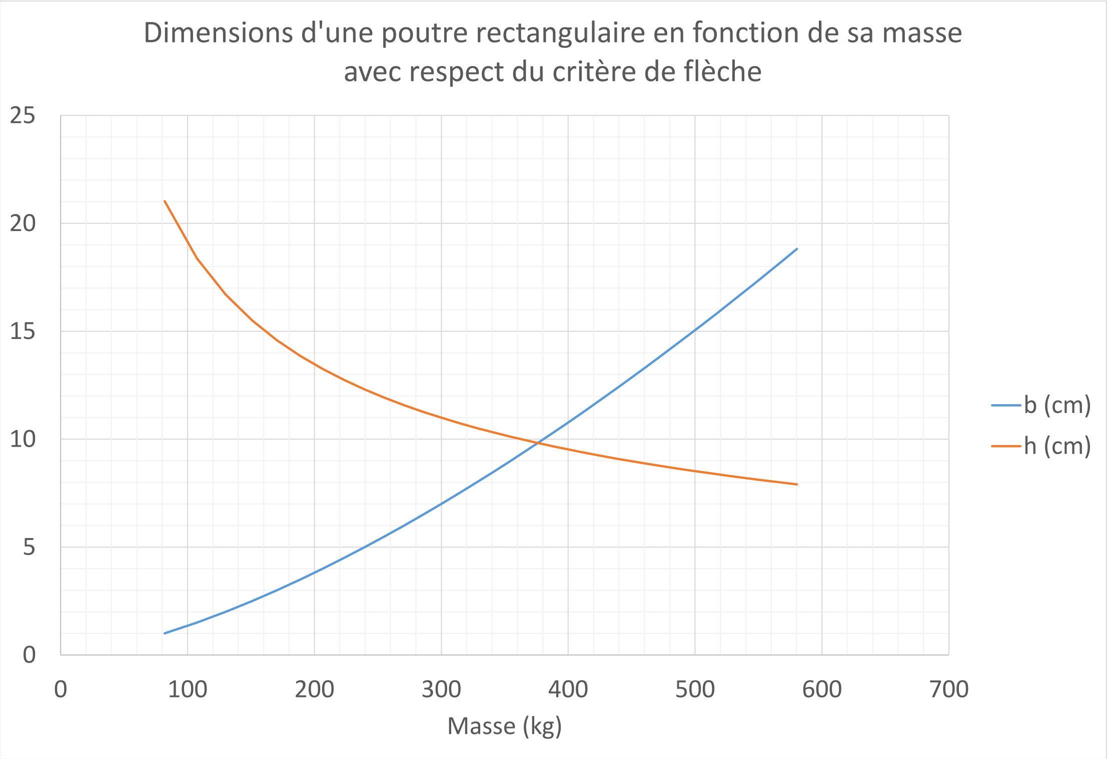
$$I_{Gz} = b.\frac{h^3}{12}$$

On veut le même moment quadratique pour respecter le critère de la flèche

$$b.\frac{h^3}{12} = \frac{a^4}{12} \Longrightarrow h = \sqrt[3]{\frac{a^4}{b}}$$

$$m = \rho bhL = \rho b.\sqrt[3]{\frac{a^4}{b}}.L$$

On a tracé ci-dessous b en fonction de la masse m.



4/ Poutre creuse