

Exercices corrigés de Résistance des Matériaux

Caractéristiques des sections

1. Centre de gravité d'une section

Soit la section ci-dessous.

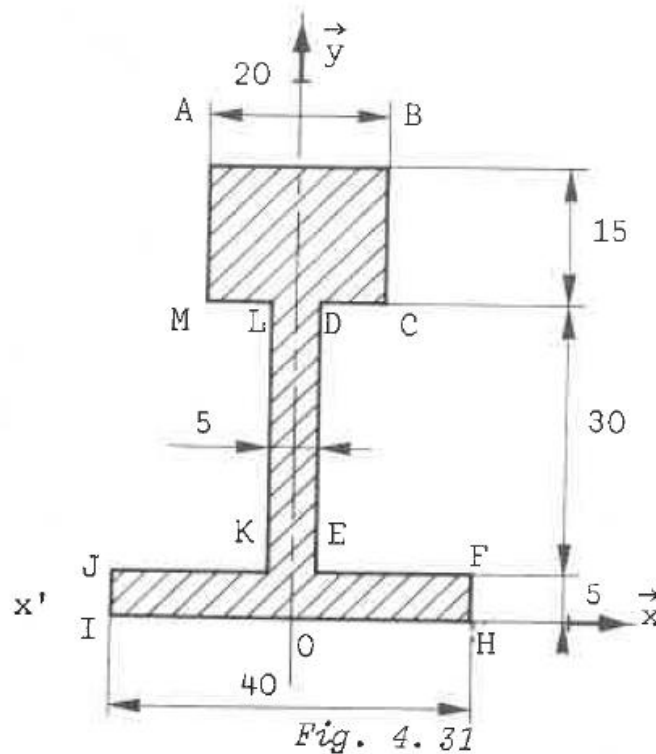


Figure 1. Référence [1]

1/ Déterminer le centre de gravité G de la section en considérant que G est le barycentre des centres de gravité de chaque surface élémentaire, pondérés par l'aire de la surface

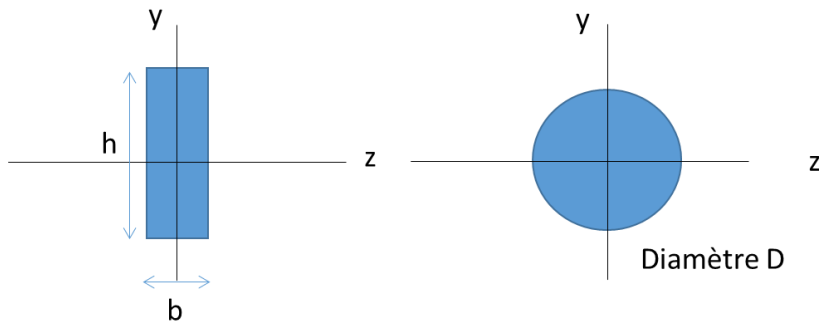
2/ Déterminer le centre de gravité G de la section ci-dessous à l'aide des moments statiques

[Voir la correction](#)

2. Moment quadratique de deux sections

Soient les deux sections ci-dessous de centre d'inertie G. Déterminer l'expression de I_{Gz} moment quadratique par-rapport à l'axe Gz pour les deux sections. On rappelle que

$$I_{Gz} = \iint y^2 dydz$$



[Voir la correction](#)

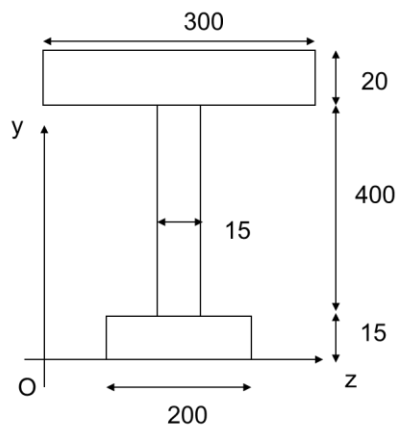
3. Centre de gravité et moment quadratique d'une poutre en I

Soit une poutre constituée d'une section en I, centre de gravité G, de masse volumique homogène.

1/ Calculer les coordonnées du centre de gravité G de la section ci-dessous.

2/ En déduire le moment quadratique I_{Gz} de la section S par-rapport à l'axe Gz.

Les dimensions sont données en mm.



[Voir la correction](#)

4. Caractéristiques d'une section en I

Soient les sections A et B constituées du même matériau de module E.

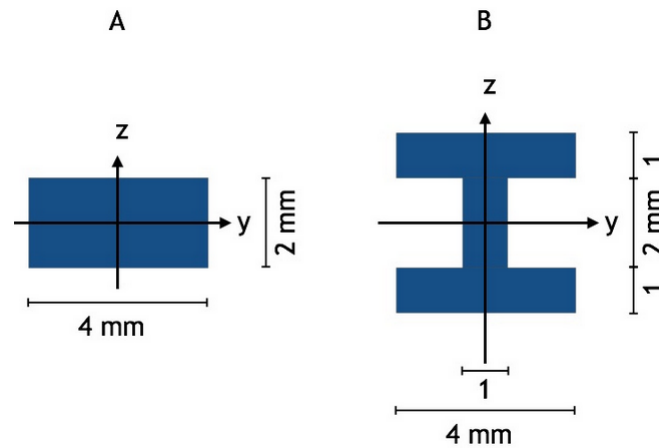


Figure 2. Référence MOOC ENS Cachan

Q1/ Montrer que la raideur en traction de la section B est 1.25 fois plus grande que la raideur de la section A

Q2/ Montrer que le moment quadratique I_{yB} de la section B est 7.25 fois plus grande que le moment quadratique de la section A

Formulaire

Loi de Hooke en traction uniaxiale $\sigma = E \cdot \varepsilon$. De plus

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Donc $F = \frac{E}{L_0} \cdot S \cdot \Delta L$. Donc la raideur d'une poutre en traction est

$$\frac{E}{L_0} \cdot S$$

[Voir la correction](#)

5. Matériaux « sandwichs »

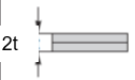
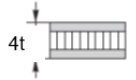
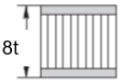
Les matériaux « sandwichs » sont des matériaux composés d'une âme centrale entourée de deux peaux, ou semelles. Ils présentent un excellent rapport poids/résistance et poids/rigidité en flexion.

On propose dans cet exercice de retrouver les valeurs données ci-dessous concernant la rigidité et la résistance en flexion de trois sandwichs de différentes épaisseurs.

Questions

La figure ci-dessous donne les rapports entre la rigidité en flexion (moment quadratique I_z) d'une poutre d'épaisseur t et celle d'un sandwich d'épaisseur $2t$ et $4t$.

Retrouver les rapports de 7 et 37 donnés.

Properties	Solid material	Core thickness	
			
Stiffness	1.0	7.0	37.0
Flexural strength	1.0	3.5	9.2
Weight	1.0	1.03	1.06

Doc. HEXCEL

Techniques de l'ingénieur AM5141

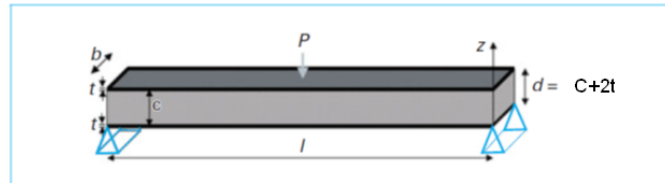
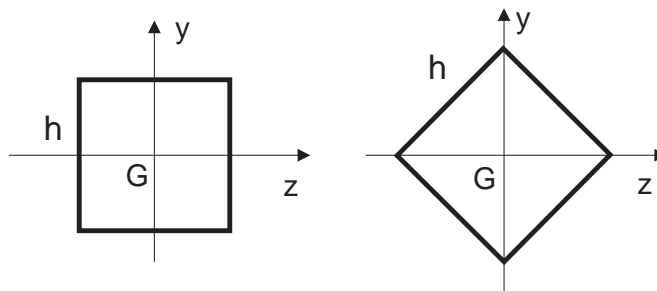


Figure 21 - Poutre sandwich sur deux appuis chargée au centre

[Voir la correction](#)

6. Résistance en flexion d'une section losange

On dispose d'une poutre à section carré de côté h . On se demande s'il est préférable de la disposer « en carré » ou « en losange », pour optimiser sa résistance à la flexion.



1/ Calculer le moment quadratique I_{Gz} par-rapport à l'axe Gz , pour chaque section

2/ Le seul calcul du moment quadratique permet-il de conclure sur la résistance en flexion des deux sections ?

[Voir la correction](#)

Corrections

7. Centre de gravité d'une section

Par symétrie, on a $x_G = 0$. Dans les questions 1 et 2, on cherche donc seulement y_G .

1/ la définition du centre de gravité appliquée à un ensemble de solides donne

$$S_1 \cdot \overrightarrow{OG_1} + S_2 \cdot \overrightarrow{OG_2} + S_3 \cdot \overrightarrow{OG_3} = (S_1 + S_2 + S_3) \cdot \overrightarrow{OG}$$

S_1 est la surface ABCM. S_2 est la surface LDEK. S_3 est la surface JFHI

On a donc

$$300y_{G_1} + 150y_{G_2} + 200y_{G_3} = 650y_G$$

D'après la géométrie des sections, $y_{G_1} = 42,5 \text{ mm}$; $y_{G_2} = 20 \text{ mm}$; $y_{G_3} = 2,5 \text{ mm}$.

Finalement

$y_G = 25 \text{ mm}$

2/ Par les moments statiques

$$S_{10x} = \iint y dx dy = 20 \times \left(\frac{50^2}{2} - \frac{35^2}{2} \right) = 12750 \text{ mm}^3$$

$$S_{20x} = \iint y dx dy = 5 \times \left(\frac{35^2}{2} - \frac{5^2}{2} \right) = 3000 \text{ mm}^3$$

$$S_{30y} = \iint y dx dy = 40 \times \frac{5^2}{2} = 500 \text{ mm}^3$$

On a donc

$y_G = \frac{12750 + 3000 + 500}{650} = 25 \text{ mm}$

Remarque

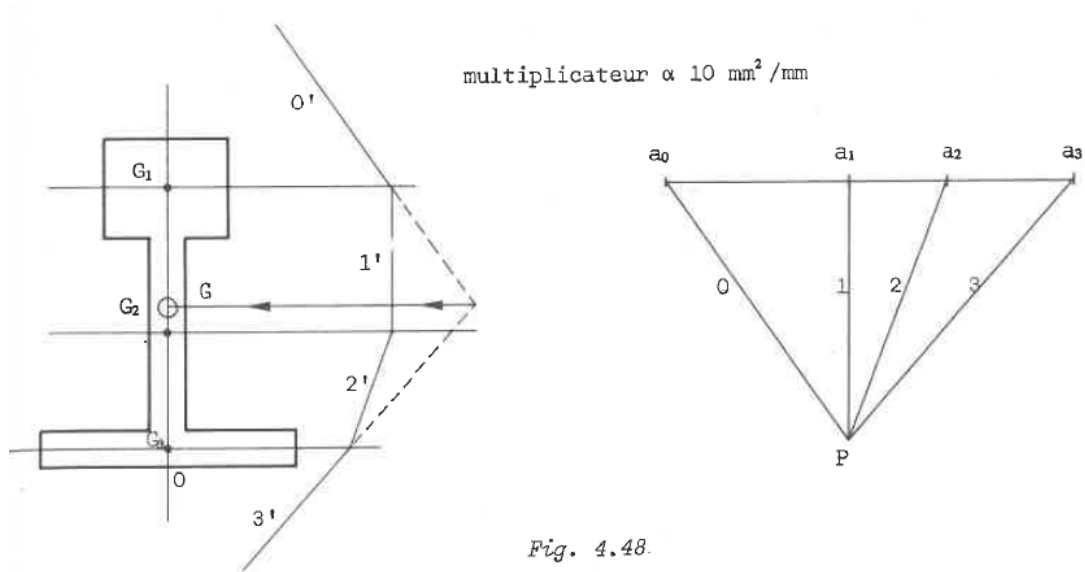
On pouvait aussi retrouver la position de G avec deux méthodes graphiques.

- Par statique graphique
- Par la représentation graphique de la formule ci-dessous

$$S_1 \cdot \overrightarrow{OG_1} + S_2 \cdot \overrightarrow{OG_2} + S_3 \cdot \overrightarrow{OG_3} = (S_1 + S_2 + S_3) \cdot \overrightarrow{OG}$$

1/ Par statique graphique

Des détails sur la méthode peuvent être trouvés dans le cours de statique graphique.



On mesure bien $y_G = 25 \text{ mm}$.

2/ Par la représentation graphique de la formule du barycentre

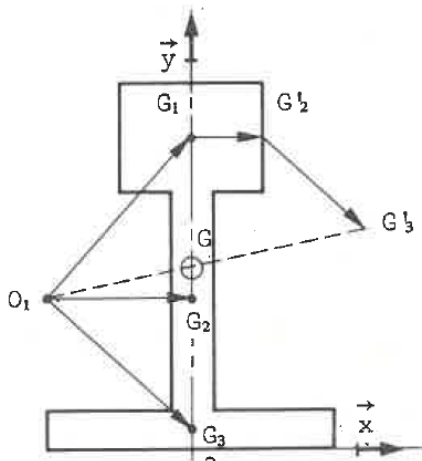
$$S_1 \cdot \overrightarrow{OG_1} + S_2 \cdot \overrightarrow{OG_2} + S_3 \cdot \overrightarrow{OG_3} = (S_1 + S_2 + S_3) \cdot \overrightarrow{OG}$$

$$300 \cdot \overrightarrow{OG_1} + 150 \cdot \overrightarrow{OG_2} + 200 \cdot \overrightarrow{OG_3} = 650 \cdot \overrightarrow{OG}$$

En divisant chaque terme par 300 il vient :

$$\overrightarrow{OG_1} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OG_2} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{OG_3} = \frac{13}{6} \cdot \overrightarrow{OG}$$

En prenant un point O n'importe où sur le schéma on peut tracer la construction ci-dessous :



A partir de O_1 , portons donc $\overrightarrow{O_1G_1}$ puis

$$\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{\overrightarrow{O_1G_2}}{2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{G_2G_3} = \frac{2}{3} \overrightarrow{O_1G_3}$$

$$\text{On obtient :} \quad \overrightarrow{O_1G_3} = \frac{13}{6} \overrightarrow{O_1G}$$

D'où G à l'intersection de l'axe de symétrie et de $\overrightarrow{O_1G_3}$.

On mesure OG $\# 25 \text{ mm}$.

On mesure bien $y_G = 25 \text{ mm}$.

Remarque : pour simplifier les calculs, on aurait pu choisir $O = G_1$.

8. Moment quadratique de deux sections

Section rectangulaire

$$I_{Gz} = \iint y^2 dydz = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = b \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = b \cdot \left(\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{24} + \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{24} \right)$$

$$I_{Gz} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Section circulaire

$$I_{Gz} = \iint r^2 \cos^2 \theta \cdot dS = \iint r^2 \cos^2 \theta \cdot r dr d\theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 \theta \cdot r dr d\theta$$
$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$I_{Gz} = \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \right]_0^{2\pi} = \frac{R^4}{4} \cdot \frac{2\pi}{2}$$

$$I_{Gz} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

9. Centre de gravité et Moment quadratique d'une poutre en I

On divise la section en 3 sections rectangulaires (300x20, 15x400, 200x15).

1/

$$y_G = \frac{S_1 y_{G1} + S_2 y_{G2} + S_3 y_{G3}}{S_1 + S_2 + S_3} = 257,5 \text{ mm}$$

Par symétrie, $z_G = 150 \text{ mm}$

2/ On calcule le moment quadratique des 3 sections par-rapport à l'axe z passant par leur centre de gravité puis on en déduit le moment quadratique par-rapport à Gz à l'aide du théorème de Huygens.

$$I_{Gz} = 4,4693 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

10. Caractéristiques d'une section en I

1/ Les deux poutres ont même longueur et module E. La section S_B (10 mm^2) est 25% fois plus grande que la section S_A (8 mm^2) donc la raideur en traction augmente de 25%.

2/ Section A

$$I_{yA} = \frac{4 \cdot 2^3}{12} \approx 2,7 \text{ mm}^4$$

Section B

$$I_{yB} = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3}$$

Par le théorème de Huygens :

$$I_{y1} = \frac{4 \cdot 1^3}{12} + 1,5^2 \cdot 4 \cdot 1 \approx 9,3 \text{ mm}^4$$

$$I_{y1} = I_{y3}$$
$$I_{y2} = \frac{1 * 2^3}{12}$$

Par conséquent,

$$\frac{I_{yA}}{I_{yB}} = \frac{2 * \left(\frac{4 * 1^3}{12} + 1.5^2 * 4 * 1 \right) + \frac{8}{12}}{\frac{8}{3}} = 7.25$$

11. Matériaux « sandwichs »

$$I_z = \frac{b \cdot (2t)^3}{12} = \frac{8b \cdot t^3}{12} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot t^3$$
$$I_z = 2 \left(\frac{b \cdot t^3}{12} + b \cdot t \cdot (1,5t)^2 \right) = 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot b \cdot t^3$$
$$I_z = 2 \left(\frac{b \cdot t^3}{12} + b \cdot t \cdot (3,5t)^2 \right) = 37 \cdot \frac{2}{3} \cdot b \cdot t^3$$

12. Résistance en flexion d'une section losange

1/ Section « en carré » :

$$I_{Gz} = \iint_D y^2 dzdy = \frac{h^4}{12}$$

Avec

$$D = \{z; y\} \in \mathbb{R}^2 / -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \text{ et } -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}$$

Section « en losange » :

$$I_{Gz} = 4 \cdot I$$

Avec I l'intégrale d'un quart de losange telle que

$$I = \iint_D y^2 dzdy$$

Avec

$$D = \{z; y\} \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq z \leq \frac{h}{\sqrt{2}} \text{ et } 0 \leq y \leq -z + \frac{h}{\sqrt{2}}$$

$$I = \int_0^{\frac{h}{\sqrt{2}}} \left(\int_0^{-z + \frac{h}{\sqrt{2}}} y^2 dy \right) dz = \frac{h^4}{48}$$

Donc

$$I_{Gz} = \frac{h^4}{12}$$

2/ Section « en carré » :

$$\sigma_{max} = -\frac{M_f \cdot y_{max}}{I_{Gz}}$$

Avec

$$y_{max} = \frac{h}{2}$$

Donc

$$\sigma_{max} = -M_f \cdot \frac{6}{h^3}$$

Section « en losange » :

$$\sigma_{max} = -\frac{M_f \cdot y_{max}}{I_{Gz}}$$

Avec

$$y_{max} = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

Donc

$$\sigma_{max} = -M_f \cdot \frac{6\sqrt{2}}{h^3}$$

La contrainte maximale sera plus forte dans la section posée « en losange » malgré un moment quadratique égal à la section carrée.

Références Bibliographiques

- [1] J. P. Larralde, Éd., *Mécanique statique I - Méthode analytique*. in Collection des industries mécaniques. Paris ; New York : Issy-les-Moulineaux: Masson et EAP, 1981.