

Résistance des Matériaux

-

Exercice : éléments comprimés, prise en compte des imperfections initiales selon l'Eurocode 3

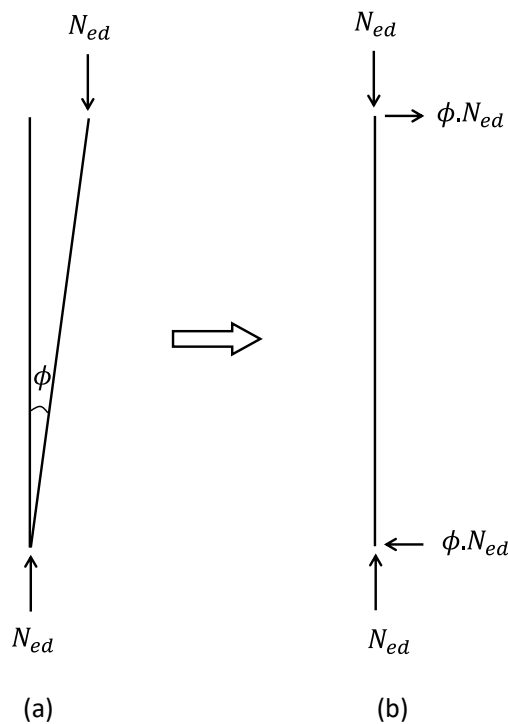
Thématique : efforts internes, Eurocodes

Partie 1 : défaut d'aplomb initial

Soit un élément de longueur L soumis à un effort de compression N_{ed} . Cet élément possède un défaut d'aplomb représenté par l'angle ϕ sur le schéma ci-dessous.

On veut prendre en compte l'influence de ce défaut d'aplomb sur les efforts subis par l'élément.

L'Eurocode 3 propose de prendre en compte ce défaut en considérant une force horizontale équivalente $\phi \cdot N_{ed}$.



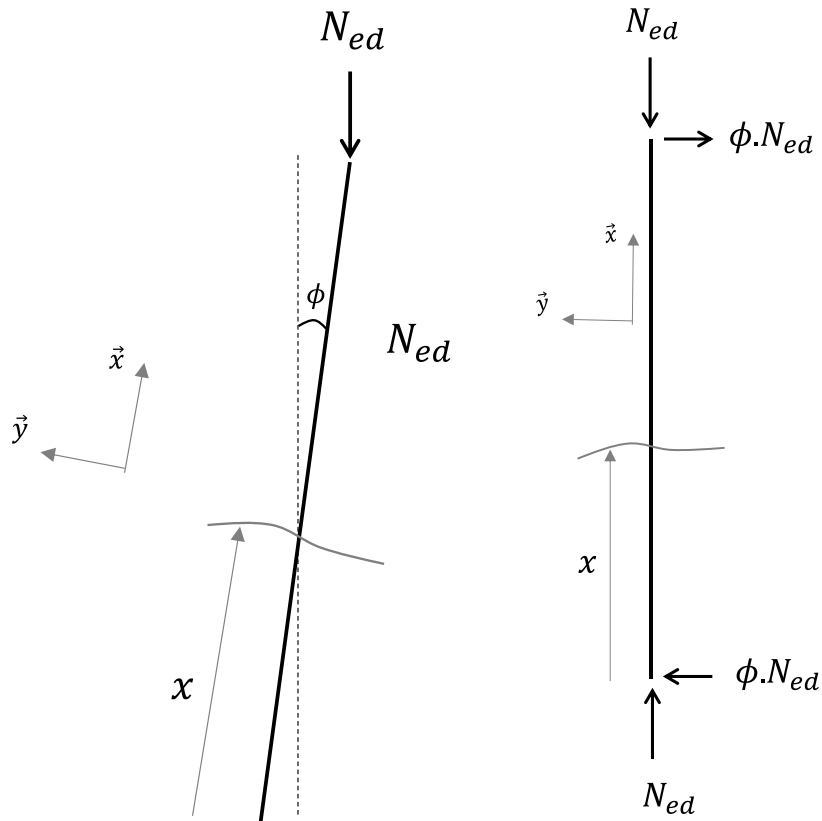
On propose de retrouver les valeurs N_{ed} et $\phi \cdot N_{ed}$ du schéma et d'étudier la modélisation proposée. On pourra s'aider des modélisations ci-dessous.

Questions

1/ Sur le schéma de l'élément avec le défaut d'aplomb (figure a), déterminer l'effort normal, l'effort tranchant et le moment fléchissant dans une section d'abscisse x .

2/ Sur le schéma de l'élément avec la force horizontale équivalente $\phi \cdot N_{ed}$, déterminer l'effort normal, l'effort tranchant et le moment fléchissant dans une section d'abscisse x .

3/ Pour un angle ϕ proche de 0, confirmer la modélisation proposée par l'Eurocode 3.



Partie 2 : imperfection en arc initiale

On considère maintenant une imperfection en arc, schématisée par la flèche e_0 et la déformée ci-contre.

1/ On suppose que la déformée a une expression de la forme

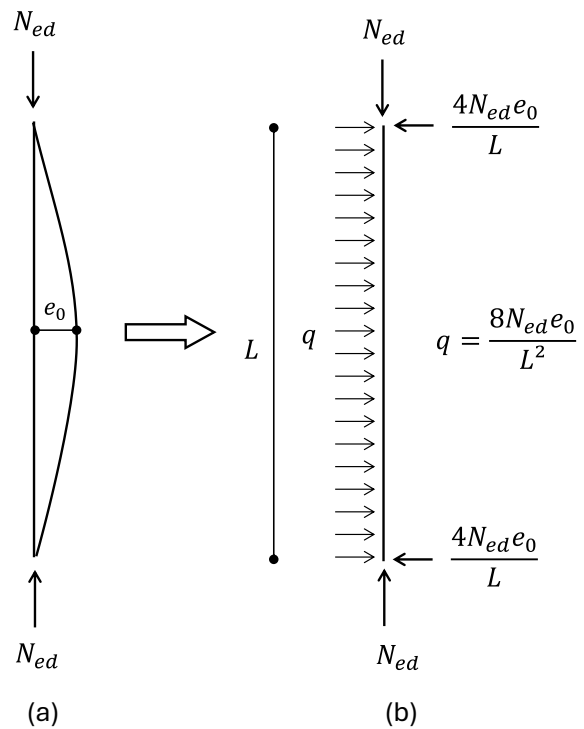
$$y(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Exprimer les constantes a , b et c en fonction de N_{ed} , e_0 et L .

2/ En déduire, pour le cas (a), l'expression du moment fléchissant $M(x)$

3/ Pour le cas (b), déterminer l'expression du moment fléchissant $M(x)$ dans toute section d'abscisse x

4/ Comparer les expressions obtenues. Conclure sur la schématisation de l'imperfection en arc proposée dans l'Eurocode.



Correction

Partie 1

Élément comprimé, prise en compte d'un défaut de géométrie initial selon l'Eurocode 3

1/ On a

$$\begin{cases} N = -N_{ed} \cdot \cos \Phi \\ V = -N_{ed} \cdot \sin \Phi \\ M = -(L - x) \cdot \sin \Phi \cdot N_{ed} \end{cases}$$

2/ Pour le schéma de l'élément avec la force horizontale équivalente $\phi \cdot N_{ed}$, le calcul est plus simple :

$$\begin{cases} N = -N_{ed} \\ V = -\Phi \cdot N_{ed} \\ M = -(L - x) \cdot \Phi \cdot N_{ed} \end{cases}$$

3/ Si $\Phi \rightarrow 0$ alors $\cos \Phi \rightarrow 1$ et $\sin \Phi \rightarrow \Phi$ donc les expressions des efforts internes pour le cas (a) deviennent

$$\begin{cases} N = -N_{ed} \\ V = -\Phi \cdot N_{ed} \\ M = -(L - x) \cdot \Phi \cdot N_{ed} \end{cases}$$

On retrouve bien les efforts internes de la modélisation proposée par l'Eurocode en figure b.

Partie 2

1/ On a $y(0) = 0$ donc $c = 0$. Par ailleurs, $y\left(\frac{L}{2}\right) = e_0$ et $y'\left(\frac{L}{2}\right) = 0$ donc

$$\begin{cases} \frac{aL^2}{4} + \frac{bL}{2} = e_0 \\ aL + b = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} a = -\frac{4e_0}{L^2} \\ b = -a \cdot L = \frac{4e_0}{L} \end{cases}$$
$$y(x) = -\frac{4e_0}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4e_0}{L} \cdot x$$

2/

$$M(x) = N_{ed} \cdot y(x) = -\frac{4N_{ed} \cdot e_0}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4N_{ed} \cdot e_0}{L} \cdot x$$

3/ Compte-tenu de la schématisation (b) on a directement

$$M(x) = \frac{4N_{ed} \cdot e_0}{L} \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{4N_{ed} \cdot e_0}{L} \cdot x - \frac{8N_{ed} \cdot e_0}{L^2} \cdot \frac{x^2}{2} = -\frac{4N_{ed} \cdot e_0}{L^2} \cdot x^2 + \frac{4N_{ed} \cdot e_0}{L} \cdot x$$

4/ Les expressions sont identiques. La modélisation de l'imperfection en arc proposée dans l'Eurocode, à l'aide d'une charge linéique d'expression $\frac{8N_{ed} \cdot e_0}{L^2}$ est pertinente.

Référence : NF EN 1993-1-1. Section 2-Bases de calcul