Exercice : tablier central du viaduc de Garabit, calcul d'une poutre continue

1 Introduction

Dans cet exercice on propose de dimensionner les tables horizontales du tablier central du viaduc de Garabit construit par Eiffel en 1884.

Le tablier central est une poutre continue, de trois travées sur 4 appuis numérotés de 0 à 3.

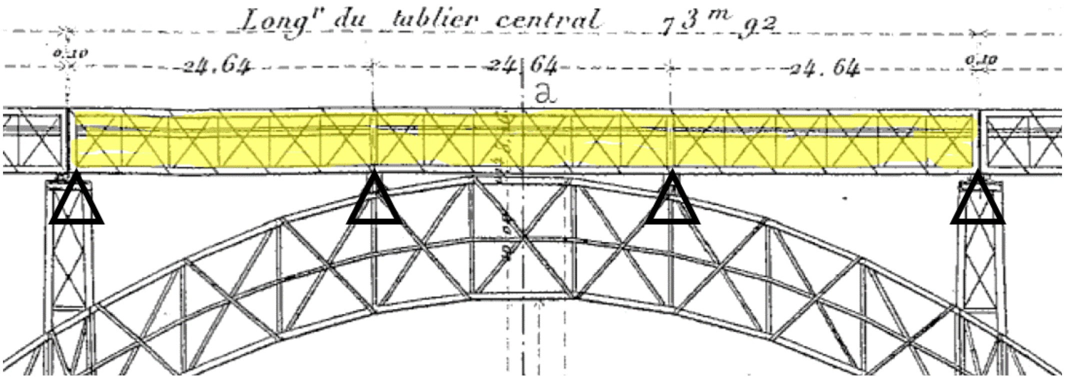


Figure 1. Tablier central (Eiffel, 1888, p. 81)

1.1 Géométrie

- Longueur totale : $73{,}920\ m$
- Longueur des trois travées : $24{,}640\ m$

1.2 Charges

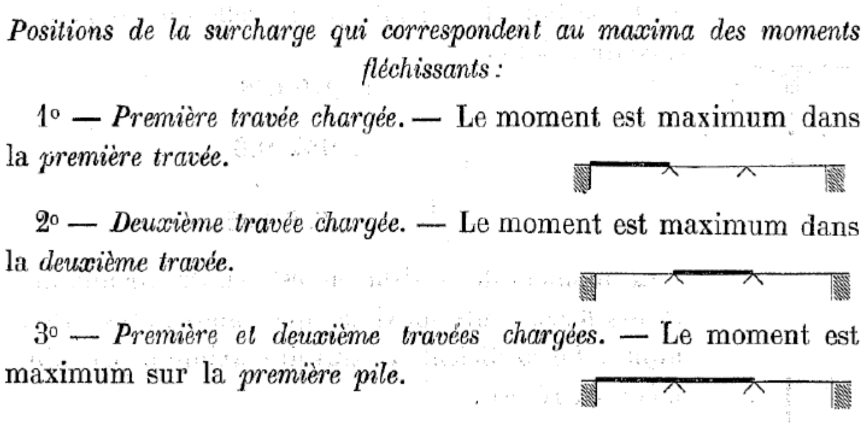
Le poids propre par mètre courant de tablier est estimé à $2900\ kg/m$ (fers 2020 kg, platelage 400 kg, bois et rails 300 kg, passerelle 180 kg). On en déduit une charge permanente de $1450\ kg/m$ par poutre.

Le poids du train est estimé à $4800\ kg/m$.

On obtient une charge totale pendant le passage du train de $4800 + 2900 = 7700\ kg/m$, soit une charge totale sur chaque poutre de $3850\ kg/m$.

	Charge travée 1 (kg/m)	Charge travée 2 (kg/m)	Charge travée 3 (kg/m)
Cas 1	3850	1450	1450
Cas 2	1450	3850	1450
Cas 3	3850	3850	1450
Cas 4	1450	1450	1450

Figure 2. Tablier central. Cas de charge


Positions de la surcharge qui correspondent au maxima des moments fléchissants :

1° — *Première travée chargée.* — Le moment est maximum dans la *première travée.*

2° — *Deuxième travée chargée.* — Le moment est maximum dans la *deuxième travée.*

3° — *Première et deuxième travées chargées.* — Le moment est maximum sur la *première pile.*

Figure 3. Tablier central. Cas de charge considérés par Eiffel

1.3 Hypothèses et démarche

Les tables horizontales, ou membrures, sont dimensionnées de façon à résister au moment fléchissant.

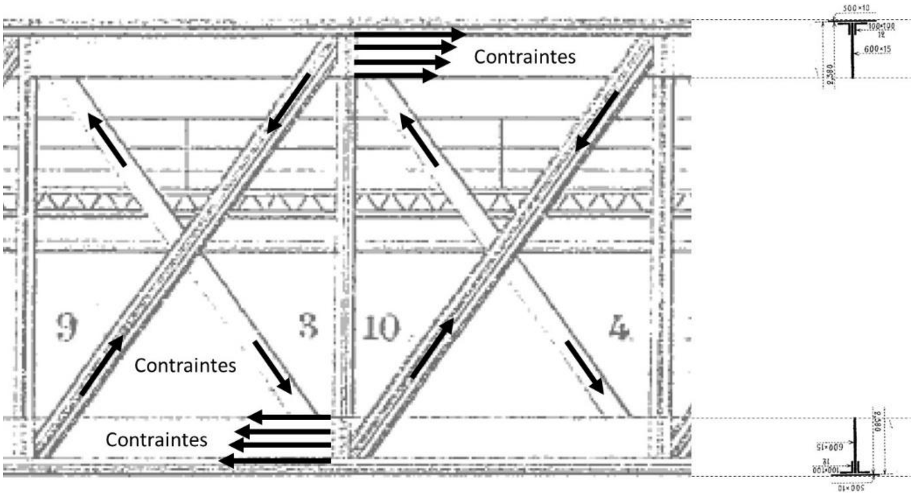


Figure 4. Représentation des contraintes de flexion dans les tables horizontales du tablier central (on a aussi représenté les efforts de traction-compression dans les barres de treillis)

1.4 Données matériaux et section des tables horizontales

La contrainte admissible du fer puddlé est de 6 kg/mm^2.

La section « par défaut » des tables horizontales est donnée ci-dessous. Cette section sera adoptée dans l'ensemble du tablier central. Elle sera renforcée, si nécessaire, dans chaque section du tablier, à l'aide de semelles supplémentaires. Le nombre et l'épaisseur des semelles seront ajustés dans chaque section pour résister au moment fléchissant. Cela permet d'utiliser la juste quantité de matière sur tout le tablier.

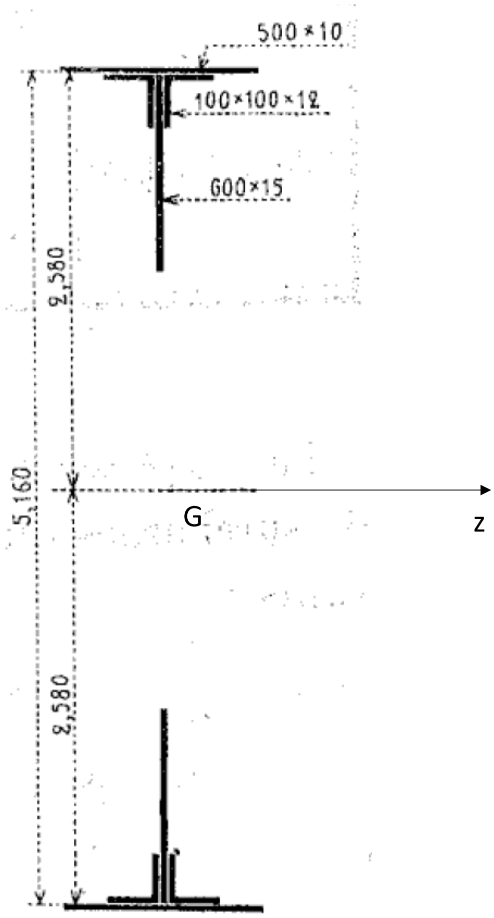


Figure 5. Tablier central. Section par défaut des tables horizontales (Eiffel, 1888, p. 81)

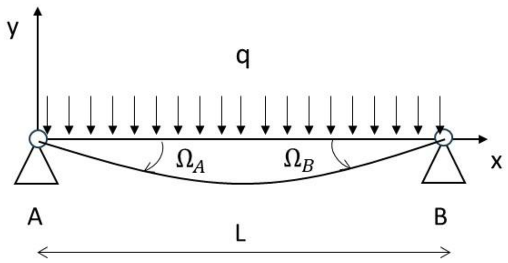
1.5 Formulaire

Théorèmes des trois moments :

$$M_{i-1}.\frac{L_i}{6EI_i} + 2M_i\left(\frac{L_i}{6EI_i} + \frac{L_{i+1}}{6EI_{i+1}}\right) + M_{i+1}\frac{L_{i+1}}{6EI_{i+1}} = \Omega_{i,d}^0 - \Omega_{i,g}^0$$

Moment fléchissant dans la travée i :

$$M(x) = M_0(x) + M_{i-1}.\left(1 - \frac{x}{L_i}\right) + M_i.\left(\frac{x}{L_i}\right)$$

Géométrie et cas de charge	Rotation en A Ω_A	Rotation en B Ω_B
	$\frac{-q.L^3}{24EI}$	$\frac{q.L^3}{24EI}$

2 Questions

2.1 Partie 1 : diagramme des moments fléchissant

1. Pour chaque cas de charge, tracer le diagramme des moments fléchissant dans le tablier
2. En déduire, dans toute section du tablier, le moment fléchissant maximal sur l'ensemble des cas de charge

2.2 Partie 2 : section des tables horizontales

1. Calculer le moment quadratique de la section « par défaut » des tables horizontales
2. Le moment résistant de la section « par défaut » est le moment fléchissant qui induit une contrainte égale à la contrainte admissible du matériau. Calculer le moment résistant de la section par défaut des tables horizontales
3. Sera-t-il nécessaire de renforcer localement le tablier vis-à-vis de la flexion ?

3 Correction

3.1 Partie 1

3.1.1 Question 1

Pour chaque cas de charge, le raisonnement est identique. Ce sont les valeurs de p_1, p_2 et p_3, charges linéiques sur les travées 1,2 et 3 qui seront différentes pour chaque cas de charge.

Les travées sont de longueur égale. On prendra $L_1 = L_2 = L_3 = L$.

$$d_e = r - 3 = 2 + 1 + 1 + 1 - 3 = 2$$

$$d_i = l_i - (3b - 3) = 0 - (3 - 3) = 0$$

$$d_g = 2$$

La poutre est hyperstatique. Il manque deux équations. Elles viendront du théorème des trois moments écrit sur les appuis au centre (appui 1 et 2).

Théorème des trois moments sur l'appui 1 :

$$\mu_0 \frac{L}{6EI} + 2\mu_1 \left(\frac{L}{6EI} + \frac{L}{6EI}\right) + \mu_2 . \frac{L}{6EI} = \Omega_{i,d}^0 - \Omega_{i,g}^0$$

$$\mu_0 = 0$$

$$\Omega_{i,d}^0 = -p_2 . \frac{L^3}{24EI}$$

$$\Omega_{i,g}^0 = p_1 . \frac{L^3}{24EI}$$

$$\mu_1 . \frac{4L}{6} + \mu_2 . \frac{L}{6} = -(p_1 + p_2) . \frac{L^3}{24}$$

$$4\mu_1 + \mu_2 = \frac{-(p_1 + p_2) . L^2}{4}$$

Théorème des trois moments sur l'appui 2 :

$$\mu_1 \frac{L}{6EI} + 2\mu_2 \left(\frac{L}{6EI} + \frac{L}{6EI}\right) + \mu_3 . \frac{L}{6EI} = \Omega_{i,d}^0 - \Omega_{i,g}^0$$

$$\mu_3 = 0$$

$$\Omega_{i,d}^0 = -p_3 . \frac{L^3}{24EI}$$

$$\Omega_{i,g}^0 = p_2 . \frac{L^3}{24EI}$$

$$\mu_1 . \frac{L}{6} + \frac{4L}{6} . \mu_2 = -(p_3 + p_2) . \frac{L^3}{24}$$

$$\mu_1 + 4\mu_2 = \frac{-(p_3 + p_2) . L^2}{4}$$

Soit le système

$$\begin{cases} 4\mu_1 + \mu_2 = T_1 & (1) \\ \mu_1 + 4\mu_2 = T_2 & (2) \end{cases}$$

L'expression de μ_1 sera obtenue en faisant $4 \times (1) - (2)$:

$$\mu_1 = \frac{-4p_1L^2 - 3p_2L^2 + p_3L^2}{60}$$

Expression du moment fléchissant dans la travée i

$$M(x) = M_0(x) + \mu_{i-1}.\left(1 - \frac{x}{L_i}\right) + \mu_i.\left(\frac{x}{L_i}\right)$$

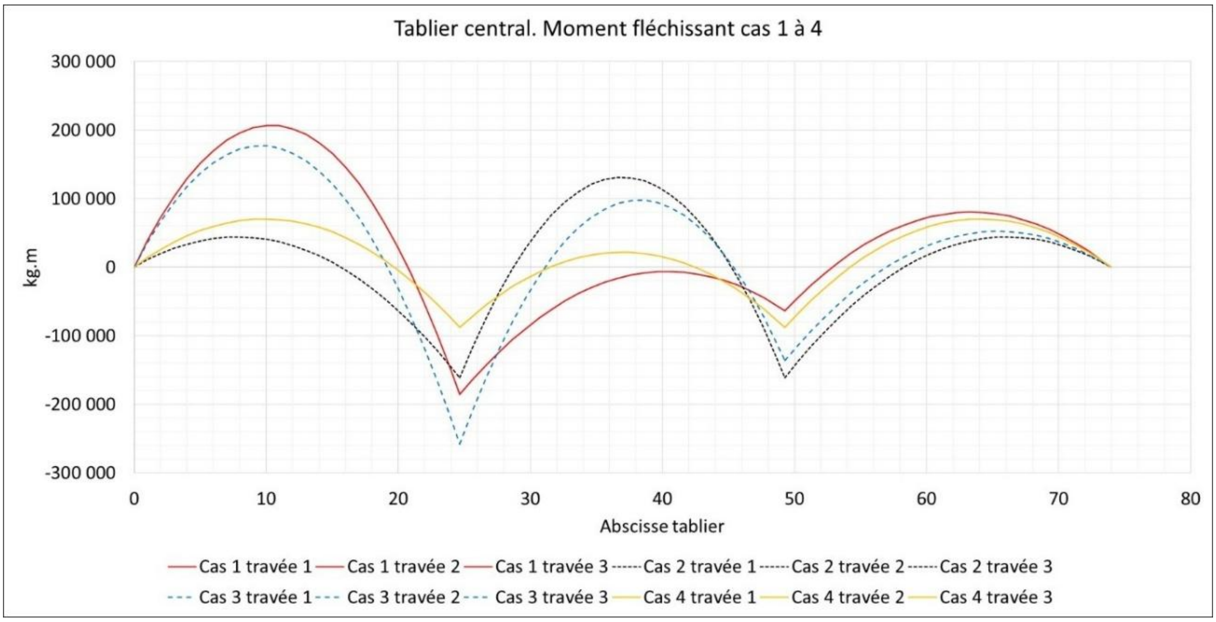
Appuis 0 et 3 : appuis de rive donc $\mu_0 = 0; \mu_1 = 0$.

Dans chaque travée, $M_0(x)$ est l'expression du moment fléchissant pour une poutre isostatique soumise à une charge linéique, donc

$$M_0(x) = p_\mathrm{i}.\frac{L}{2}.x - p_\mathrm{i}.\frac{x^2}{2}$$

Avec p_i charge linéique dans la travée i.

Diagrammes



3.1.2 Question 2

Pour dimensionner les sections des poutres, on doit connaitre en chaque point de la poutre le moment fléchissant maximal entre les 4 cas. On trace ci-dessous ce moment fléchissant maximal dans une section entre tous les cas de charge.

$$Max(M(x)_i, i = 1...4)$$

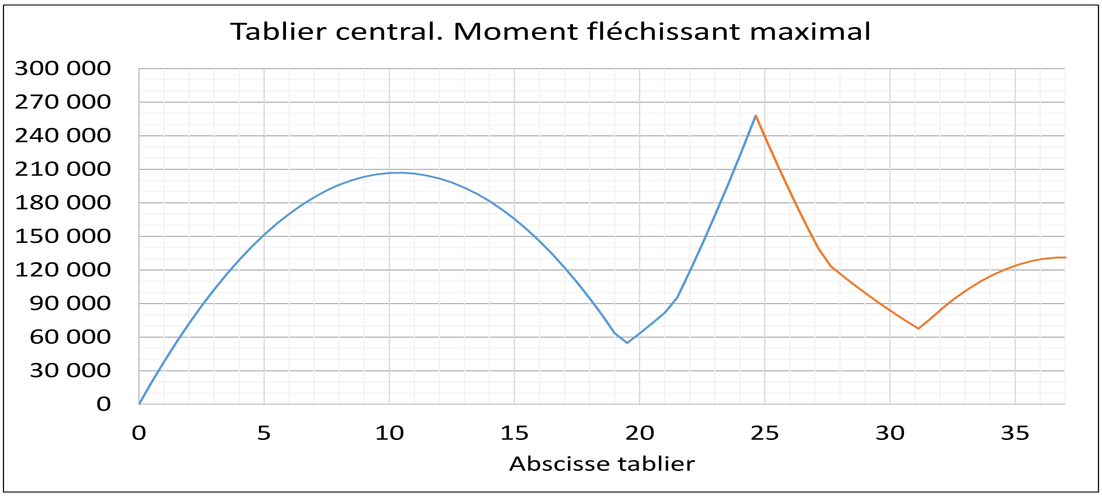
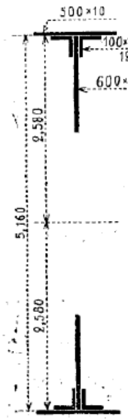


Figure 6. Tablier central. Moment fléchissant maximal

3.2 Partie 2

3.2.1 Question 1



$$I = \frac{1}{12}\left[0,500 \times \overline{5,180}^3 - 0,285 \times \overline{5,160}^3 - 0,176 \times \overline{5,}^3 - 0,024 \times \overline{4,960}^3 - 0,015 \times \overline{3,960}^3\right]$$

$$I = 0,219\ 648,$$

$$v = 2,590,$$

$$\frac{I}{v} = 0,084\ 806,$$

$$\frac{R\,I}{v} = 0,077\ 542 \times 6\ 000\ 000 = 508\ 836$$

3.2.2 Question 2

La contrainte normale maximale dans les tables horizontales, due à la flexion de la poutre, ne doit pas dépasser $R = 6\ kg/mm^2$ donc le moment maximal admissible par la partie constante (par défaut) des tables horizontales, appelé moment résistant est

$$M_{résistant} = \frac{R.I}{v} = \frac{6.10^6 \times 0{,}219648}{2{,}59} = 508\,837\ kg.m$$

Cette valeur correspond au moment fléchissant maximal que peut supporter la partie constante des tables horizontales.

Lorsque le moment fléchissant imposé par les charges dépasse cette valeur, il sera nécessaire de renforcer la section des tables horizontales.

3.2.3 Question 3

En de nombreuses sections du tablier, le moment résistant n'est pas suffisant et des semelles supplémentaires doivent être ajoutées.

4 Références

Eiffel, G. (1888). Mémoire présenté à l'appui du projet définitif du viaduc de Garabit. *Mémoires de la Société des ingénieurs civils. http://cnum.cnam.fr/redir?ECCMC6.49*, *50*, 55-184. http://cnum.cnam.fr/redir?ECCMC6.49