

Exercices corrigés de Résistance des Matériaux

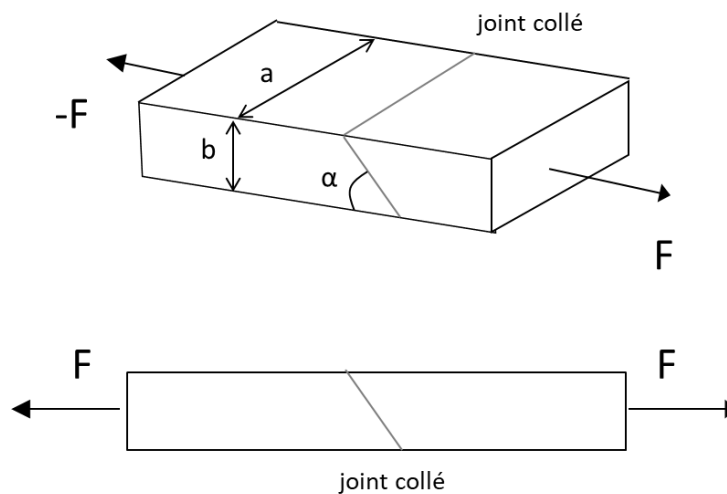
Calcul des contraintes

1. Traction et cisaillement d'un joint collé

Soient deux poutres en bois de section rectangulaire, collées comme le montre la figure ci-dessous. Un effort de traction $F=400$ daN est appliqué.

On donne $a=120$ mm ; $b=80$ mm ; $\alpha=65^\circ$

Calculer la contrainte normale et la contrainte tangentielle dans le joint collé



[Voir la correction](#)

2. Équilibre des forces dans une section soumise à un moment

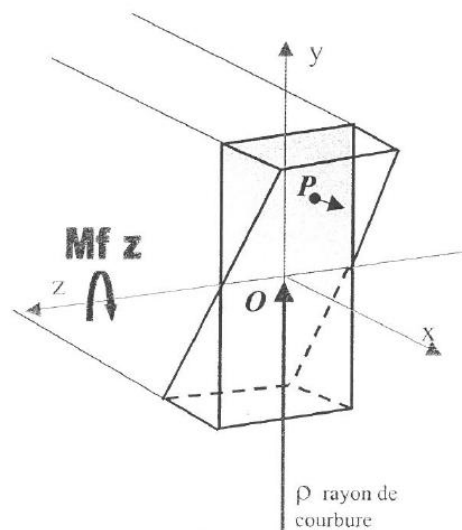
Soit une poutre de section S , module d'Young E , soumise à un moment fléchissant M_f ,

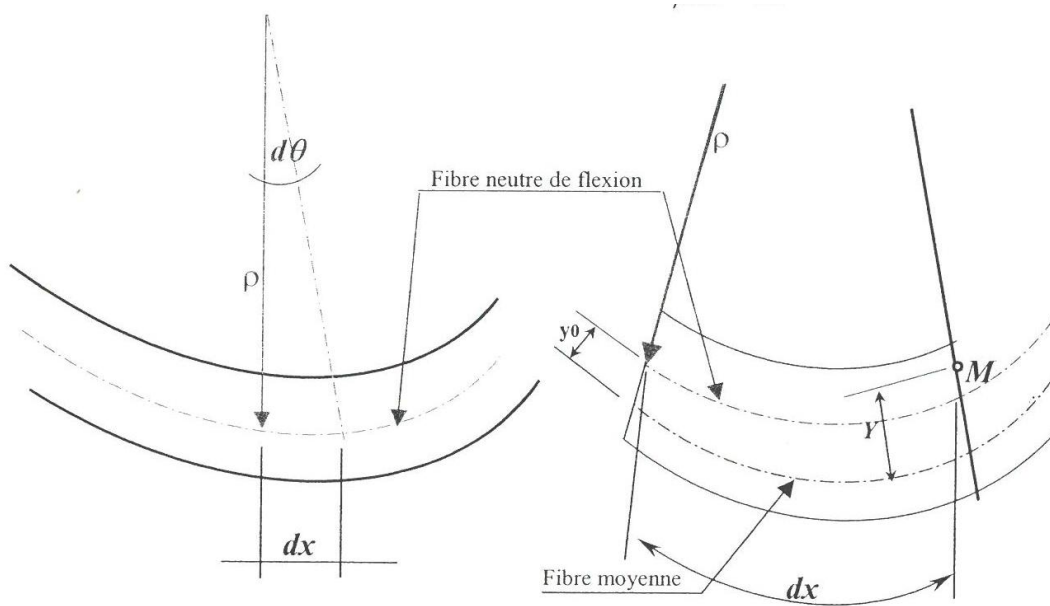
Apports théoriques : un peu de géométrie

Hypothèse de Bernoulli : les sections droites restent planes après déformation.

Soit ρ le rayon de courbure de la fibre neutre de flexion, alors

$$\rho \cdot d\theta = dx$$





La fibre neutre ne s'allonge pas $\implies \rho \cdot d\theta = dx =$ longueur d'un élément de volume

Rayon de courbure au point M : $= (\rho + y_0 - Y)$

Allongement unitaire Δl de la fibre au point M de cote Y : $= (\rho + y_0 - Y)d\theta - \rho d\theta = \Delta l$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{(y_0 - Y)d\theta}{dx} = \frac{(y_0 - Y)}{\rho}$$

On suppose que la fibre moyenne et la fibre neutre de flexion sont confondues, alors $y_0 = 0$ et

$$\varepsilon_{xx} = \frac{-y}{\rho}$$

De plus on a

$$y''(x) = \frac{1}{\rho}$$

Questions

Le moment fléchissant est donné par

$$M_f = \iint_S (\overline{OP} \wedge \vec{T}) dS$$

Avec

$$\overline{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

σ_{xx} contrainte normale dans la section, au point P.

Questions

Q1/ Calculer $\overline{OP} \wedge \vec{T}$

Q2/ En déduire que

$$M_{fz} = \iiint z \cdot \sigma_{xx} \cdot dS \cdot \vec{y} - \iiint y \cdot \sigma_{xx} \cdot dS \cdot \vec{z}$$

La loi de Hooke, en négligeant les autres contraintes, donne

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx}$$

De plus, les axes z et y étant axes principaux d'inertie, on a

$$\iint zy dS = 0$$

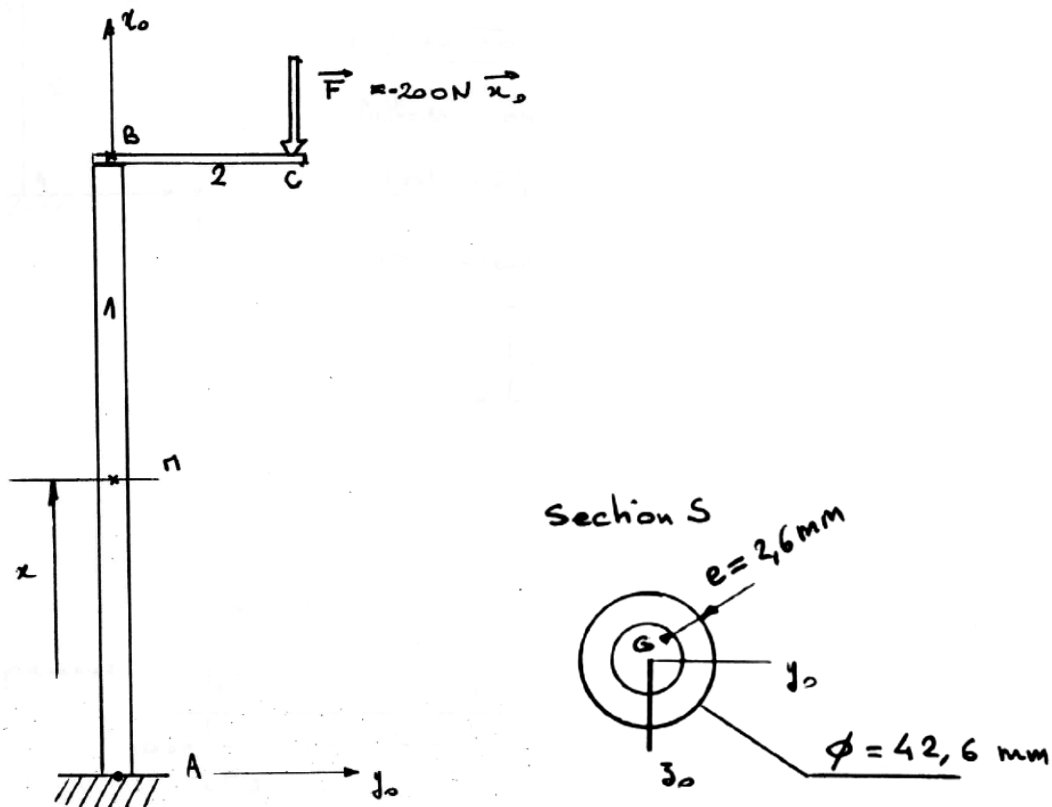
$$\iint y^2 dS = I_z$$

Q3/ En déduire l'expression de M_f en fonction de E, I_z et y'' (modifier l'expression de σ_{xx} dans l'expression de M_f obtenue en Q2)

Q4/ En déduire l'expression de $\sigma_{xx}(y)$ en fonction de M_f , I_z et y

[Voir la correction](#)

3. Poutre creuse



AB=1m ; BC=0,5m. On néglige le poids propre de la poutre.

Questions

1. Au point M tel que $\overline{AM} = x \cdot \vec{x}_0$, écrire le torseur de cohésion dans la section

2. En déduire les différents diagrammes le long de la poutre (entre A et B)
3. Tracer, dans une section, les contraintes dues uniquement aux efforts normaux
4. Tracer et calculer, dans la section la plus sollicitée, les contraintes dues au moment fléchissant, calculer la contrainte maximale de flexion dans une section

[Voir la correction](#)

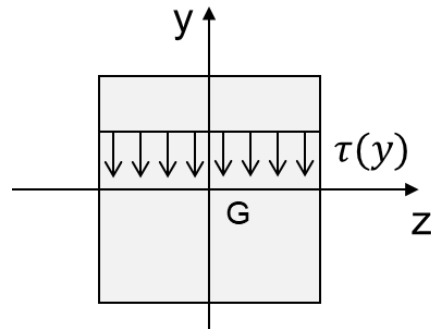
4. Contrainte de cisaillement

Soit une section S carrée de côté a, contenue dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) .

La section est soumise à un effort tranchant T suivant l'axe $-\vec{y}$.

La contrainte de cisaillement en tout point d'ordonnée y est définie par

$$\tau(y) = \frac{T \cdot S_z}{I_{Gz} \cdot b(y)}$$



- S_z moment statique de la section définie entre $y = -a/2$ et y.
- I_{Gz} moment quadratique de la section S par-rapport à l'axe
- $b(y)$ largeur de la section en y.

Calculer la contrainte de cisaillement **moyenne** sur la section S.

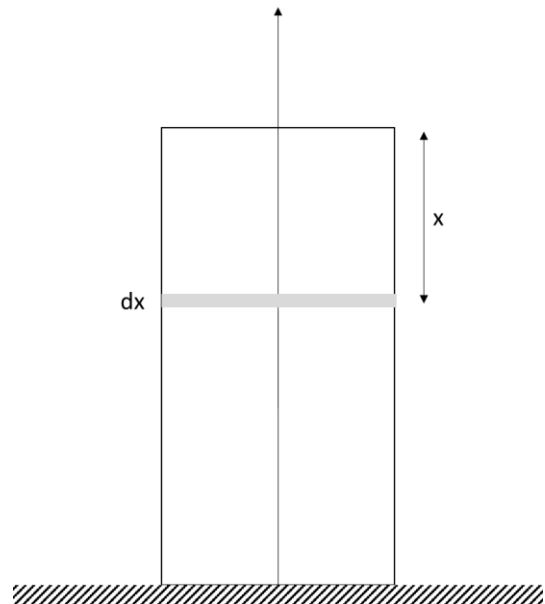
[Voir la correction](#)

5. Déformation d'un pilier sous son propre poids

Soit un pilier vertical de masse volumique ρ , module d'élasticité E, de section S, hauteur H, posé au sol et comprimé sous son poids propre.

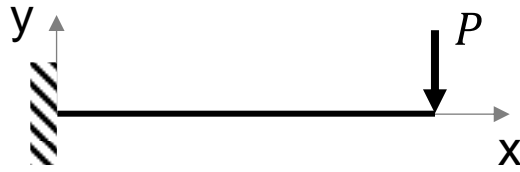
Calculer la variation de longueur totale du pilier vertical.

[Voir la correction](#)



6. Solide d'égalité résistance [1]

Soit une poutre encastree à gauche et libre à droite, de longueur L, de largeur b, de limite d'élasticité R_e . La poutre est soumise à une force P verticale, appliquée à son extrémité.



On propose d'appliquer à la poutre une hauteur h variable telle que, dans la section d'abscisse x

$$h^2 = \frac{6P}{R_e \cdot b} \cdot (L - x)$$

- 1/ Calculer le moment fléchissant $M_f(x)$ dans une section d'abscisse x
- 2/ En déduire la contrainte maximale dans la section. Que peut-on observer ?
- 3/ Représenter la hauteur h de la poutre le long de la poutre

[Voir la correction](#)

Corrections

1. Traction et cisaillement d'un joint collé

Soient F_n l'effort normal sur le joint collé et F_t l'effort de cisaillement

On a : $\cos \alpha = F_t / F$; $\sin \alpha = F_n / F$

La section considérée est $S = a.b / \sin \alpha$

Contrainte normale : $F_n/S = 0.342 \text{ MPa}$; contrainte tangentielle $F_t/S = 0.160 \text{ MPa}$

2. Équilibre des forces dans une section soumise à un moment

$$\vec{OP} \wedge \vec{T} = \begin{vmatrix} 0 & \vec{x} \\ z \times \sigma_{xx} & \vec{y} \\ -y \times \sigma_{xx} & \vec{z} \end{vmatrix}$$

$$Mf_z = \iint z \sigma_{xx} dS \vec{y} - \iint y \sigma_{xx} dS \vec{z}$$

et $\sigma_{xx} = -\frac{E \times y}{\rho}$ avec y point courant de la section droite.

$$Mf_z = -\iint zy \frac{E}{\rho} dS \vec{y} + \iint y^2 \frac{E}{\rho} dS \vec{z}$$

z et y étant les axes principaux d'inertie

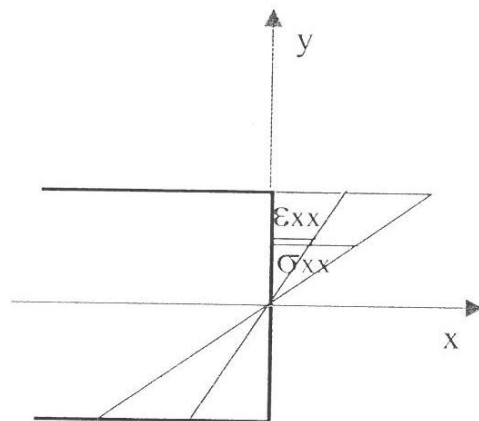
$$\iint zy dS = 0 \quad \text{et} \quad \iint y^2 dS = I_z$$

$$Mf_z = \frac{E}{\rho} I_z \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\rho} = Y''$$

$$Mf_z = EI_z y'' \quad y'' = \frac{Mf_z}{EI_z}$$

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = -\frac{Ey}{\rho}$$

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{y}{\rho} = -yy'' = -y \frac{Mf_z}{EI_z}$$



avec y point courant de la section
et y'' dérivée seconde de l'équation de la déformée

$$\sigma_{xx} = -\frac{Mf_z}{I_z} y$$

3. Poutre creuse

1/ Coupeure : la partie I de la poutre est la partie AM. La partie II est la partie MBC.

Soit $[Actions II \rightarrow I]_M$ le torseur de cohésion au point M (torseur des efforts internes), donc dans la section d'abscisse x.

En appliquant le PFS sur la partie II, on obtient :

$$[Actions II \rightarrow I]_M = [Actions ext \rightarrow II]_M$$

Les seules actions extérieures sont la force en C. Son torseur en C a pour expression :

$$[Actions \vec{F}]_C = \begin{cases} \vec{F} = -200N \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{M}_C = \vec{0} \end{cases}$$

On déplace ce torseur en M

$$[Actions \vec{F}]_M = \begin{cases} \vec{F} = -200N \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{M}_M = \vec{MC} \wedge \vec{F} \end{cases}$$

$$\vec{MC} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100Nm \end{pmatrix}$$

Le torseur de cohésion dans une section d'abscisse x a pour expression :

$$[Actions II \rightarrow I]_M = \begin{cases} \vec{F} = -200N \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{M}_M = 100Nm \vec{z}_0 \end{cases}$$

2/ Le diagramme des efforts tranchants est nul.

L'effort normal est constant et a pour valeur -200 N.

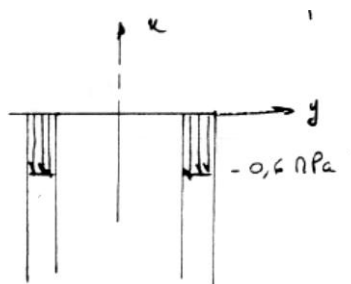
Le moment fléchissant est constant et a pour valeur 100 Nm.

3/ la répartition des contraintes dues à l'effort normal est uniforme et en tout point :

$$\sigma_n = \frac{N_x}{S} = -\frac{200}{S}$$
$$S = \frac{\pi}{4} d_e^2 - \frac{\pi}{4} d_i^2 = 327mm^2$$

$$\sigma_n = -0.6 MPa$$

Les contraintes dues aux efforts normaux ont donc le profil ci-dessous



4/ Contraintes dues au moment fléchissant dans la section la plus sollicitée

Le moment fléchissant et l'effort normal sont constants donc toute section subit la même sollicitation.

$$\sigma_{flexion} = -\frac{M_{fz} \cdot y}{I_z}$$
$$I_z = \frac{\pi}{64} \cdot (d_e^4 - d_i^4) = 65621 mm^4$$

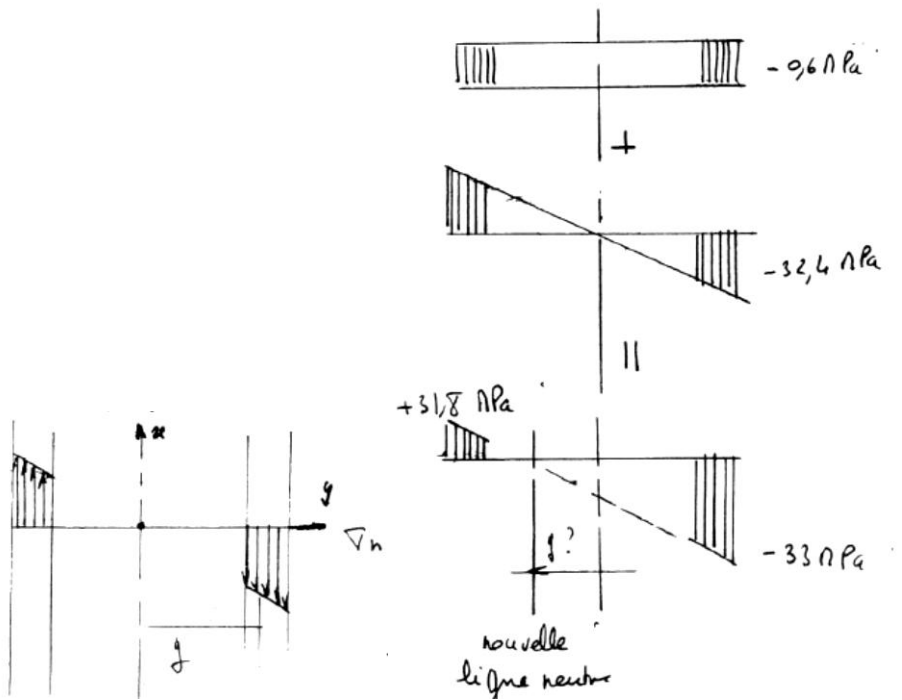
$$\sigma_{flexion} = -1,52 \cdot y$$

La contrainte maximale de flexion a pour valeur (pour $y=-d/2$)

$\sigma_{flexion_max} = 32.4 \text{ MPa}$
--

La contrainte minimale de flexion a pour valeur (pour $y=d/2$)

$\sigma_{flexion_min} = -32.4 \text{ MPa}$



Le profil global des contraintes est la somme des profils obtenus par traction et flexion :

$$\sigma_{maxi} = -0,6 \text{ MPa} - 32,4 \text{ MPa}$$

On voit un décalage de la ligne neutre. Calcul de nouvelle ligne neutre définie par $\sigma_n = 0$

$$\frac{N_x}{S} + \frac{-M_f \cdot y}{I_{Gz}} = 0 \Rightarrow y = -0,46 \text{ mm}$$

4. Contrainte de cisaillement

$$I_{Gz} = \int y^2 dS = \frac{a^4}{12}$$

$$\forall y \quad b(y) = a$$

$$S_z = \int_{-a/2}^y y dy dz = a \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-a/2}^y = a \cdot \left(\frac{y^2}{2} - \frac{a^2}{8} \right)$$

Donc

$$\tau(y) = \frac{12T}{a^5} \cdot a \cdot \left(\frac{y^2}{2} - \frac{a^2}{8} \right) = \frac{12T}{a^4} \cdot \left(\frac{y^2}{2} - \frac{a^2}{8} \right)$$

Par définition, la contrainte de cisaillement moyenne a pour expression :

$$\tau_{moy} = \frac{1}{a} \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \tau(y) dy = \frac{1}{a} \cdot \frac{12T}{a^4} \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{a^2}{8} \right) dy = \frac{12T}{a^5} \cdot \left[\frac{y^3}{6} - \frac{a^2}{8} \cdot y \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$
$$\tau_{moy} = \frac{12T}{a^5} \cdot \left(\frac{a^3}{48} - \frac{a^3}{16} + \frac{a^3}{48} - \frac{a^3}{16} \right) = \frac{12T}{a^5} \cdot \frac{-2a^3}{24}$$

$$\tau_{moy} = -\frac{T}{a^2}$$

La contrainte de cisaillement moyenne est l'effort tranchant divisé par la section. C'est la contrainte obtenue lorsque l'on suppose que le champ de contrainte de cisaillement est uniforme sur la section.

5. Déformation d'un pilier sous son propre poids

Contrainte dans une section S, pour un effort normal F :

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

La déformation du pilier a pour expression

$$\varepsilon = \frac{\Delta H}{H}$$

ΔH : variation de la hauteur H.

Loi de Hooke

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

L'élément de hauteur dx, situé à la distance x du sommet, est soumis à la force F telle que :

$$F = \rho \cdot S \cdot x \cdot g$$

La déformation a donc pour expression, avec la loi de Hooke

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\rho \cdot S \cdot x \cdot g}{S \cdot E} = \frac{\rho \cdot x \cdot g}{E}$$

La déformation a aussi pour expression

$$\varepsilon = \frac{dx - dx'}{dx}$$

dx : hauteur avant déformation

dx' : hauteur après déformation

Donc

$$dx' = -\varepsilon \cdot dx + dx = dx \cdot \left(1 - \frac{\rho \cdot x \cdot g}{E} \right)$$

La hauteur H' après déformation s'obtient en intégration dx' sur tout le pilier :

$$H' = \int_0^H dx' = \int_0^H dx \cdot \left(1 - \frac{\rho \cdot x \cdot g}{E} \right) = \left[x - \frac{\rho \cdot x^2 \cdot g}{2E} \right]_0^H = H - \frac{\rho \cdot H^2 \cdot g}{2E}$$

La variation de hauteur est donc

$$H' - H = \frac{\rho \cdot H^2 \cdot g}{2E}$$

$$H' - H = \frac{\rho \cdot H^2 \cdot g}{2E} = \frac{P \cdot H}{2ES}$$

Avec P poids du pilier tel que $P = \rho \cdot H \cdot S \cdot g$

6. Solide d'égale résistance [1]

1/

$$M_f(x) = -P \cdot (L - x)$$

2/ Par définition, la contrainte normale dans la section S au point d'ordonnée y a pour expression

$$\sigma(y) = -\frac{M_f \cdot y}{I_z}$$

Donc pour $y = h/2$ on a la contrainte maximale de flexion

$$\sigma_{max} = \frac{P \cdot (L - x) \cdot \frac{h}{2}}{b \cdot \frac{h^3}{12}} = \frac{6P \cdot (L - x)}{b \cdot h^2}$$

Avec l'expression de h proposée dans l'énoncé on a

$$\sigma_{max} = \frac{6P \cdot (L - x)}{b \cdot \frac{6P}{R_e \cdot b} \cdot (L - x)} = R_e$$

La contrainte maximale de flexion est la même dans toute section de la poutre et est égale à R_e .

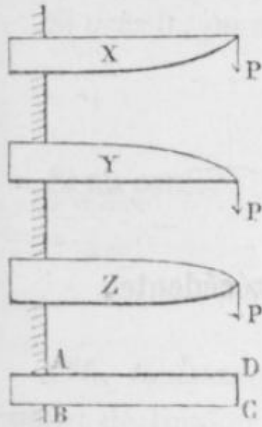
On parle de solide d'égale résistance.

3/

Supposant au contraire que la largeur b reste constante, et résolvant l'équation par rapport à h , on aura, pour une valeur quelconque l de L ,

$$h^2 = \frac{6P}{Rb} l.$$

Fig. 29.



C'est-à-dire que le carré de la hauteur h sera proportionnel à l ; et la pièce qui est représentée en plan par le rectangle ABCD (fig. 29), dont la dimension $AB = b$, le sera en élévation par l'une quelconque des trois formes paraboliques X, Y, Z, dont le sommet est au point d'application de la force P.

On peut, en opérant d'une manière analogue, déterminer la forme des solides d'égale résistance pour toutes les manières dont peuvent reposer les solides, et quelle que soit la manière dont ils sont chargés.

Références Bibliographiques

- [1] J. Buchetti, *Manuel des constructions métalliques et mécaniques*. 1888. [En ligne]. Disponible sur: <http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb301722737>
- [2] Y. Brémont et P. Réocreux, *Mécanique du solide indéformable: statique cours et exercices résolus classes préparatoires aux grandes écoles, MPSI, PTSI, PSI, PSI*, MP, MP*, PT, PT*, premier cycle universitaire*. in *Mécanique*, no. 2. Paris: Ellipses, 1996.
- [3] A. Castigliano, *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. in *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*, no. vol. 1 à 2. A. F. Negro, 1879. [En ligne]. Disponible sur: <https://books.google.fr/books?id=d0EArvXp34gC>
- [4] L. Buthaud, « Polycopié de mécanique des solides ISAE-ENSMA ». ISAE ENSMA, 2002.
- [5] Chillon, *Résistance des matériaux Tome 1*, vol. 1. Paris: DUNOD, 1961.
- [6] P.-O. Martin, « Formulaire résistance des matériaux - Poutres ». CTICM, 2021.
- [7] *Comprendre simplement la résistance des matériaux: la structure, principes et enjeux pour la conception*, 3e édition. Antony [France]: Éditions Le Moniteur, 2019.
- [8] D. Gamby, « Polycopié de Résistance des Matériaux ». ISAE-ENSMA, 2002.