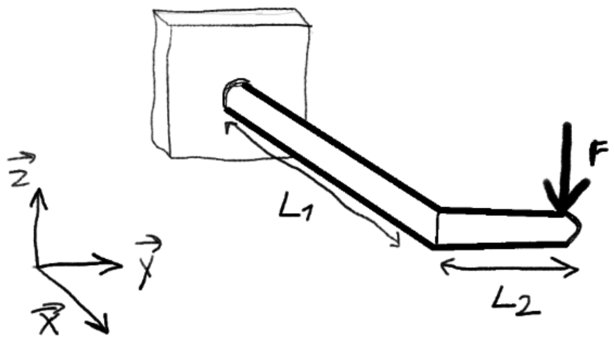
Exercices corrigés de Résistance des Matériaux

Principe fondamental de la statique, efforts, moments

1. Moment d'une force

Soit une poutre encastrée dans un mur au point B(0 ;0 ;0) et soumise à une force $\vec{F} = -F.\vec{z}$ appliquée en A (L_1 ;L_2 ;0).



Déterminer en B le moment de la force $\vec{F}$ exercée en A.

Voir la correction

2. Solide soumis à un système de forces

Partie 1 : solide soumis à deux forces

Soient 2 forces $\overrightarrow{F_A}$ et $\overrightarrow{F_B}$ appliquées aux points A et B d'un solide à l'équilibre.

En écrivant le principe fondamental de la statique, que peut-on dire de ces deux forces ?

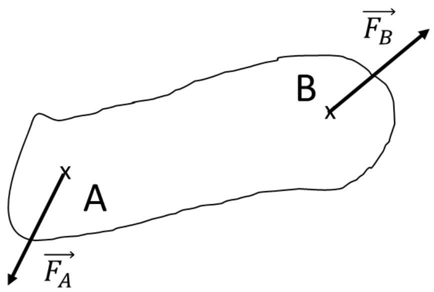


Figure 1. Solide soumis à un système de forces

Partie 2 : solide à l'équilibre soumis à trois forces

Soient 3 forces $\overrightarrow{F_A}$, $\overrightarrow{F_B}$ et $\overrightarrow{F_C}$ appliquées aux points A, B et C d'un solide à l'équilibre.

En écrivant le principe fondamental de la statique, que peut-on dire de ces trois forces ?

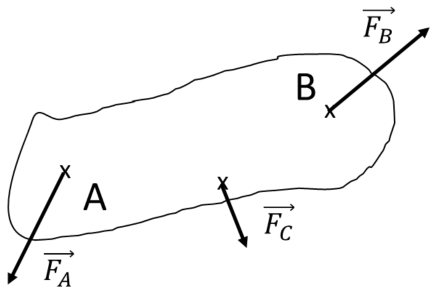


Figure 2. Solide soumis à un système de forces

[Solide soumis à un système de forces]

3. Porte coulissante

Soit une poutre coulissante composée d'un panneau 1 de poids $\vec{P}$ (P=3000 N) dont les dimensions sont 3000x5000, de deux galets 2 et 3 et d'un rail 5.

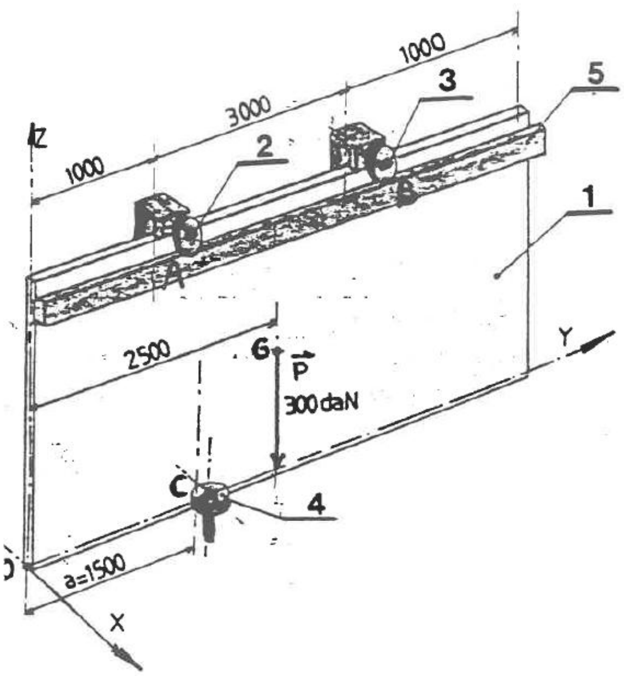
Les dimensions sur le plan sont en mm.

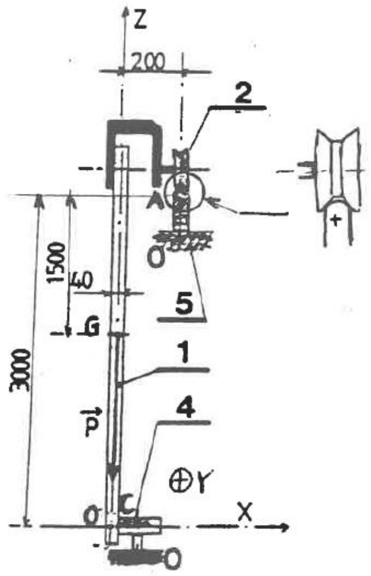
On néglige l'épaisseur de la porte dans les calculs de moments.

La porte est en appui en A et B sur le rail 5 par l'intermédiaire des galets 2 et 3. Le rail est scellé dans le mur 0. L'ensemble coulisse librement le long du rail posé horizontalement.

La stabilité de la porte est assurée par le galet 4. L'axe de ce galet, vertical, est scellé dans la sol 0. Le contact avec le panneau est effectué en C.

On suppose que les liaisons sont sans frottement. La résistance au roulement des galets est négligée.





Q1/ Calculer le degré d'hyperstaticité du problème

Q2/ Déterminer les actions mécaniques s'exerçant sur la porte

[Voir la correction]

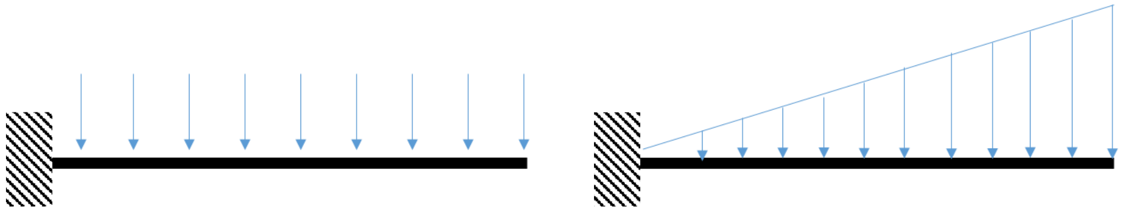
4. Effort total dû à une charge répartie

Soient deux poutres de longueur L, d'axe x, encastrées à une extrémité.

L'une est soumise à un effort linéique constant q tout le long de la poutre.

L'autre est soumise à un effort linéique tel que q=a.x avec a constante réelle positive et x=0 au niveau de l'encastrement.

Déterminer l'expression de l'effort total F appliqué sur les deux poutres.

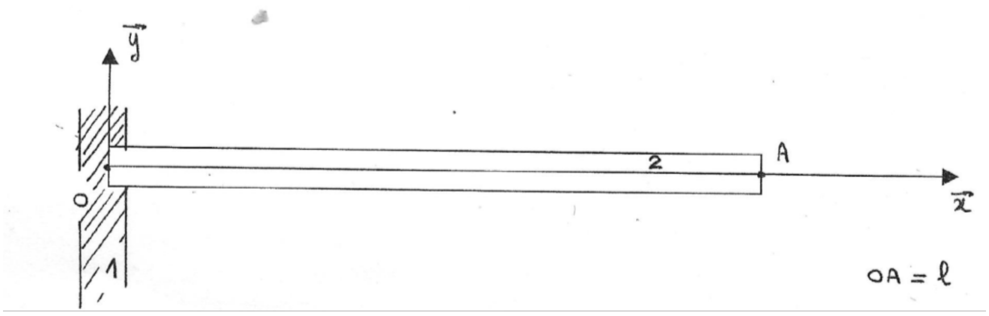


Voir la correction

5. Poutre soumise à son propre poids

La poutre a une section carrée de côté h.

Déterminer le torseur des actions de pesanteur en O (résultante et moment en O)



Voir la correction

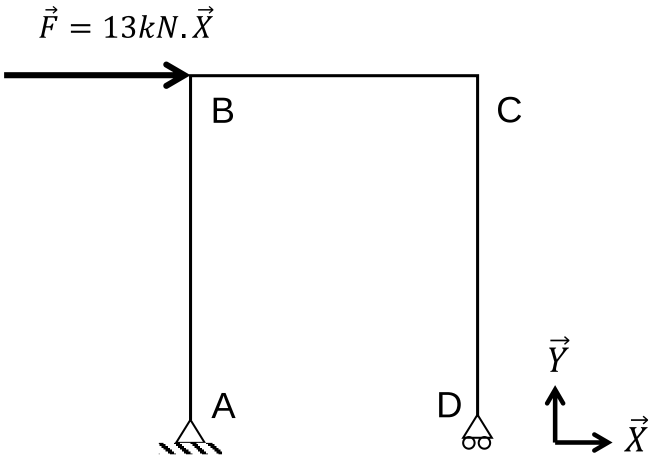
6. Portique

Soit le portique isostatique ci-dessous, de longueur L et de hauteur H.

La liaison en A est un appui (réaction en X et Y).

La liaison en D est un appui glissant (réaction en Y, déplacement possible en X).

Déterminer les réactions de liaison en A et D.



Voir la correction

Corrections

1. Moment d'une force

Moment en B dû à la force $\vec{F}$ en A

$$\overrightarrow{M_B}(\vec{F}) = \overrightarrow{M_A}(\vec{F}) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$$

Or le moment en A dû à la force en A est nul : $\overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \vec{0}$ donc

$$\boxed{\overrightarrow{M_B}(\vec{F}) = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F.L_2 \\ F.L_1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

2. Solide soumis à un système de forces

Partie 1

A l'équilibre on a :

$$\overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} = \vec{0} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_B} = \vec{0} \qquad (2)$$

(1) indique que $\overrightarrow{F_A}$ et $\overrightarrow{F_B}$ ont une même direction, une même amplitude et des sens opposés.

(2) indique que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{F_B}$ ont même direction, donc la force $\overrightarrow{F_B}$ a pour direction la droite AB.

Finalement, les deux forces ont pour direction la droite AB. Elles ont même norme et sont de sens opposé.

Partie 2

Soit un solide à l'équilibre soumis à 3 forces appliquées en A, B et C, le PFS donne :

$\overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} + \overrightarrow{F_C} = \vec{0}$ (1)

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_B} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{F_C} = \vec{0}$ (2)

Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_B}$ est normal au plan $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{F_B})$. Le vecteur $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{F_C}$ est normal au plan $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{F_C})$.

(2) montre que ces vecteurs sont opposés donc les forces $\overrightarrow{F_B}$ et $\overrightarrow{F_C}$ sont dans le plan ABC.

(1) montre que la force $\overrightarrow{F_A}$ est également dans ce plan. Donc les <u>3 forces sont coplanaires</u>.

Si $\overrightarrow{F_B}$ et $\overrightarrow{F_C}$ ne sont pas parallèles. Soit I leur point d'intersection. L'équation du moment statique écrite en I montre que le support de la force $\overrightarrow{F_A}$ passe également par I. Donc les 3 forces sont concourantes.

Si $\overrightarrow{F_B}$ et $\overrightarrow{F_C}$ sont parallèles, alors (1) montre que $\overrightarrow{F_A}$ est parallèle aux deux autres. Les 3 forces sont parallèles.

Pour conclure, si un solide est en équilibre sous l'action de 3 forces, ces forces sont :

- Coplanaires (dans un même plan)
- concourantes en un même point ou parallèles
- de somme vectorielle nulle

3. Porte coulissante

Q1/ Bilan des actions extérieures sur S

$$[Poids \to S]_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix}$$

$$[Rail \to S]_A = \begin{pmatrix} X_A \\ 0 \\ Z_A \end{pmatrix}$$

$$[Rail \to S]_B = \begin{pmatrix} X_B \\ 0 \\ Z_B \end{pmatrix}$$

$$[Galet\ 4 \to S]_B = \begin{pmatrix} X_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5 inconnues et 6 équations (on est dans l'espace)

D=-1, système hypostatique car la porte est libre en Y

Q2/ On isole le portail + galets 2 et 3. S = {portail + galets 2 et 3}.

Le système à l'équilibre donc selon le principe fondamental de la statique :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Donc

$$X_A + X_B + X_C = 0$$

$$Z_A + Z_B - P = 0$$

De plus,

$$\sum \vec{M} = \vec{0}$$

Donc somme des moments en A =0.

Moment en A dû à l'action du rail en B :

$$\vec{M}_A(rail\ en\ B) = \vec{M}_B(rail\ en\ B) + \overrightarrow{AB} \wedge \begin{pmatrix} X_B \\ 0 \\ Z_B \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_B(rail\ en\ B) = \vec{0}$$

$$\vec{M}_A(rail\ en\ B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_B \\ 0 \\ Z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3Z_B \\ 0 \\ -3X_B \end{pmatrix}$$

Moment en A dû à l'action du galet 4 en C :

$$\vec{M}_A(galet\ 4) = \vec{M}_B(galet\ 4) + \overrightarrow{AC} \wedge \begin{pmatrix} X_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.5 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3X_C \\ -0.5X_C \end{pmatrix}$$

Moment en A dû au poids :

$$\vec{M}_A(poids) = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5P \\ -0.2P \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$3Z_B - 1.5P = 0$$
$$-3X_C - 0.2P = 0$$
$$-3X_B - 0.5X_C = 0$$

Finalement,

$$Z_B = 0.5P = 1500N$$
$$Z_A = -Z_B + P = 1500N$$
$$X_C = -\frac{0.2}{3}P = -200N$$
$$X_B = -\frac{0.5X_C}{3} = \frac{0.5}{3}.\frac{0.2}{3}P = 33N$$
$$X_A = -X_B - X_C = -33 + 200 = 167N$$

4. Effort total dû à une charge répartie

Effort q constant :

$$F = \int_0^L q.dx = q.L$$

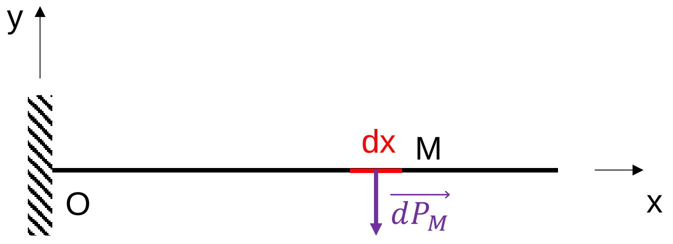
Effort q tel que q=a.x avec a constante

$$F = \int_0^L a.x.dx = a.\frac{L^2}{2}$$

5. Poutre soumise à son propre poids

Poids d'une section de poutre élémentaire de longueur dx, volume dV_M, en M :

$$\overrightarrow{dP_M} = -dV_M.\rho.g.\vec{y} = -\rho.g.h^2.dx.\vec{y}$$



Soit $[Actions\ pesanteur]_O$ le torseur des actions de pesanteur en O :

$$[Actions\ pesanteur]_O = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_0} \\ \overrightarrow{M_0} \end{Bmatrix}$$

Avec

$$\overrightarrow{R_0} = \int_0^L \overrightarrow{dP_M} = -\rho.g.h^2 \int_0^L dx.\vec{y}$$

$$\boxed{\overrightarrow{R_0} = -\rho.g.h^2.L.\vec{y}}$$

$$\overrightarrow{M_0} = \int_0^L \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dP_M} = \int_0^L \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho.g.h^2.dx \\ 0 \end{pmatrix} = -\rho.g.h^2 \int_0^L x.dx\,.\vec{z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{M_0} = -\rho.g.h^2.\frac{L^2}{2}.\vec{z}}$$

On retrouve la résultante et le moment d'une charge linéique de valeur $-\rho.g.h^2$.

6. Portique

PFS

$$X_A + 13 = 0$$

$$Y_A + Y_D = 0$$

$-13.H + Y_D.L = 0$ (Somme des moments en A) donc

$$Y_D = 13.\frac{H}{L}$$

Références Bibliographiques

[1], [2]

[1] T. Bouche, « Polycopié de mécanique PTSI-PT - Centre Charles de Foucauld - Angers ». 2001.

[2] Y. Brémont et P. Réocreux, *Mécanique du solide indéformable: statique cours et exercices résolus classes préparatoires aux grandes écoles, MPSI, PTSI, PSI, PSI*, MP, MP*, PT, PT*, premier cycle universitaire*. in Mécanique, no. 2. Paris: Ellipses, 1996.