

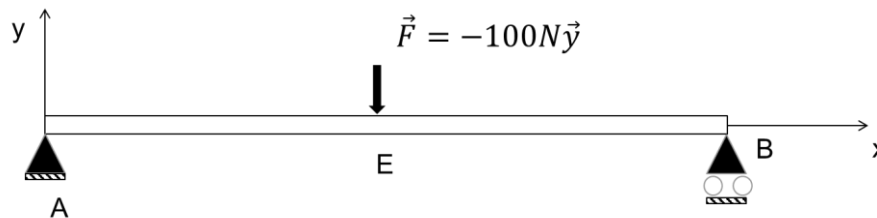
# Exercices corrigés de Résistance des Matériaux

## Efforts internes, poutres et portiques isostatiques

### 1. Poutre isostatique

Soit une poutre de longueur  $L$ , sollicitée par une force  $\vec{F}$  en E, à la distance  $L/2$  de A.

1. Déterminer les efforts et moments en A et B
2. Déterminer le torseur de cohésion le long de la poutre
3. Construire les diagrammes des efforts normaux, tranchants et moments fléchissants



[Voir la correction](#)

### 2. Poutre isostatique

Déterminer le diagramme des efforts tranchants et le diagramme des moments fléchissant dans la poutre ci-dessous.



[Voir la correction](#)

### 3. Poutre isostatique

Soit la poutre ci-dessous.

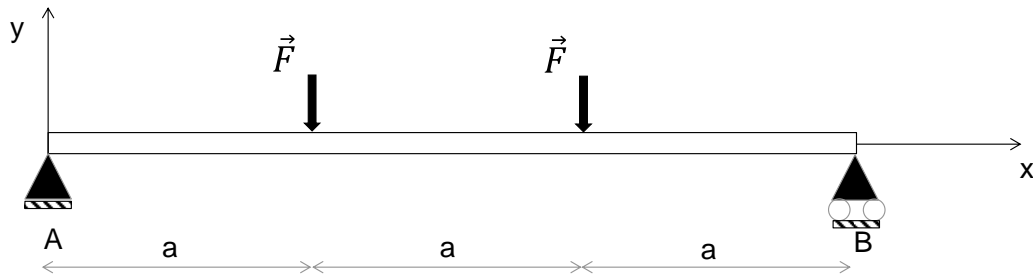
$$\vec{F} = -1000N \cdot \vec{y}$$

$$a=1m$$

Remarque : attention au schéma, le point A est aussi bloqué en X

1. Déterminer les efforts et moments en A et B

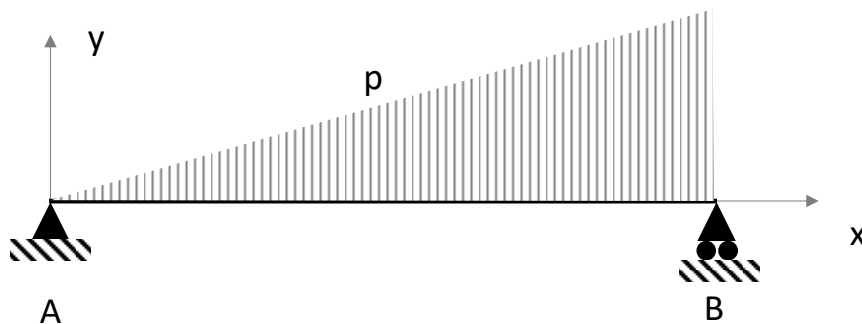
2. Déterminer le torseur de cohésion le long de la poutre
3. Construire les diagrammes des efforts et moments



[Voir la correction](#)

#### 4. Poutre sur deux appuis, charge linéique croissante

Soit une poutre de longueur  $L$  et d'axe  $x$ , sur deux appuis A (appui) et B (appui glissant). Cette poutre est soumise à une charge linéique croissante  $p$  telle que l'effort total induit par cette charge sur la poutre soit  $P$ .



1/ On appelle  $a$  le coefficient directeur de la charge linéique. Par définition,

$$p(x) = a \cdot \frac{x}{L}$$

Montrer que

$$p(x) = \frac{2Px}{L^2}$$

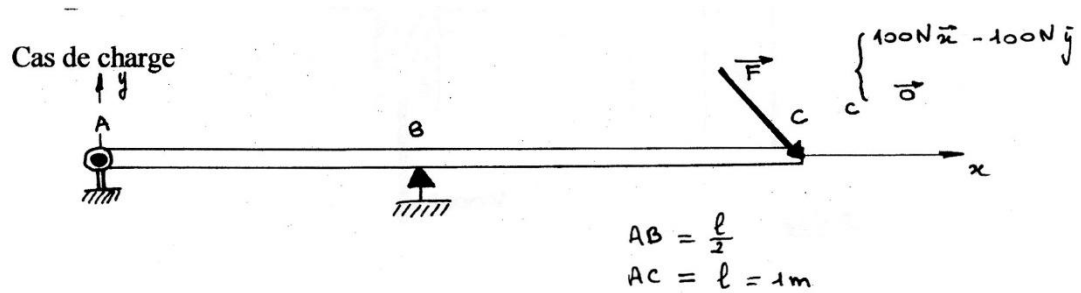
2/ Calculer les réactions aux appuis A et B

3/ Calculer les efforts internes dans toute section de la poutre (effort normal, effort tranchant, moment fléchissant). On déterminera en particulier en quelle section le moment fléchissant est maximal et que vaut le moment fléchissant maximal.

[Voir la correction](#)

#### 5. Poutre isostatique, effort dévié

Calculer l'expression du torseur de cohésion le long de la poutre et tracer les diagrammes des efforts internes.

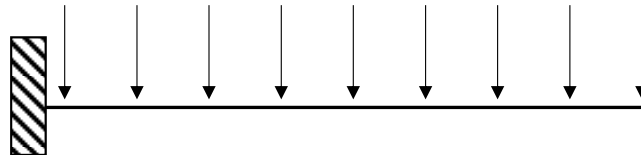


[Voir la correction](#)

## 6. Moment fléchissant dû à une charge linéique constante

Soit la poutre ci-dessous d'axe  $x$ , soumise à une charge linéique  $q$  constante (N/m) tout le long de la poutre.

Déterminer le moment fléchissant dû à cette charge linéique.



[Voir la correction](#)

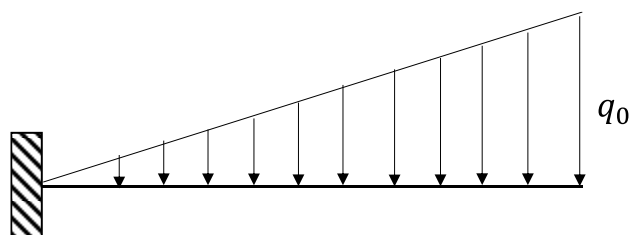
## 7. Moment fléchissant dû à une charge linéique non constante

Soit la poutre ci-dessous d'axe  $x$ , soumise à une charge linéique  $q$  (N/m) tout le long de la poutre telle que :

$$q = q_0 \cdot \frac{x}{L}$$

Avec  $q_0$  constante.

Déterminer le moment fléchissant dû à cette charge linéique.



[Voir la correction](#)

## 8. Moment fléchissant, poutre sur deux appuis, charge linéique variable

Soit une dalle ABCD en béton armé telle que ci-dessous [1].

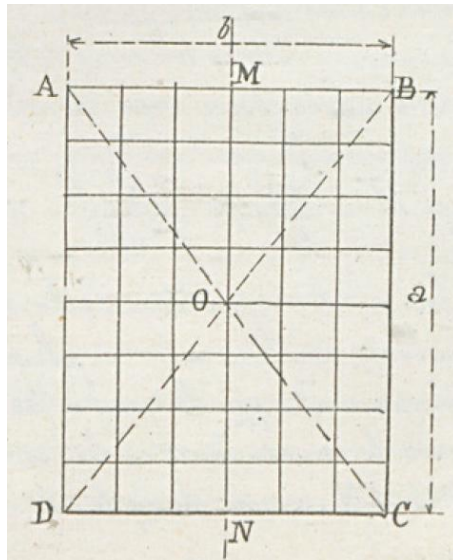
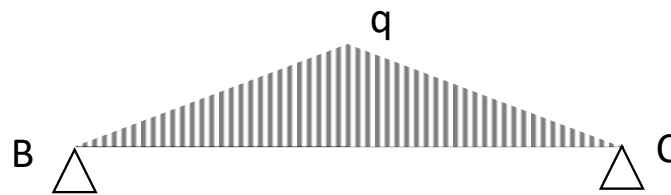


Figure 1. Dalle ABCD [1]

On propose de calculer le moment fléchissant maximal dans la poutre BC. On suppose que la poutre BC reprend la partie de la charge correspondant au triangle BOC. On peut ainsi modéliser la poutre BC comme une poutre sur deux appuis, soumise à une charge  $q$  linéique croissante entre B et le centre de la poutre et décroissante entre le centre de la poutre et C.

1/ Déterminer le moment fléchissant maximal dans la poutre



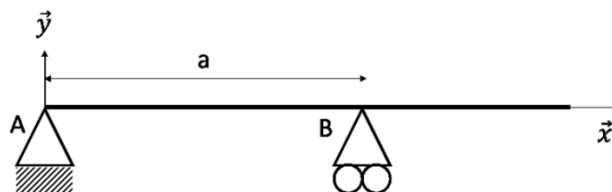
[Voir la correction](#)

## 9. Poutre en flexion : influence de la position de l'appui

Soit une poutre de longueur  $L$  reposant sur deux appuis A et B.

La distance entre A et B est appelée  $a$ , avec  $a \leq L$ . La poutre est donc en porte-à-faux entre B et son extrémité.

On applique une charge linéique  $q$  (en N/m) sur toute la poutre.



1/ Déterminer les réactions  $Y_A$  et  $Y_B$  aux appuis en A et B en fonction de la  $q$ ,  $L$  et  $a$ .

On propose d'étudier l'influence de l'emplacement de l'appui B (donc l'influence de  $a$ ) sur la valeur des réactions aux appuis.

On considère que

$$0,2.L \leq a \leq L$$

2/ Etudier les variations de  $Y_A$  en fonction de  $a$

3/ Etudier les variations de  $Y_B$  en fonction de  $a$

4/ Tracer sur un même graphe, en fonction de  $a$ , les réactions  $Y_A$  et  $Y_B$ , et  $Y_A + Y_B$ , pour  $q = 2 \text{ kN/m}$  et  $L = 5\text{m}$ .

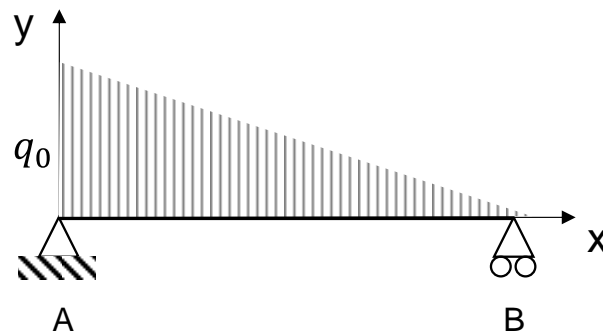
[Voir la correction](#)

## 10. Poutre sur deux appuis avec charge linéique variable

Soit une poutre sur deux appuis A et B, de longueur L, d'axe x, soumise à une charge linéique q telle que

$$q = q_0 - q_0 \cdot \frac{x}{L}$$

On pose  $x = 0$  en A.

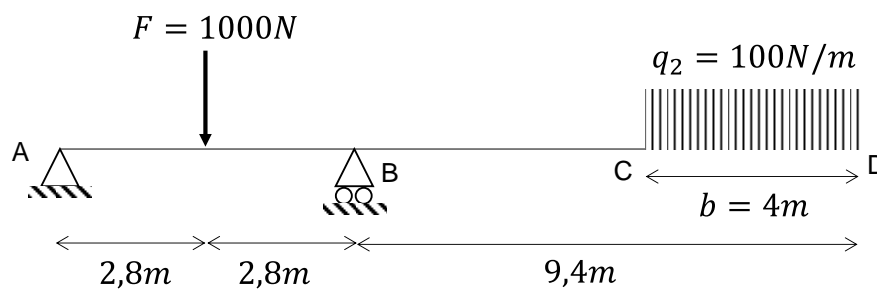


Déterminer les réactions d'appui en A et B.

[Voir la correction](#)

## 11. Poutre isostatique avec porte-à-faux

Déterminer le diagramme des efforts tranchants et le diagramme des moments fléchissant dans la poutre ci-dessous.

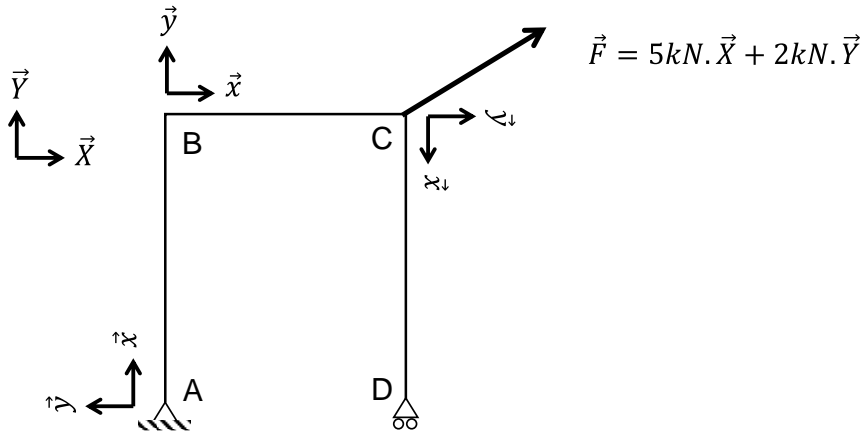


[Voir la correction](#)

## 12. Portique

Soit le portique isostatique ci-dessous, de longueur  $L=3\text{m}$  et de hauteur  $h=4\text{m}$ .

1. Déterminer les réactions de liaison en A et D
2. Tracer le diagramme du moment fléchissant  $M$  le long du portique



[Voir la correction](#)

# Corrections

## 1. Poutre isostatique

Principe fondamental de la statique

$$\begin{aligned} X_A &= 0 \\ Y_A &= Y_B = 50N \end{aligned}$$

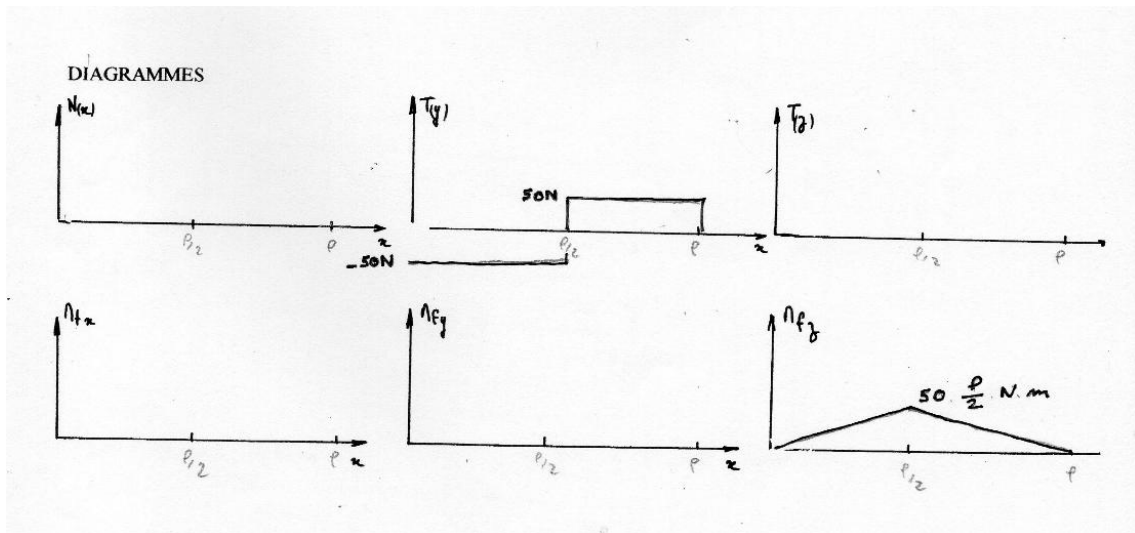
Torseur de cohésion

Pour  $x \in [A ; E]$

$$[Action II \rightarrow I]_G = [Action ext \rightarrow II]_G = \begin{cases} -50N \cdot \vec{y} \\ 50x N \cdot m \vec{z} \end{cases}$$

Pour  $x \in [E ; B]$

$$[Action II \rightarrow I]_G = [Action ext \rightarrow II]_G = \begin{cases} 50N \cdot \vec{y} \\ 50(L-x) N \cdot m \vec{z} \end{cases}$$



## 2. Poutre isostatique

PFS

$$\begin{aligned} Y_A + Y_B - F &= 0 \\ Y_B \cdot (a + b) - F \cdot a &= 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} Y_A = \frac{F \cdot b}{a + b} \\ Y_B = \frac{F \cdot a}{a + b} \end{cases}$$

Pour  $0 < x < a$

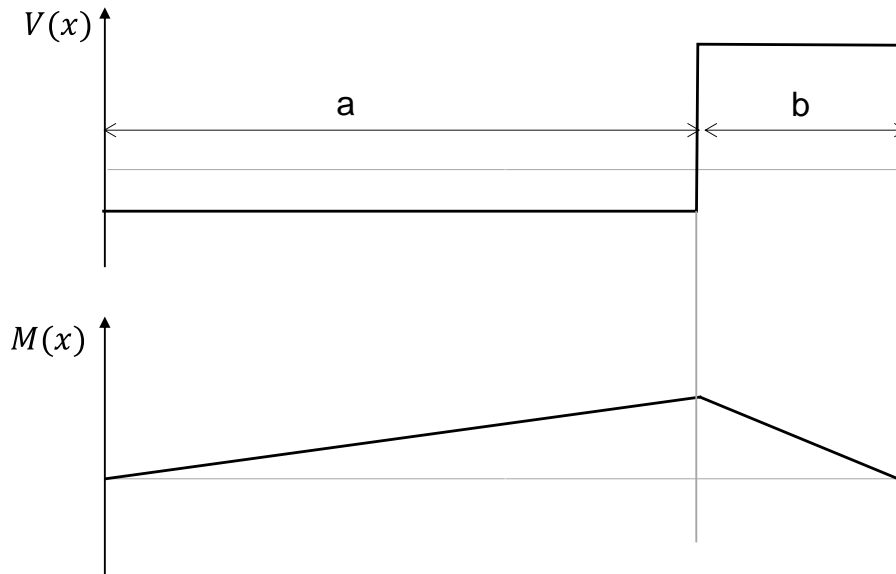
$$V(x) = -Y_A$$

$$M(x) = Y_A \cdot x = \frac{F \cdot b}{a + b} \cdot x$$

Pour  $a < x < b$

$$V(x) = Y_B$$

$$M(x) = Y_B \cdot (a + b - x)$$



### 3. Poutre isostatique

1/ PFS

En X :  $X_a=0$

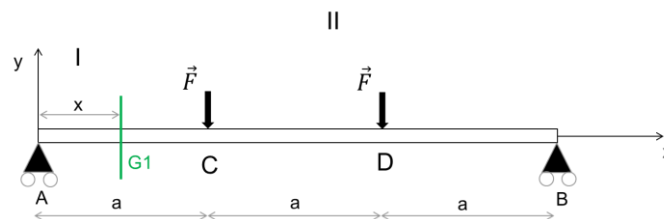
En Y :  $Y_a - 2F + Y_b = 0$

Par symétrie du problème (géométrie, appuis et efforts) :  $Y_a=Y_b$  donc  **$Y_a=F$  et  $Y_b=F$**

Pas de moment en A et B (appuis)

2/ Déterminer le torseur de cohésion le long de la poutre

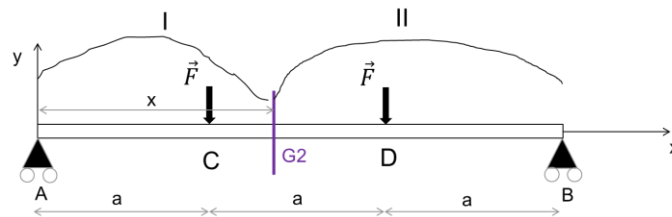
Pour une section d'abscisse x entre 0 et a, en  $G_1$



$$\begin{cases} -2F\vec{y} + Y_b\vec{y} = -1000N \cdot \vec{y} \\ M_f : \overrightarrow{G_1C} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{G_1D} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{G_1B} \wedge Y_b\vec{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{R} = -1000N \cdot \vec{y} \\ \vec{M} = 1000 \cdot x \cdot \vec{z} \end{cases}$$

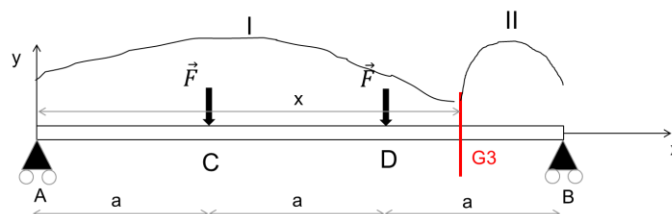
Pour une section d'abscisse x entre a et 2a, en  $G_2$



$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \text{G2} \vec{M} = 1000 \cdot a \cdot \vec{z} \end{cases}$$

Pour une section d'abscisse x entre 2a et 3a, en G3

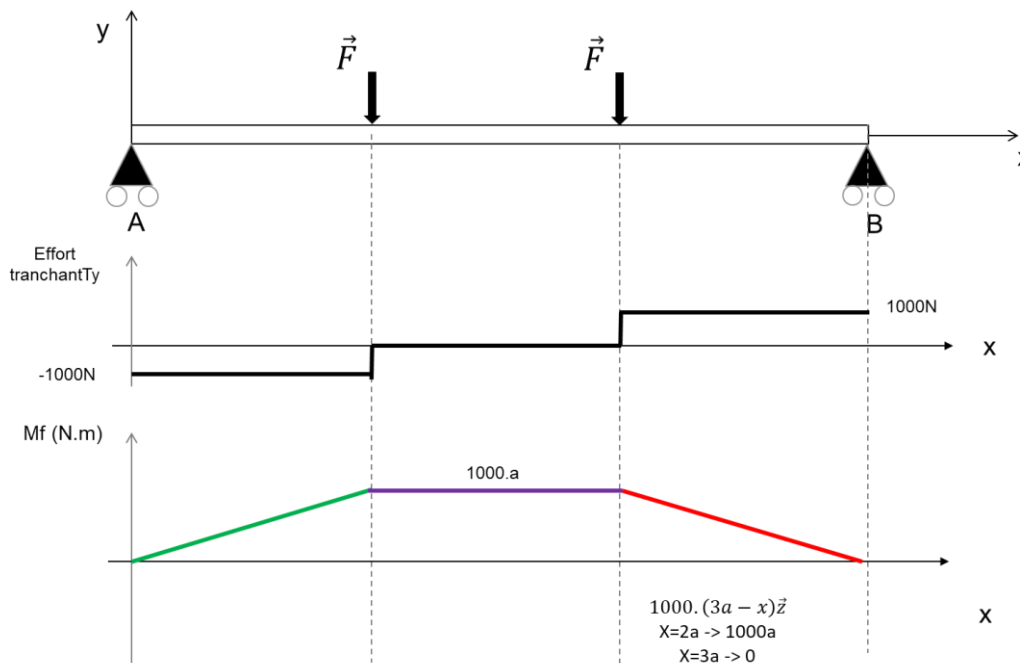
$$\begin{cases} \vec{R} = 1000N\vec{y} \\ \text{G3} \vec{M} = 1000 \cdot (3a - x)\vec{z} \end{cases}$$



3/ On parle de flexion 4 points : 2 points d'appui et deux forces.

Effort normal :  $N=0$  sur toute la poutre.

La flexion 4 points permet d'obtenir un état de flexion pure : entre les deux efforts, on a qu'un moment fléchissant et pas d'effort tranchant. On utilise souvent ce genre de montage pour solliciter des éprouvettes en flexion pure (assemblages soudés.....)



#### 4. Poutre sur deux appuis, charge linéique croissante

1/ Soit a le coefficient directeur de la charge linéique  $p(x)$ . Par définition,

$$P = \int_0^L p(x) dx = \int_0^L a \cdot \frac{x}{L} dx$$

Donc

$$P = \frac{aL}{2}$$

Donc

$$a = \frac{PL}{2}$$

Donc

$$p(x) = \frac{2Px}{L^2}$$

2/ PFS. Somme des forces :  $X_A = 0$  et  $Y_A + Y_B - P = 0$

Moment M dû à la charge linéique

$$M = \int_0^L x \cdot p(x) dx = \frac{2PL}{3}$$

Donc somme des moments en A :

$$-\frac{2PL}{3} + Y_B \cdot L = 0$$
$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_B = \frac{2P}{3} \\ Y_A = \frac{P}{3} \end{cases}$$

3/ Efforts internes. Pour tout x le long de la poutre :

Effort normal

$$N(x) = 0$$

Effort tranchant

$$V(x) = \frac{2P}{3} - \int_x^L \frac{2Px}{L^2} dx = \frac{2P}{3} - \frac{2P}{L^2} \cdot \left[ \frac{x^2}{2} \right]_x^L = \frac{2P}{3} - \frac{P}{L^2} \cdot (L^2 - x^2)$$
$$V(x) = -\frac{P}{3} + \frac{Px^2}{L^2}$$

Moment fléchissant

Dans une section d'abscisse a le long de la poutre, le moment fléchissant a pour expression :

$$M = Y_B(L - a) - \int_a^L (x - a) \cdot \frac{2Px}{L^2} dx = \frac{Pa}{3} - \frac{Pa^3}{3L^2}$$

Donc dans une section d'abscisse x,

$$M = \frac{Px}{3} - \frac{Px^3}{3L^2}$$

Remarque : on a bien

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{P}{3} - \frac{Px^2}{L^2} = -V(x)$$

Le moment fléchissant est maximal lorsque  $V(x)$  est nul :

$$V(x) = -\frac{P}{3} + \frac{Px^2}{L^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot L$$

$$M_{max} = \frac{2\sqrt{3}}{27} PL \approx 0,1283 \cdot PL$$

## 5. Poutre isostatique, effort dévié [2]

PFS

$$X_A = -100N$$

$$Y_A = -100N$$

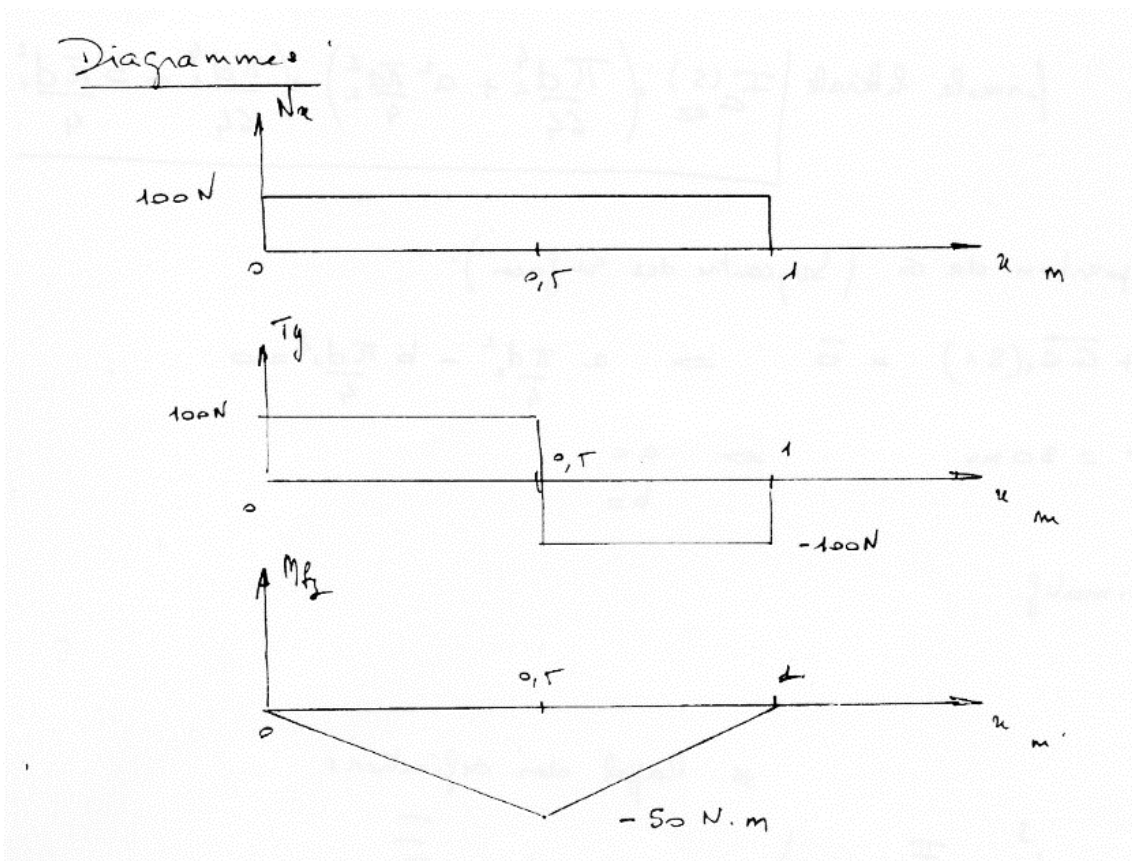
$$Y_B = 200N$$

Entre A et B

$$\begin{cases} 100N\vec{x} + 100N\vec{y} \\ -100 \cdot x \cdot \vec{z} \end{cases}$$

Entre B et C

$$\begin{cases} 100N\vec{x} - 100N\vec{y} \\ -100 \times (1-x) \cdot \vec{z} \end{cases}$$



**Torseur de cohésion**

\* Rappel des définitions

\* Notion de coupure paramétrage

On isole la poutre calcul des Actions extérieures

⊕ Problème plan, poids négligés

bilan des actions :

- [ext → poutre] A liaison pivot
 
$$\begin{cases} \vec{R}_A = x_A \vec{e}_1 + y_A \vec{e}_2 \\ \vec{\Pi}_A = \vec{0} \end{cases}$$
- [ext → poutre] B pondérale
 
$$\begin{cases} \vec{R}_B = y_B \vec{e}_2 \\ \vec{\Pi}_B = \vec{0} \end{cases}$$
- [F → poutre] C
 
$$\begin{cases} 100 \text{ N} \vec{e}_2 - 100 \text{ N} \vec{e}_1 \\ \vec{0} \end{cases}$$

théorème résultante :  $\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_A = -100 \text{ N} \\ y_A = -100 \text{ N} \end{cases}$

théorème moments :  $\vec{AB} \wedge \vec{R}_B + \vec{AC} \wedge \vec{F} + \vec{AA} \wedge \vec{R}_A = \vec{0} \Rightarrow y_B = +200 \text{ N}$

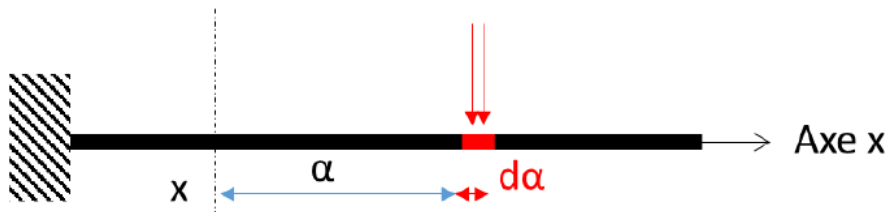
calcul Torseurs de cohésion

$x \in AB$  on isole (I) Torseur cohésion =  $-\left[ \text{Ext} \rightarrow \text{I} \right]$

$x \in BC$  on isole (II) Torseur de cohésion =  $+\left[ \text{Ext} \rightarrow \text{II} \right]$

## 6. Moment fléchissant dû à une charge linéique constante

Dans la section d'abscisse  $x$ , la force  $q \cdot d\alpha$  à la distance  $\alpha$  de la section  $x$  exerce le moment  $-\alpha \cdot q \cdot d\alpha$ .

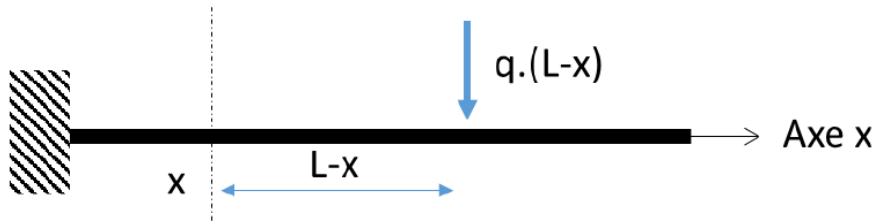


Il faut maintenant sommer (intégrer) l'ensemble entre 0 et  $L-x$

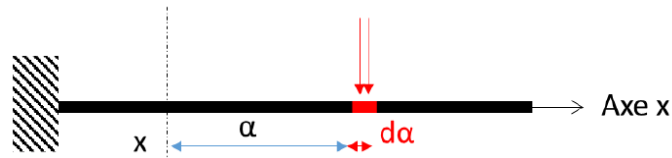
$$M = \int_0^{L-x} -\alpha \cdot q \cdot d\alpha = \left[ -q \cdot \frac{\alpha^2}{2} \right]_0^{L-x}$$

$$M(x) = -q \cdot \frac{(L-x)^2}{2}$$

Ce moment correspond à l'application d'une charge ponctuelle d'intensité  $q \cdot (L-x)$  appliquée à la distance  $(L-x)/2$  de la section d'abscisse  $x$ .



## 7. Moment fléchissant dû à une charge linéique non constante



Dans une section d'abscisse  $x$ , calculons le moment fléchissant dû à la charge en  $x+\alpha$ .

La charge linéique vaut dans la section d'abscisse  $x+\alpha$  :

$$q_0 \cdot \frac{x + \alpha}{L}$$

Appliquée sur la distance  $d\alpha$ , la force obtenue est  $q_0 \cdot \frac{x+\alpha}{L} \cdot d\alpha$

Cette force applique un moment  $dM$  à la section d'abscisse  $x$  avec le bras de levier  $\alpha$  tel que :

$$dM = -\alpha \cdot q_0 \cdot \frac{x + \alpha}{L} \cdot d\alpha$$

Le moment fléchissant total est donc

$$M = \int_0^{L-x} -\alpha \cdot q_0 \cdot \frac{x + \alpha}{L} \cdot d\alpha$$

$$M = \frac{q_0}{L} \cdot (L - x)^2 \cdot \left( -\frac{x}{2} - \frac{L - x}{3} \right)$$

### Remarques

- Pour  $x=0$ ,  $M = -\frac{q_0}{3} \cdot L^2$  on retrouve l'application d'une force d'intensité  $\frac{q_0 L}{2}$  (aire du triangle), exercée au centre de gravité du triangle, soit en  $x = \frac{2}{3}L$
- Pour  $x=L$ , on a bien  $M=0$ .

## 8. Moment fléchissant, poutre sur deux appuis, charge linéique variable

En un point d'abscisse  $x$  compris entre  $x = 0$  et  $x = \frac{L}{2}$ , le moment fléchissant a pour expression :

$$M(x) = \frac{qL}{4} \cdot x - \frac{x}{3} \cdot \frac{qx}{2}$$

Le moment fléchissant est maximal en  $L/2$

$$M_{max} = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{qL}{4} \cdot \frac{L}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{qL}{2} = \frac{qL^2}{8} - \frac{qL^2}{24}$$

$$M_{max} = \frac{qL^2}{12}$$

## 9. Poutre en flexion : influence de la position de l'appui

1/ Principe Fondamental de la Statique

$$Y_A + Y_B - q \cdot L = 0$$

$$Y_B \cdot a - q \cdot \frac{L^2}{2} = 0$$

Donc

$$Y_B = q \cdot \frac{L^2}{2a}$$

$$Y_A = -Y_B + qL = q \cdot \frac{L^2}{2a} + qL = \frac{-qL^2 + 2qLa}{2a} = qL \cdot \frac{(-L + 2a)}{2a}$$

2/

$$Y_A'(x) = qL \cdot \frac{4a - 2(2a - L)}{4a^2} = qL \cdot \frac{2L}{4a^2}$$

Pour tout x de I,  $Y_A'(x) > 0$  donc la fonction g est strictement croissante

$$\lim_{x \rightarrow 0, 2L} Y_A = -\frac{3qL}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow L} g(x) = \frac{qL}{2}$$

3/

$$Y_B = q \cdot \frac{L^2}{2a}$$

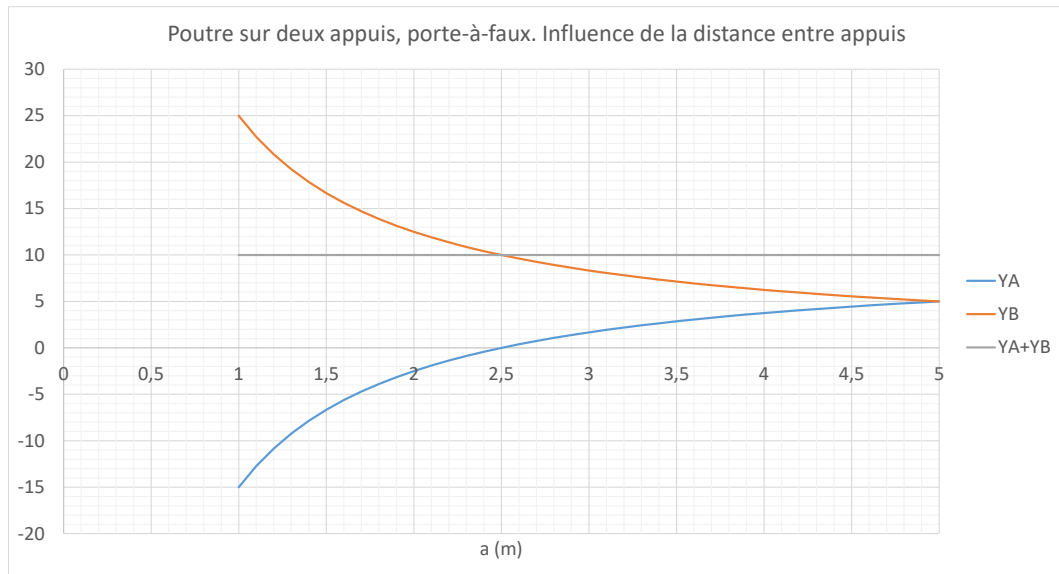
$$Y_B'(a) = -\frac{qL^2}{2} \cdot \frac{1}{a^2}$$

Pour tout x de I,  $Y_B'(a) < 0$  donc la fonction  $Y_B$  est strictement décroissante

$$\lim_{x \rightarrow 0, 2L} f(x) = \frac{qL}{0,4} = 2,5qL$$

$$\lim_{x \rightarrow L} f(x) = \frac{qL}{2}$$

4/



## 10. Poutre sur deux appuis avec charge linéique variable

Principe Fondamental de la Statique

$$X_A = 0$$

$$Y_A + Y_B - \frac{q_0 L}{2} = 0$$

Somme des moments en A : soit  $M_q$  le moment dû à la charge linéique

$$Y_B \cdot L + M_q = 0$$

$$M_q = - \int_0^L \left( q_0 - q_0 \cdot \frac{x}{L} \right) \cdot x \cdot dx = - \int_0^L \left( q_0 \cdot x - q_0 \cdot \frac{x^2}{L} \right) dx$$

$$M_q = - \left[ q_0 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{q_0}{L} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^L = -q_0 \cdot \frac{L^2}{2} + \frac{q_0}{L} \cdot \frac{L^3}{3} = -q_0 \cdot L^2 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

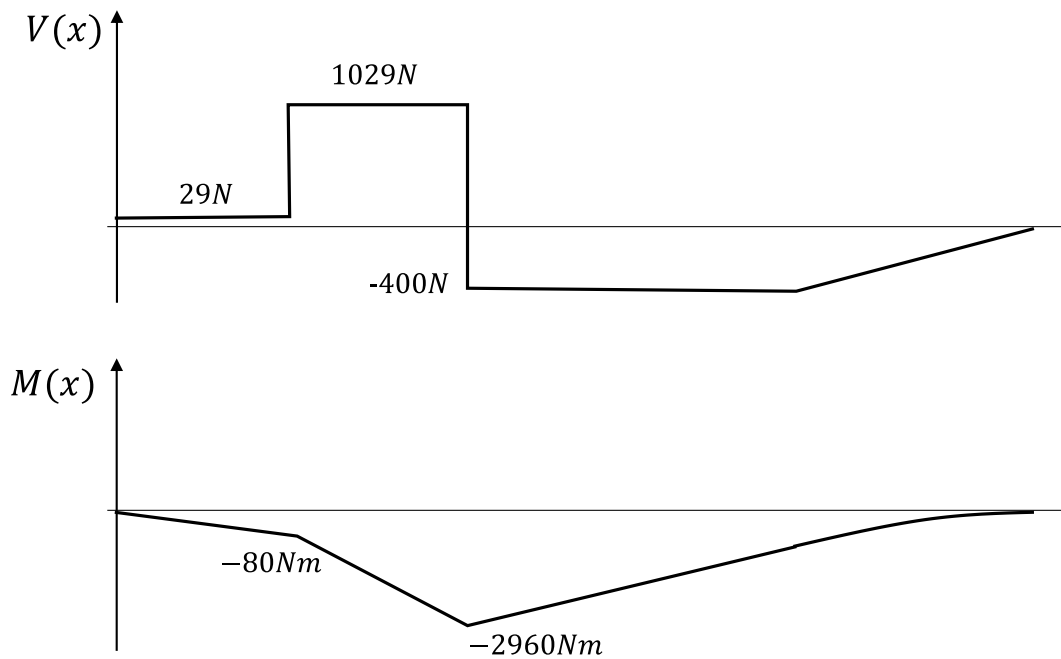
$$M_q = -q_0 \cdot L^2 \cdot \frac{1}{6} = -q_0 \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot L$$

On retrouve le moment dû à une charge ponctuelle d'intensité  $q_0 \cdot \frac{L}{2}$  appliquée au centre de gravité du triangle donc appliquée en  $L/3$ .

$$Y_B = q_0 \cdot L \cdot \frac{1}{6}$$

$$Y_A = -q_0 \cdot L \cdot \frac{1}{6} + \frac{q_0 L}{2} = q_0 \cdot L \cdot \frac{2}{6}$$

## 11. Poutre isostatique avec porte-à-faux



## 12. Portique

Le portique est isostatique.

PFS

$$X_A + 5 = 0$$

$$Y_A + Y_D + 2 = 0$$

- Somme des moments en A

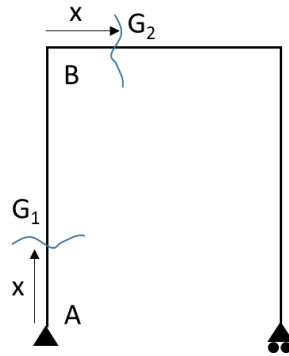
Le moment en A, dû à la force  $\vec{F}$  appliquée en C, a pour expression, dans le repère global :

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{M}_C(\vec{F}) + \vec{AC} \wedge \vec{F} = \vec{0} + \begin{pmatrix} L \\ H \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2L - 5H \end{pmatrix}$$

Somme des moments en A suivant l'axe Z :

$$Y_D \cdot L + 2L - 5H = 0$$

$$\begin{cases} X_A = -5 \text{ kN} \\ Y_D = \frac{5H}{L} - 2 \\ Y_A = -\frac{5H}{L} \end{cases}$$



- Partie AB

Soit  $G_1$  d'abscisse  $x$  sur la partie AB.

$$\overline{M}_{G_1}(\vec{F}) = \overline{M}_C(\vec{F}) + \overline{G_1C} \wedge \vec{F} = \vec{0} + \begin{pmatrix} L \\ H-x \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2L - 5(H-x) \end{pmatrix}$$

$$\overline{M}_{G_1}(Y_D) = \overline{M}_D(Y_D) + \overline{G_1D} \wedge Y_D \cdot \vec{Y} = \vec{0} + \begin{pmatrix} L \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ Y_D \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Y_D L \end{pmatrix}$$

$$M = 2L - 5(H-x) + Y_D L = 5x$$

- Partie BC

Soit  $G_2$  d'abscisse  $x$  sur la partie BC.

$$\overline{M}_{G_2}(\vec{F}) = \overline{M}_C(\vec{F}) + \overline{G_2C} \wedge \vec{F} = \vec{0} + \begin{pmatrix} L-x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2(L-x) \end{pmatrix}$$

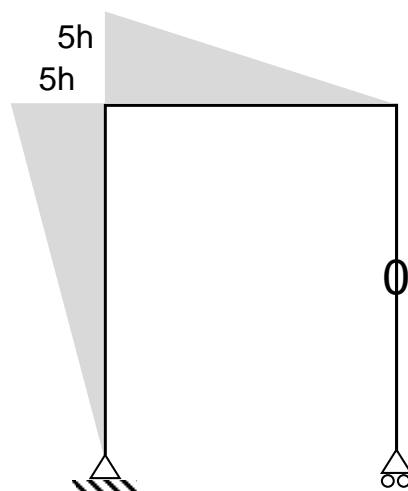
$$\overline{M}_{G_2}(Y_D) = \overline{M}_D(Y_D) + \overline{G_2D} \wedge Y_D \cdot \vec{Y} = \vec{0} + \begin{pmatrix} L-x \\ -H \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ Y_D \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Y_D(L-x) \end{pmatrix}$$

Le moment fléchissant a donc pour expression

$$M = 2(L-x) + Y_D(L-x) = \frac{5H}{L}(L-x)$$

- Partie CD

$$M = 0$$



## Références Bibliographiques

- [1] Espitallier, *Le Béton armé, systèmes généraux et calcul des ouvrages en béton armé*. Paris, 1906.
- [2] T. Bouche, « Polycopié de mécanique PTSI-PT - Centre Charles de Foucauld - Angers ». 2001.