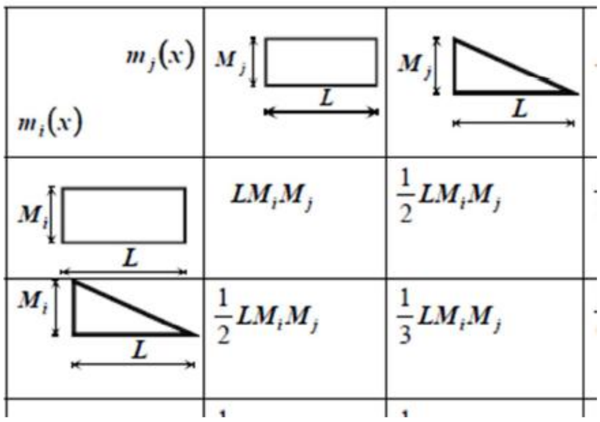
Exercices corrigés de Résistance des Matériaux

Méthodes énergétiques

1. Exercice : tableau des intégrales de Mohr

Retrouver les résultats donnés dans le tableau ci-dessous

$$\int m_j(x).m_i(x)$$

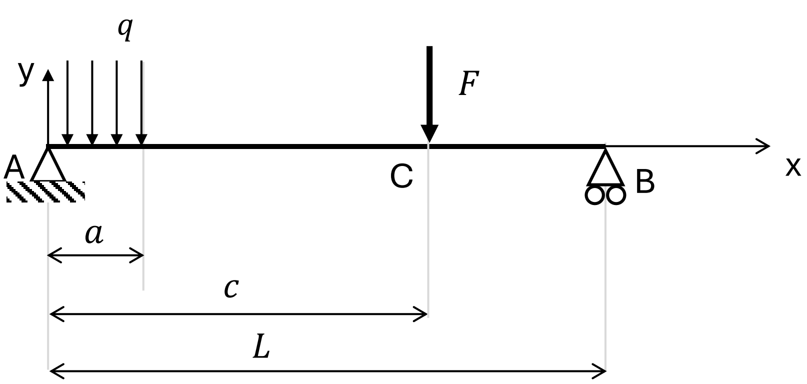


[Voir la correction](#)

2. Exercice : flèche d'une poutre sur deux appuis

Soit la poutre ci-dessous, de moment d'inertie I et de module d'élasticité E.

La poutre est articulée en A et simplement appuyée en B.



1/ Calculer les réactions aux appuis en A et B

2/ Exprimer le moment fléchissant $M(x)$ le long de la poutre et tracer le diagramme correspondant

3/ Calculer le déplacement vertical du point C par le théorème de la charge unitaire

Données

$$E = 210\,000\ MPa; I = 8\,000\ cm^4; F = 100N; q = 50\ N/m; c = 3m; L = 4m; a = 0{,}5m$$

Voir la correction

3. Exercice : flèche d'une poutre console

La flèche maximale δ d'une poutre console sollicitée par une force F à son extrémité a pour expression :

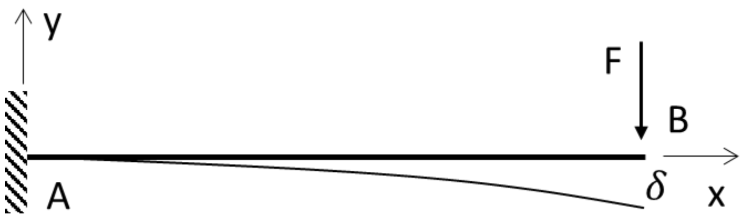
$$\delta = -\frac{FL^3}{3EI}$$

L : longueur de la poutre ; E : module d'Young et I : moment quadratique

Q1/ Retrouver ce résultat à l'aide de la formule $M_f(x) = EIy''(x)$

Q2/ Retrouver ce résultat par le théorème de la charge unitaire

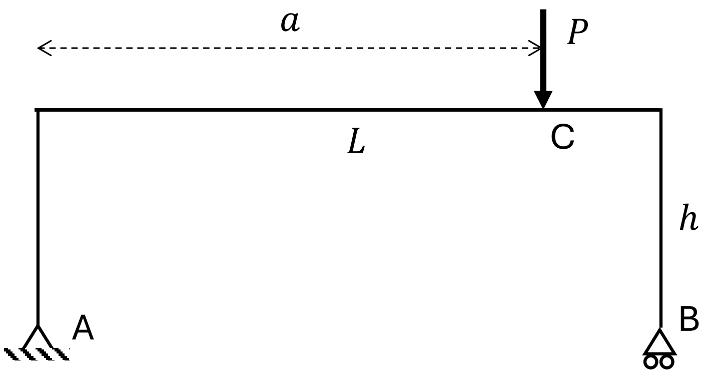
Q3/ Retrouver ce résultat par la méthode des déplacements



Voir la correction

4. Exercice : portique isostatique

Soit le portique ACB, articulé en A et simplement appuyé en B. Une force P est appliquée en C.



Questions

1/ Calculer les réactions aux appuis en A et B

2/ Donner l'expression du moment $M(x)$ pour toute section du portique

3/ Tracer le diagramme du moment fléchissant $M(x)$

4/ Déterminer le déplacement horizontal du point B.

Données

- Module d'élasticité constant $E = 210\,000\ MPa$
- Moment d'inertie constant $I = 8\,000\ cm^4$
- $h = 3m$
- $L = 5m$
- $a = 4m$
- $P = 10\ kN$

Voir la correction

Corrections

1. Tableau des intégrales de Mohr

Case 11 : Deux rectangles

$$\int m_j(x).m_i(x) = \int_0^L M_i.M_j dx = M_i.M_j.[x]_0^L = Mi.Mj.L$$

Case 21 et Cas 12 : un triangle et un rectangle

$$\int M_j.M_i.\left(1-\frac{x}{L}\right)dx = M_i.M_j.\left[x-\frac{x^2}{2L}\right]_0^L = M_i.M_j.\left(L-\frac{L^2}{2L}\right) = \frac{1}{2}.L.M_i.M_j$$

Case 22 : deux triangles dans le même sens

$$\int m_j(x).m_i(x) = \int_0^L M_i.\left(1-\frac{x}{L}\right)M_j\left(1-\frac{x}{L}\right)dx = M_i.M_j.\int_0^L\left(1-\frac{2x}{L}+\frac{x^2}{L^2}\right)dx$$

$$\int m_j(x).m_i(x) = M_i.M_j.\left[x-\frac{x^2}{L}+\frac{x^3}{3L^2}\right]_0^L = M_i.M_j.\left(L-L+\frac{1}{3}.L\right) = \frac{1}{3}.L.M_i.M_j.$$

2. Exercice : flèche d'une poutre sur deux appuis

1/

$$Y_B = \frac{F.c+q.\frac{a^2}{2}}{L} = \frac{300+\frac{50}{8}}{4} = 76{,}6\ N$$

$$Y_A = 48{,}4\ N$$

$$X_A = 0$$

2/

Pour x entre 0 et a

$$M = Y_A.x - \frac{qx^2}{2} = 48{,}4x - 25x^2$$

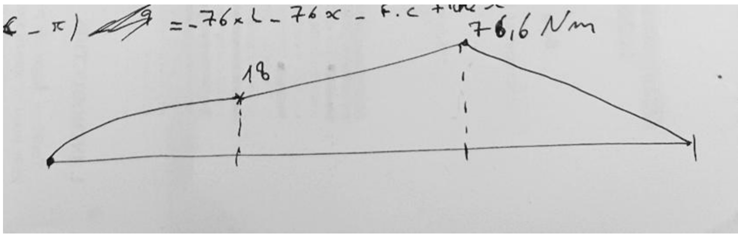
Pour x entre a et c

$$M = Y_B(L-x) - F(c-x)$$

$$M = 23.43x + 6.25$$

Pour x entre c et L

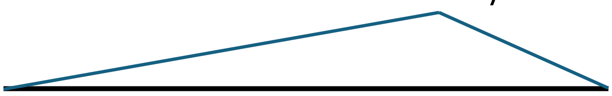
$$M = Y_B(L-x) = -76.6x + 306.25$$

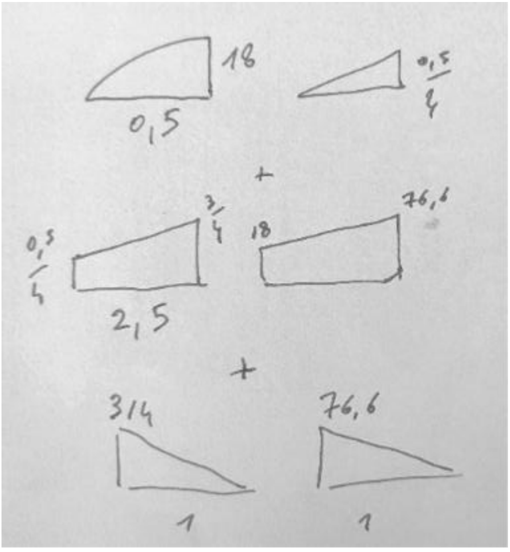


3/

$$u = \int \frac{M_0 M_1}{EI} ds$$

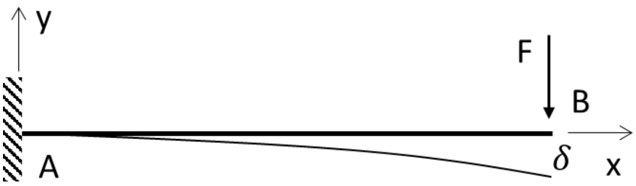
M1





$$u = 4{,}7e - 6\ m$$

3. Flèche d'une poutre console



Q1/ Par la loi de comportement de la poutre en flexion

$$M_f(x) = EIy''(x)$$

Or

$$M_f(x) = -F.(L - x)$$

Par intégration on obtient

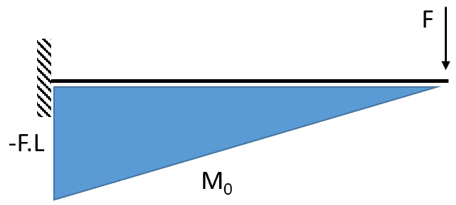
$$y(x) = -\frac{F}{6EI}.x^2.(3L - x)$$
$$\delta = y(L)$$

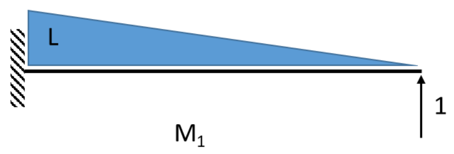
On a bien

$$\boxed{\delta = -\frac{FL^3}{3EI}}$$

Q2/ Par le théorème de la charge unitaire

On applique une charge unitaire au point où l'on cherche le déplacement.





$$\delta = \frac{\partial W}{\partial F} = \int_0^L \frac{1}{EI}.M_0 M_1 dx$$

E et I sont constants entre 0 et L donc :

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{1}{EI}\int_0^L M_0 M_1 dx = \frac{1}{EI}.\frac{1}{3}.L.(-FL)(L)$$

$$\boxed{\delta = -\frac{FL^3}{3EI}}$$

Q3/ Par la méthode des déplacements

Soient A le point d'encastrement, B l'extrémité de la poutre et S la section de la poutre.

Encastrement en A donc pas de degrés de liberté en A : $u_{XA} = 0$; $u_{YA} = 0$; $\omega_A = 0$

Hypothèse de longueur de poutre invariante : $u_{xB} = 0$.

$$\begin{pmatrix} X_{AB} \\ Y_{AB} \\ M_{AB} \\ X_{BA} \\ Y_{BA} \\ M_{BA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{YB} \\ \omega_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ M_A \\ 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$Y_{BA} = \frac{12EI}{L^3}u_{YB} - \frac{6EI}{L^2}\omega_B + F$$

$$M_{BA} = -\frac{6EI}{L^2}u_{YB} + \frac{4EI}{L}\omega_B$$

Equilibre du nœud B

$$Y_{BA} = 0$$

$$M_{BA} = 0$$

L'équation pour M_{BA} donne

$$\omega_B = \frac{3}{2}.\frac{u_{YB}}{L}$$

Donc dans l'équation pour Y_{BA} on obtient :

$$\frac{12EI}{L^3}u_{YB} - \frac{6EI}{L^2}.\frac{3}{2}.\frac{u_{YB}}{L} = -F$$

$$(12EI - 9EI)u_{YB} = FL^3$$

Après arrangement des termes on a bien :

$$\boxed{u_{YB} = -\frac{FL^3}{3EI}}$$

4. Portique isostatique

1/

$$Y_A = P - \frac{Pa}{L} = \frac{P}{5}$$

$$Y_B = \frac{Pa}{L} = \frac{4P}{5}$$

$$X_A = 0$$

2/

Poteau A

$$M = 0$$

Coupure 2

$$M = P.\frac{x}{5}$$

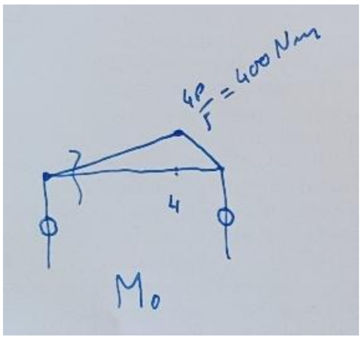
Coupure 3 pour x compris entre 4 et 5

$$M = \frac{4P}{5}.(L - x)$$

Poteau B

$$M = 0$$

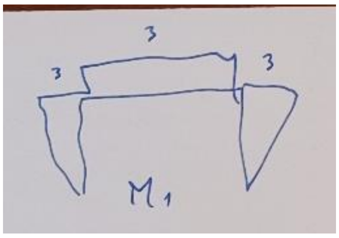
3/

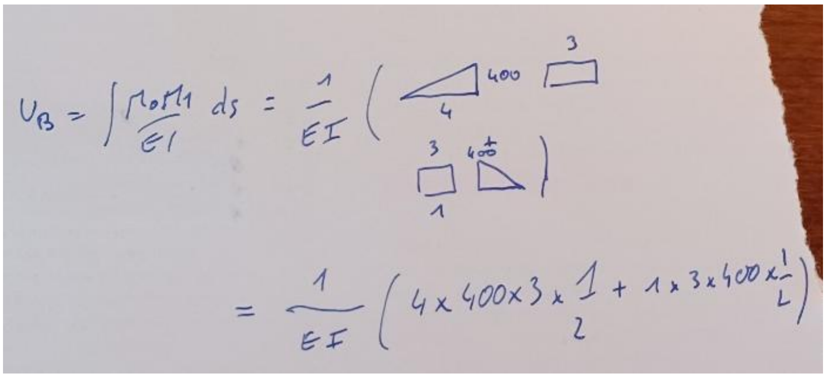


4/ Déplacement horizontal de B : théorème de la charge unitaire

$$u = \int \frac{M_0 M_1}{EI} ds$$

Diagramme M1





$$P = 10kN$$

$$u = 3{,}57mm$$