

Exercices corrigés de Résistance des Matériaux



<https://lesdocsduprof.com/>

fmenan@cesi.fr

Mars 2026

Liste des exercices

1	CARACTERISTIQUES DES SECTIONS	4
1.1	EXERCICE : CENTRE DE GRAVITE D'UNE SECTION	5
1.2	EXERCICE : MOMENT QUADRATIQUE DE DEUX SECTIONS	8
1.3	EXERCICE : CENTRE DE GRAVITE ET MOMENT QUADRATIQUE D'UNE POUTRE EN I	10
1.4	EXERCICE : CARACTERISTIQUES D'UNE SECTION EN I	12
1.5	EXERCICE : MATERIAUX « SANDWICHES »	14
1.6	EXERCICE : RESISTANCE EN FLEXION D'UNE SECTION LOSANGE	16
2	DEGRE D'HYPERSTATICITE	19
2.1	EXERCICE : DEGRE D'HYPERSTATICITE	20
2.2	EXERCICE : DEGRE D'HYPERSTATICITE [2]	22
2.3	EXERCICE : DEGRE D'HYPERSTATICITE [2]	25
3	ESTIMATION DES EFFORTS ET MOMENTS	27
3.1	EXERCICE : MOMENT D'UNE FORCE	28
3.2	EXERCICE : SOLIDE SOUMIS A UN SYSTEME DE FORCES	30
3.3	EXERCICE : PORTE COULISSANTE	32
3.4	EXERCICE : EFFORT TOTAL DU A UNE CHARGE REPARTIE	35
3.5	EXERCICE : POUTRE SOUMISE A SON PROPRE POIDS	37
4	PORTIQUES ISOSTATIQUES	39
4.1	EXERCICE : PORTIQUE	40
4.2	EXERCICE : PORTIQUE	42
5	POUTRES ISOSTATIQUES EN FLEXION	45
5.1	EXERCICE : POUTRE ISOSTATIQUE	46
5.2	EXERCICE : POUTRE ISOSTATIQUE	48
5.3	EXERCICE : POUTRE ISOSTATIQUE	50
5.4	EXERCICE : POUTRE SUR DEUX APPUIS, CHARGE LINEIQUE CROISSANTE	53
5.5	EXERCICE : EFFORT DEVIE	56
5.6	EXERCICE : MOMENT FLECHISSANT DU A UNE CHARGE LINEIQUE CONSTANTE	59
5.7	EXERCICE : MOMENT FLECHISSANT DU A UNE CHARGE LINEIQUE NON CONSTANTE	61
5.8	EXERCICE : MOMENT FLECHISSANT, POUTRE SUR DEUX APPUIS, CHARGE LINEIQUE VARIABLE	63
5.9	EXERCICE : POUTRE EN FLEXION : INFLUENCE DE LA POSITION DE L'APPUI	65
5.10	EXERCICE : POUTRE SUR DEUX APPUIS AVEC CHARGE LINEIQUE VARIABLE	68
5.11	EXERCICE : POUTRE ISOSTATIQUE	70
6	TREILLIS ISOSTATIQUES	72
6.1	EXERCICE : TREILLIS 1 [6]	73
6.2	EXERCICE : TREILLIS 2 [6]	75
7	LOI DE COMPORTEMENT D'UNE POUTRE EN FLEXION	77
7.1	EXERCICE : FLECHE D'UNE POUTRE CONSOLE SOLLICITEE EN FLEXION	78
7.2	EXERCICE : FLECHE D'UNE POUTRE ISOSTATIQUE EN FLEXION	81
7.3	EXERCICE : FLECHE D'UNE POUTRE EN FLEXION	83
8	ESTIMATION DES CONTRAINTES	86
8.1	EXERCICE : TRACTION ET CISAILLEMENT D'UN JOINT COLLE	87
8.2	EXERCICE : EQUILIBRE DES FORCES DANS UNE SECTION SOUMISE A UN MOMENT	89
8.3	EXERCICE : POUTRE CREUSE	93
8.4	EXERCICE : CONTRAINTE DE CISAILLEMENT	96

8.5	EXERCICE : DEFORMATION D'UN PILIER SOUS SON PROPRE POIDS	98
8.6	EXERCICE : SOLIDE D'EGALE RESISTANCE [5]	100
9	SYSTEMES HYPERSTATIQUES	102
9.1	EXERCICE : POUTRE HYPERSTATIQUE	103
10	POUTRES CONTINUES.....	105
10.1	EXERCICE : THEOREME DES 3 MOMENTS	106
10.2	EXERCICE : POUTRE CONTINUE PAR SUPERPOSITION	108
10.3	EXERCICE : POUTRE CONTINUE SUR TROIS APPUIS	111
10.4	EXERCICE : ROTATION A UN APPUI	113
10.5	EXERCICE : ROTATION A UN APPUI	116
11	METHODES ENERGETIQUES.....	118
11.1	EXERCICE : TABLEAU DES INTEGRALES DE MOHR.....	119
12	EXERCICES DE SYNTHESE	121
12.1	EXERCICE : FLECHE D'UNE POUTRE CONSOLE.....	122
13	REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	125

Couverture : image générée par IA

1 Caractéristiques des sections

1.1 Exercice : centre de gravité d'une section

Soit la section ci-dessous.

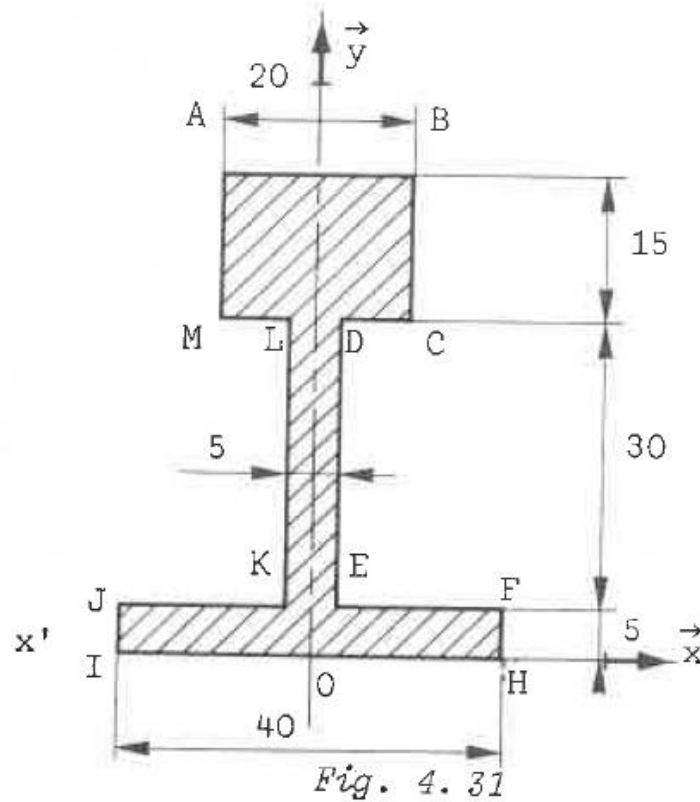


Figure 1. Référence [2]

- 1/ Déterminer le centre de gravité G de la section en considérant que G est le barycentre des centres de gravité de chaque surface élémentaire, pondérés par l'aire de la surface
- 2/ Déterminer le centre de gravité G de la section ci-dessous à l'aide des moments statiques

1.1.1 Exercice : centre de gravité d'une section

Par symétrie, on a $x_G = 0$. Dans les questions 1 et 2, on cherche donc seulement y_G .

1/ la définition du centre de gravité appliquée à un ensemble de solides donne

$$S_1 \cdot \overrightarrow{OG_1} + S_2 \cdot \overrightarrow{OG_2} + S_3 \cdot \overrightarrow{OG_3} = (S_1 + S_2 + S_3) \cdot \overrightarrow{OG}$$

S_1 est la surface ABCM. S_2 est la surface LDEK. S_3 est la surface JFHI

On a donc

$$300y_{G_1} + 150y_{G_2} + 200y_{G_3} = 650y_G$$

D'après la géométrie des sections, $y_{G_1} = 42,5 \text{ mm}$; $y_{G_2} = 20 \text{ mm}$; $y_{G_3} = 2,5 \text{ mm}$.

Finalement

$y_G = 25 \text{ mm}$

2/ Par les moments statiques

$$S_{10x} = \iint y dx dy = 20 \times \left(\frac{50^2}{2} - \frac{35^2}{2} \right) = 12750 \text{ mm}^3$$

$$S_{20x} = \iint y dx dy = 5 \times \left(\frac{35^2}{2} - \frac{5^2}{2} \right) = 3000 \text{ mm}^3$$

$$S_{30y} = \iint y dx dy = 40 \times \frac{5^2}{2} = 500 \text{ mm}^3$$

On a donc

$y_G = \frac{12750 + 3000 + 500}{650} = 25 \text{ mm}$
--

Remarque

On pouvait aussi retrouver la position de G avec deux méthodes graphiques.

- Par statique graphique
- Par la représentation graphique de la formule ci-dessous

$$S_1 \cdot \overrightarrow{OG_1} + S_2 \cdot \overrightarrow{OG_2} + S_3 \cdot \overrightarrow{OG_3} = (S_1 + S_2 + S_3) \cdot \overrightarrow{OG}$$

1/ Par statique graphique

Des détails sur la méthode peuvent être trouvés dans le cours de statique graphique.

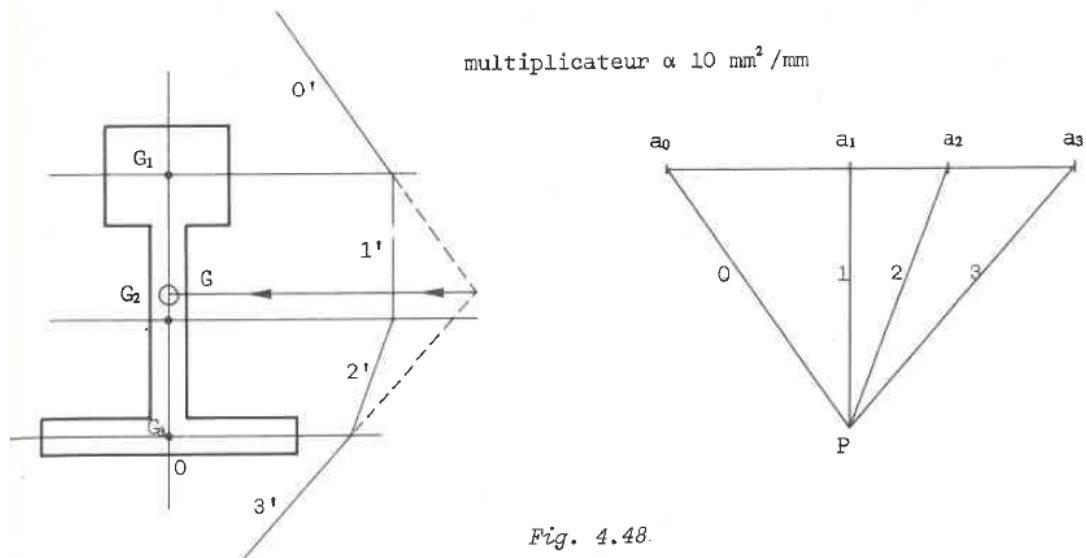


Fig. 4.48.

On mesure bien $y_G = 25 \text{ mm}$.

2/ Par la représentation graphique de la formule du barycentre

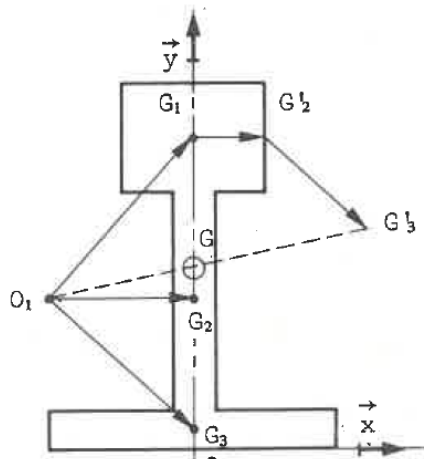
$$S_1 \cdot \overrightarrow{OG_1} + S_2 \cdot \overrightarrow{OG_2} + S_3 \cdot \overrightarrow{OG_3} = (S_1 + S_2 + S_3) \cdot \overrightarrow{OG}$$

$$300 \cdot \overrightarrow{OG_1} + 150 \cdot \overrightarrow{OG_2} + 200 \cdot \overrightarrow{OG_3} = 650 \cdot \overrightarrow{OG}$$

En divisant chaque terme par 300 il vient :

$$\overrightarrow{OG_1} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OG_2} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{OG_3} = \frac{13}{6} \cdot \overrightarrow{OG}$$

En prenant un point O n'importe où sur le schéma on peut tracer la construction ci-dessous :



A partir de O_1 , portons donc $\overrightarrow{O_1G_1}$ puis

$$\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{\overrightarrow{O_1G_2}}{2} \text{ et } \overrightarrow{G_2G_3} = \frac{2}{3} \overrightarrow{O_1G_3}$$

On obtient : $\overrightarrow{O_1G_3} = \frac{13}{6} \overrightarrow{O_1G}$

D'où G à l'intersection de l'axe de symétrie et de $\overrightarrow{O_1G_3}$.

On mesure OG # 25 mm.

On mesure bien $y_G = 25 \text{ mm}$.

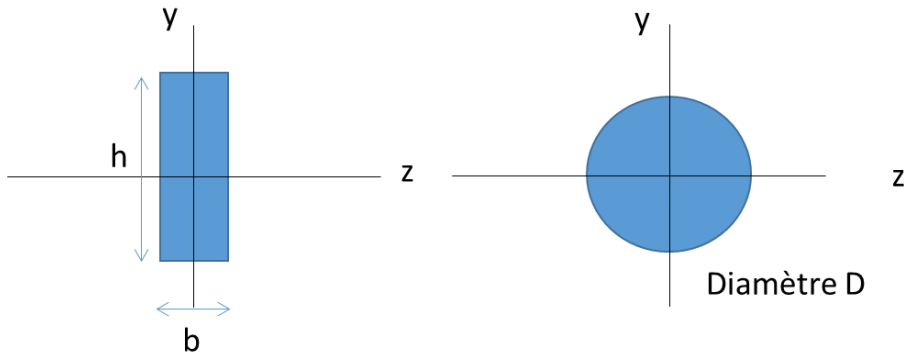
Remarque : pour simplifier les calculs, on aurait pu choisir $O = G_1$.

1.2 Exercice : moment quadratique de deux sections

Soient les deux sections ci-dessous de centre d'inertie G.

Déterminer l'expression de I_{Gz} moment quadratique par-rapport à l'axe Gz pour les deux sections.
On rappelle que

$$I_{Gz} = \iint y^2 dydz$$



1.2.1 Exercice : moment quadratique de deux sections

Section rectangulaire

$$I_{Gz} = \iint y^2 dydz = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = b \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = b \cdot \left(\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{24} + \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{24} \right)$$

$$I_{Gz} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Section circulaire

$$I_{Gz} = \iint r^2 \cos^2 \theta \cdot dS = \iint r^2 \cos^2 \theta \cdot r dr d\theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 \theta \cdot r dr d\theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$I_{Gz} = \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \right]_0^{2\pi} = \frac{R^4}{4} \cdot \frac{2\pi}{2}$$

$$I_{Gz} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

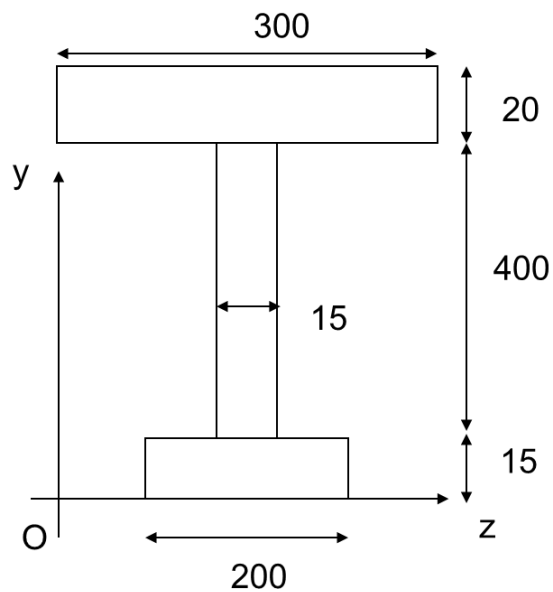
1.3 Exercice : centre de gravité et Moment quadratique d'une poutre en I

Soit une poutre constituée d'une section en I, centre de gravité G, de masse volumique homogène.

1/ Calculer les coordonnées du centre de gravité G de la section ci-dessous.

2/ En déduire le moment quadratique I_{Gz} de la section S par-rapport à l'axe Gz.

Les dimensions sont données en mm.



1.3.1 Exercice : centre de gravité et Moment quadratique d'une poutre en I

On divise la section en 3 sections rectangulaires (300x20,15x400,200x15).

1/

$$y_G = \frac{S_1 y_{G1} + S_2 y_{G2} + S_3 y_{G3}}{S_1 + S_2 + S_3} = 257,5 \text{ mm}$$

Par symétrie, $z_G = 150 \text{ mm}$

2/ On calcule le moment quadratique des 3 sections par-rapport à l'axe z passant par leur centre de gravité puis on en déduit le moment quadratique par-rapport à Gz à l'aide du théorème de Huygens.

$I_{Gz} = 4,4693 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$

1.4 Exercice : caractéristiques d'une section en I

Soient les sections A et B constituées du même matériau de module E.

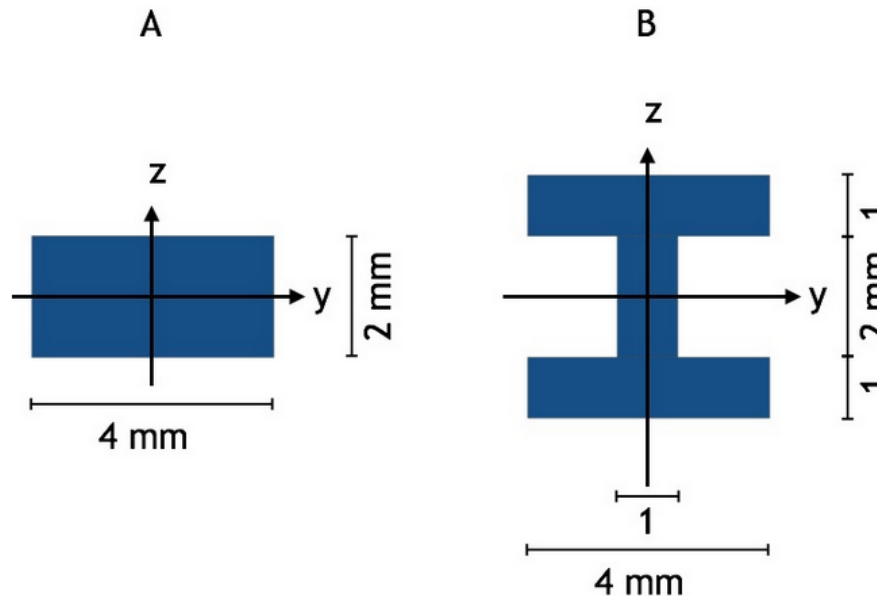


Figure 2. Référence MOOC ENS Cachan

Q1/ Montrer que la raideur en traction de la section B est 1.25 fois plus grande que la raideur de la section A

Q2/ Montrer que le moment quadratique I_{yB} de la section B est 7.25 fois plus grande que le moment quadratique de la section A

Formulaire

Loi de Hooke en traction uniaxiale

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

De plus

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Donc

$$F = \frac{E}{L_0} \cdot S \cdot \Delta L$$

Donc la raideur d'une poutre en traction est

$$\frac{E}{L_0} \cdot S$$

1.4.1 Exercice : caractéristiques d'une section en I

1/ Les deux poutres ont même longueur et module E. La section S_B (10mm^2) est 25% fois plus grande que la section S_A (8mm^2) donc la raideur en traction augmente de 25%.

2/ Section A

$$I_{yA} = \frac{4 * 2^3}{12} \approx 2.7\text{mm}^4$$

Section B

$$I_{yB} = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3}$$

Par le théorème de Huygens :

$$I_{y1} = \frac{4 * 1^3}{12} + 1.5^2 * 4 * 1 \approx 9.3 \text{ mm}^4$$

$$I_{y1} = I_{y3}$$

$$I_{y2} = \frac{1 * 2^3}{12}$$

Par conséquent,

$$\frac{I_{yA}}{I_{yB}} = \frac{2 * \left(\frac{4 * 1^3}{12} + 1.5^2 * 4 * 1 \right) + \frac{8}{12}}{\frac{8}{3}} = 7.25$$

1.5 Exercice : matériaux « sandwichs »

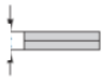
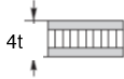
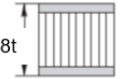
Les matériaux « sandwichs » sont des matériaux composés d'une âme centrale entourée de deux peaux, ou semelles. Ils présentent un excellent rapport poids/résistance et poids/rigidité en flexion.

On propose dans cet exercice de retrouver les valeurs données ci-dessous concernant la rigidité et la résistance en flexion de trois sandwichs de différentes épaisseurs.

Questions

La figure ci-dessous donne les rapports entre la rigidité en flexion (moment quadratique I_z) d'une poutre d'épaisseur t et celle d'un sandwich d'épaisseur $2t$ et $4t$.

Retrouver les rapports de 7 et 37 donnés.

Properties	Solid material	Core thickness t	
			
Stiffness	1.0	7.0	37.0
Flexural strength	1.0	3.5	9.2
Weight	1.0	1.03	1.06

Doc. HEXCEL

Techniques de l'ingénieur AM5141

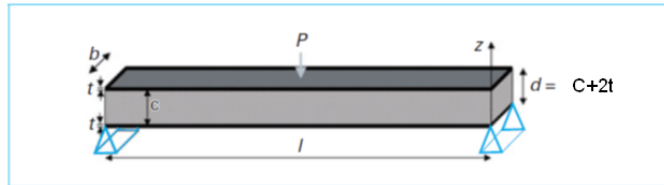


Figure 21 – Poutre sandwich sur deux appuis chargée au centre

1.5.1 Exercice : matériaux « sandwichs »

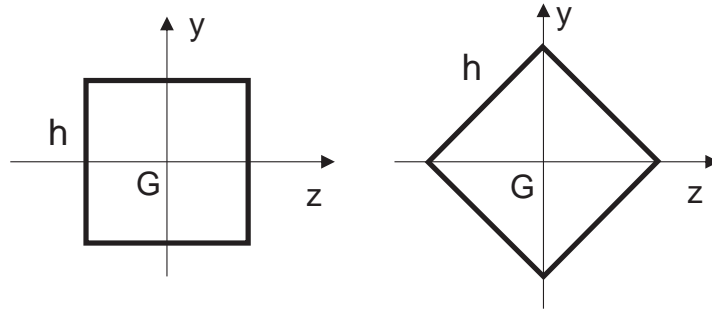
$$I_z = \frac{b \cdot (2t)^3}{12} = \frac{8b \cdot t^3}{12} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot t^3$$

$$I_z = 2 \left(\frac{b \cdot t^3}{12} + b \cdot t \cdot (1,5t)^2 \right) = 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot b \cdot t^3$$

$$I_z = 2 \left(\frac{b \cdot t^3}{12} + b \cdot t \cdot (3,5t)^2 \right) = 37 \cdot \frac{2}{3} \cdot b \cdot t^3$$

1.6 Exercice : résistance en flexion d'une section losange

On dispose d'une poutre à section carré de côté h . On se demande s'il est préférable de la disposer « en carré » ou « en losange », pour optimiser sa résistance à la flexion.



1/ Calculer le moment quadratique I_{Gz} par-rapport à l'axe Gz , pour chaque section

2/ Le seul calcul du moment quadratique permet-il de conclure sur la résistance en flexion des deux sections ?

1.6.1 Exercice : résistance en flexion d'une section losange

1/ Section « en carré » :

$$I_{Gz} = \iint_D y^2 dz dy = \frac{h^4}{12}$$

Avec

$$D = \{z; y\} \in \mathbb{R}^2 / -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \text{ et } -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}$$

Section « en losange » :

$$I_{Gz} = 4 \cdot I$$

Avec I l'intégrale d'un quart de losange telle que

$$I = \iint_D y^2 dz dy$$

Avec

$$D = \{z; y\} \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq z \leq \frac{h}{\sqrt{2}} \text{ et } 0 \leq y \leq -z + \frac{h}{\sqrt{2}}$$

$$I = \int_0^{\frac{h}{\sqrt{2}}} \left(\int_0^{-z + \frac{h}{\sqrt{2}}} y^2 dy \right) dz = \frac{h^4}{48}$$

Donc

$$I_{Gz} = \frac{h^4}{12}$$

2/ Section « en carré » :

$$\sigma_{max} = -\frac{M_f \cdot y_{max}}{I_{Gz}}$$

Avec

$$y_{max} = \frac{h}{2}$$

Donc

$$\sigma_{max} = -M_f \cdot \frac{6}{h^3}$$

Section « en losange » :

$$\sigma_{max} = -\frac{M_f \cdot y_{max}}{I_{Gz}}$$

Avec

$$y_{max} = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

Donc

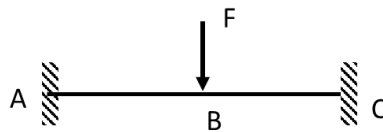
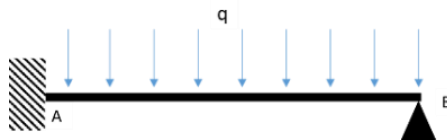
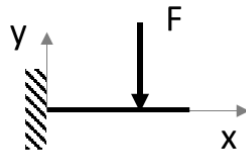
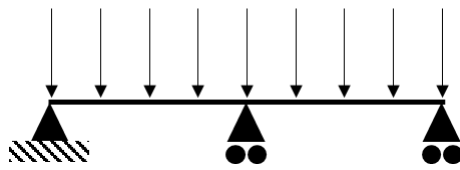
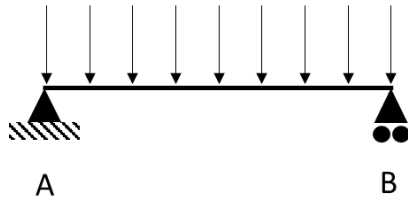
$$\sigma_{max} = -M_f \cdot \frac{6\sqrt{2}}{h^3}$$

La contrainte maximale sera plus forte dans la section posée « en losange » malgré un moment quadratique égal à la section carrée.


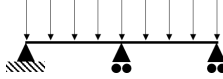

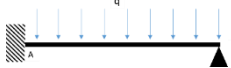

2 Degré d'hyperstaticité

2.1 Exercice : degré d'hyperstaticité

Déterminer le degré d'hyperstaticité global, interne et externe des structures ci-dessous.

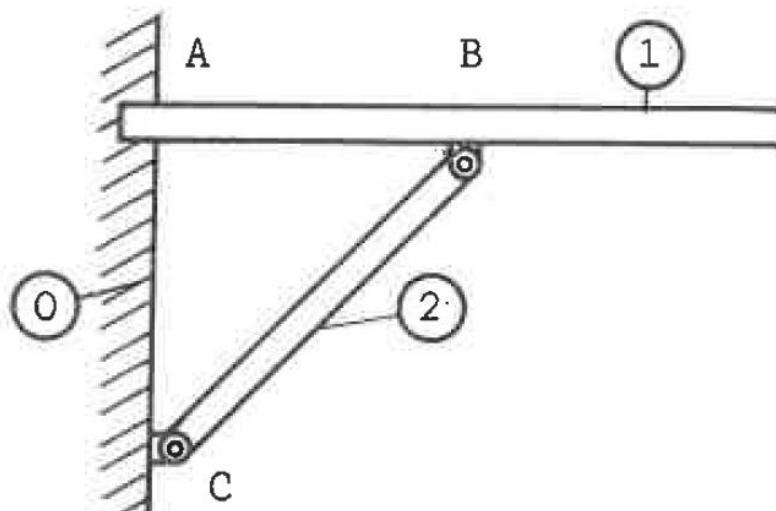


2.1.1 Exercice : degré d'hyperstaticité

	de	di	dg
	$3-3=0$	$l_i = 0$ $b=1$ $0 - (3 \times 1 - 3) = 0$	0
	$2+1+1-3=1$		1
	$3-3=0$		0
	$3+2-3=2$		2
	$3+3-3=3$		3

2.2 Exercice : degré d'hyperstaticité [2]

Déterminer le degré d'hyperstaticité global, externe et interne de la structure ci-dessous.



2.2.1 Exercice : degré d'hyperstaticité [2]

Degré externe

$$d_e = 3 + 2 - 3 = 2$$

Degré interne

On voit en effet que deux liaisons pivots donnent une réaction d'appui en trop sur la structure.

$$d_i = l_i + (3b - 3) = 2 - (3 \times 2 - 3) = -1$$

l_i : nombre de liaisons internes. Liaison pivot : $l_i = 2$

b : nombre d'éléments. $b = 2$

La structure est hypostatique intérieurement. On voit en effet que la structure seule, non reliée au mur, a un degré de liberté : la rotation au niveau de la liaison pivot.

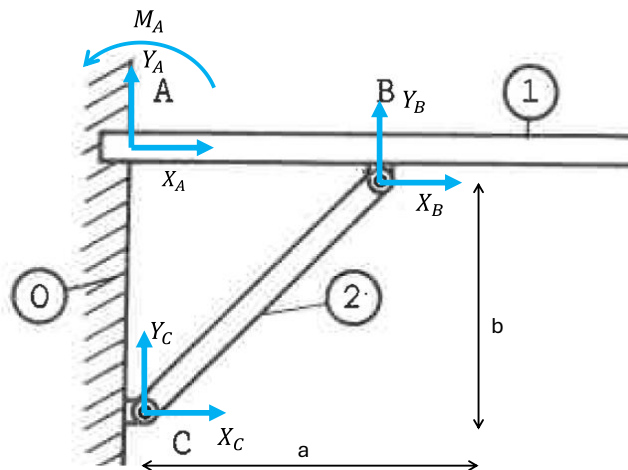
Degré global

$$d = d_e + d_i = 2 - 1 = 1$$

La structure est globalement hyperstatique de degré 1.

Il va manquer une équation pour déterminer toutes les inconnues de liaison.

On peut modéliser le problème comme ci-dessous :



En isolant 1 on a

$$X_A + X_B = 0$$

$$Y_A + Y_B = 0$$

$$M_A + Y_B \cdot AB = 0$$

En isolant 2 on a

$$X_B + X_C = 0$$

$$Y_B + Y_C = 0$$

$$\text{Somme des moments en C : } Y_B \cdot a - X_B \cdot b = 0$$

Remarque : cette dernière équation donne

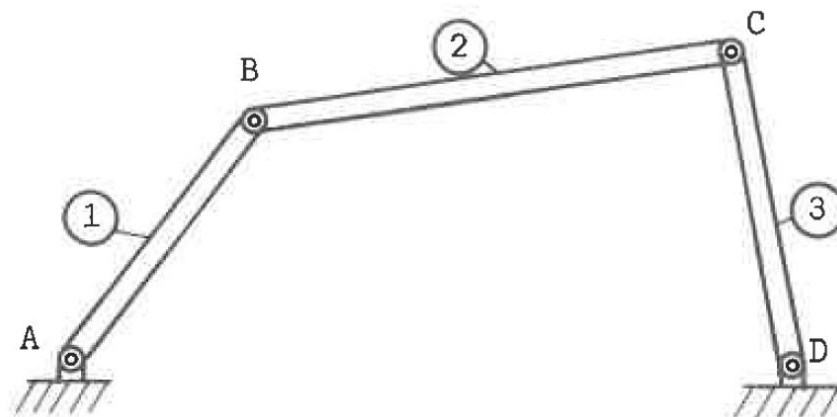
$$\frac{X_B}{Y_B} = \frac{a}{b} = \tan \alpha$$

Ce qui transcrit bien le fait que la pièce 2 étant une barre articulée soumise à deux forces, ces forces ont pour direction l'axe de la barre.

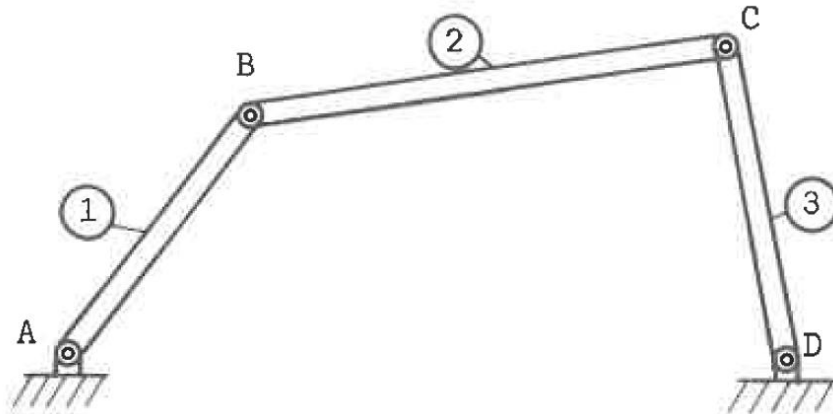
On a bien au total 7 inconnues pour 6 équations.

2.3 Exercice : degré d'hyperstaticité [2]

Déterminer le degré d'hyperstaticité global, externe et interne de la structure ci-dessous.



2.3.1 Exercice : degré d'hyperstaticité [2]



$$d_e = 2 + 2 - 3 = 1$$

$$d_i = l_i + (3b - 3) = 2 + 2 - (3 \times 2 - 3) = -2$$

l_i : nombre de liaisons internes. Liaison pivot : $l_i = 2$

b : nombre d'éléments. $b = 2$

La structure est hypostatique intérieurement. On voit en effet que la structure seule, non reliée au sol, a deux degrés de liberté : les rotations au niveau des deux liaisons pivot.

Degré global

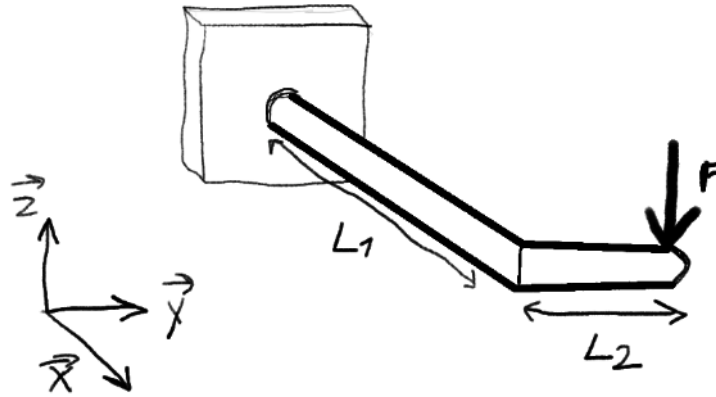
$$d = d_e + d_i = 1 - 2 = -1$$

La structure est globalement hypostatique de degré 1.

3 Estimation des efforts et moments

3.1 Exercice : moment d'une force

Soit une poutre encastrée dans un mur au point $B(0 ; 0 ; 0)$ et soumise à une force $\vec{F} = -F \cdot \vec{z}$ appliquée en $A(L_1 ; L_2 ; 0)$.



Déterminer en B le moment de la force \vec{F} exercée en A.

3.1.1 Exercice : moment d'une force

Moment en B dû à la force \vec{F} en A

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$$

Or le moment en A dû à la force en A est nul : $\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{0}$ donc

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F \cdot L_2 \\ F \cdot L_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.2 Exercice : solide soumis à un système de forces

Partie 1 : solide soumis à deux forces

Soient 2 forces \vec{F}_A et \vec{F}_B appliquées aux points A et B d'un solide à l'équilibre.

En écrivant le principe fondamental de la statique, que peut-on dire de ces deux forces ?

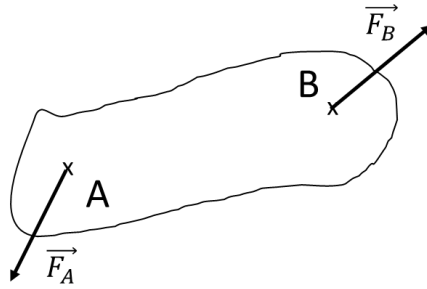


Figure 3. Exercice : solide soumis à un système de forces

Partie 2 : solide à l'équilibre soumis à trois forces

Soient 3 forces \vec{F}_A , \vec{F}_B et \vec{F}_C appliquées aux points A, B et C d'un solide à l'équilibre.

En écrivant le principe fondamental de la statique, que peut-on dire de ces trois forces ?

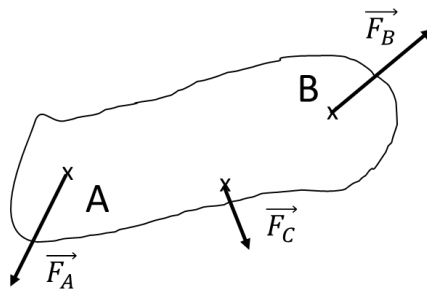


Figure 4. Exercice : solide soumis à un système de forces

3.2.1 Exercice : solide soumis à un système de forces

Partie 1

A l'équilibre on a :

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0} \quad (1)$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{F}_B = \vec{0} \quad (2)$$

(1) indique que \vec{F}_A et \vec{F}_B ont une même direction, une même amplitude et des sens opposés.

(2) indique que \vec{AB} et \vec{F}_B ont même direction, donc la force \vec{F}_B a pour direction la droite AB.

Finalement, les deux forces ont pour direction la droite AB. Elles ont même norme et sont de sens opposé.

Partie 2

Soit un solide à l'équilibre soumis à 3 forces appliquées en A, B et C, le PFS donne :

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0} \quad (1)$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{F}_B + \vec{AC} \wedge \vec{F}_C = \vec{0} \quad (2)$$

Le vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{F}_B$ est normal au plan (\vec{AB}, \vec{F}_B) . Le vecteur $\vec{AC} \wedge \vec{F}_C$ est normal au plan (\vec{AC}, \vec{F}_C) .

(2) montre que ces vecteurs sont opposés donc les forces \vec{F}_B et \vec{F}_C sont dans le plan ABC.

(1) montre que la force \vec{F}_A est également dans ce plan. Donc les 3 forces sont coplanaires.

Si \vec{F}_B et \vec{F}_C ne sont pas parallèles. Soit I leur point d'intersection. L'équation du moment statique écrite en I montre que le support de la force \vec{F}_A passe également par I. Donc les 3 forces sont concourantes.

Si \vec{F}_B et \vec{F}_C sont parallèles, alors (1) montre que \vec{F}_A est parallèle aux deux autres. Les 3 forces sont parallèles.

Pour conclure, si un solide est en équilibre sous l'action de 3 forces, ces forces sont :

- Coplanaires (dans un même plan)
- concourantes en un même point ou parallèles
- de somme vectorielle nulle

3.3 Exercice : porte coulissante

Soit une poutre coulissante composée d'un panneau 1 de poids \vec{P} ($P=3000\text{ N}$) dont les dimensions sont 3000×5000 , de deux galets 2 et 3 et d'un rail 5.

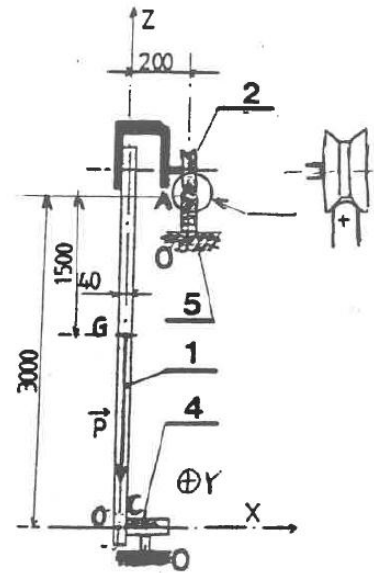
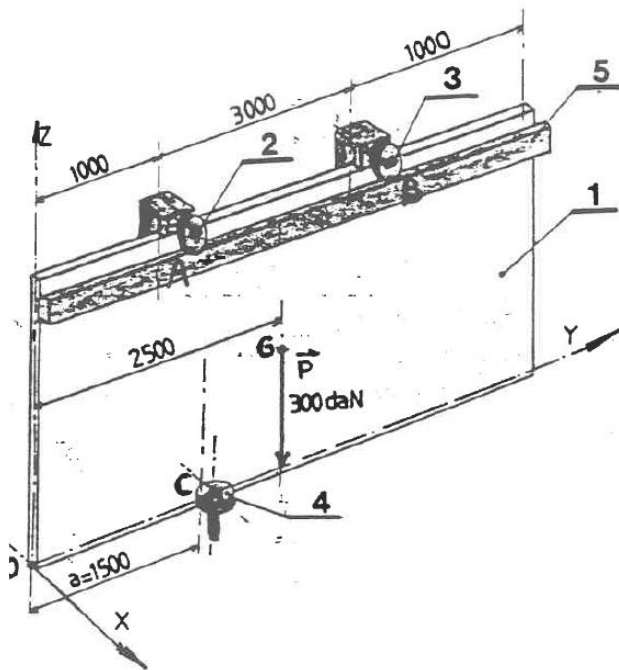
Les dimensions sur le plan sont en mm.

On néglige l'épaisseur de la porte dans les calculs de moments.

La porte est en appui en A et B sur le rail 5 par l'intermédiaire des galets 2 et 3. Le rail est scellé dans le mur 0. L'ensemble coulisse librement le long du rail posé horizontalement.

La stabilité de la porte est assurée par le galet 4. L'axe de ce galet, vertical, est scellé dans la sol 0. Le contact avec le panneau est effectué en C.

On suppose que les liaisons sont sans frottement. La résistance au roulement des galets est négligée.



Q1/ Calculer le degré d'hyperstaticité du problème

Q2/ Déterminer les actions mécaniques s'exerçant sur la porte

3.3.1 Exercice : porte coulissante

Q1/ Bilan des actions extérieures sur S

$$[Poids \rightarrow S]_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix}$$

$$[Rail \rightarrow S]_A = \begin{pmatrix} X_A \\ 0 \\ Z_A \end{pmatrix}$$

$$[Rail \rightarrow S]_B = \begin{pmatrix} X_B \\ 0 \\ Z_B \end{pmatrix}$$

$$[Galet 4 \rightarrow S]_B = \begin{pmatrix} X_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5 inconnues et 6 équations (on est dans l'espace)

D=-1, système hypostatique car la porte est libre en Y

Q2/ On isole le portail + galets 2 et 3. S = {portail + galets 2 et 3}.

Le système à l'équilibre donc selon le principe fondamental de la statique :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Donc

$$X_A + X_B + X_C = 0$$

$$Z_A + Z_B - P = 0$$

De plus,

$$\sum \vec{M} = \vec{0}$$

Donc somme des moments en A =0.

Moment en A dû à l'action du rail en B :

$$\vec{M}_A(\text{rail en B}) = \vec{M}_B(\text{rail en B}) + \vec{AB} \wedge \begin{pmatrix} X_B \\ 0 \\ Z_B \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_B(\text{rail en B}) = \vec{0}$$

$$\vec{M}_A(\text{rail en B}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_B \\ 0 \\ Z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3Z_B \\ 0 \\ -3X_B \end{pmatrix}$$

Moment en A dû à l'action du galet 4 en C :

$$\vec{M}_A(\text{galet 4}) = \vec{M}_B(\text{galet 4}) + \vec{AC} \wedge \begin{pmatrix} X_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.5 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3X_C \\ -0.5X_C \end{pmatrix}$$

Moment en A dû au poids :

$$\vec{M}_A(\text{poids}) = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5P \\ -0.2P \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$3Z_B - 1.5P = 0$$

$$-3X_C - 0.2P = 0$$

$$-3X_B - 0.5X_C = 0$$

Finalement,

$$Z_B = 0.5P = 1500N$$

$$Z_A = -Z_B + P = 1500N$$

$$X_C = -\frac{0.2}{3}P = -200N$$

$$X_B = -\frac{0.5X_C}{3} = \frac{0.5}{3} \cdot \frac{0.2}{3}P = 33N$$

$$X_A = -X_B - X_C = -33 + 200 = 167N$$

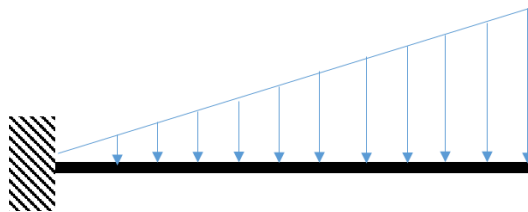
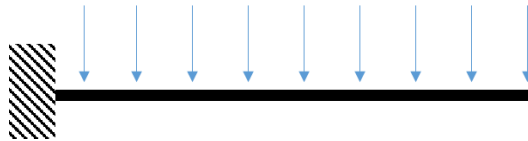
3.4 Exercice : effort total dû à une charge répartie

Soient deux poutres de longueur L , d'axe x , encastées à une extrémité.

L'une est soumise à un effort linéique constant q tout le long de la poutre.

L'autre est soumise à un effort linéique tel que $q=a.x$ avec a constante réelle positive et $x=0$ au niveau de l'encastrement.

Déterminer l'expression de l'effort total F appliqué sur les deux poutres.



3.4.1 Exercice : effort total dû à une charge répartie

Effort q constant :

$$F = \int_0^L q \cdot dx = q \cdot L$$

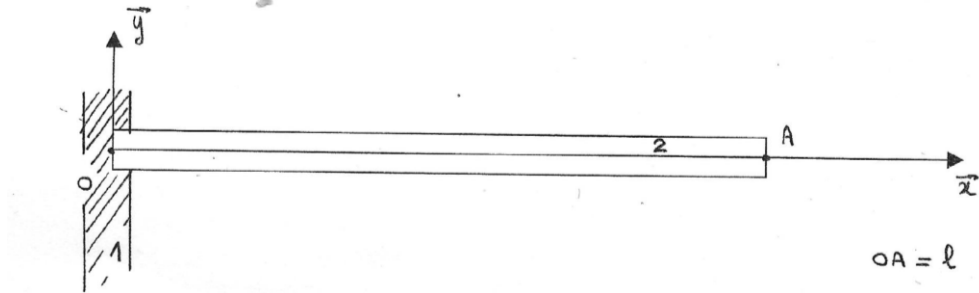
Effort q tel que $q=a \cdot x$ avec a constante

$$F = \int_0^L a \cdot x \cdot dx = a \cdot \frac{L^2}{2}$$

3.5 Exercice : poutre soumise à son propre poids

La poutre a une section carrée de côté h .

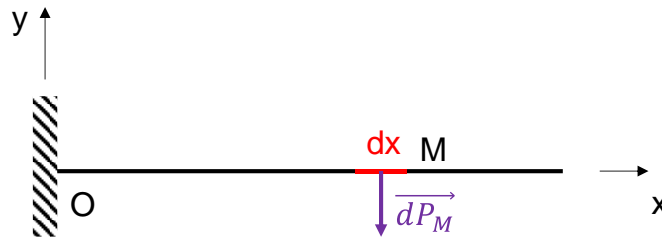
Déterminer le torseur des actions de pesanteur en O (résultante et moment en O)



3.5.1 Exercice : poutre soumise à son propre poids

Poids d'une section de poutre élémentaire de longueur dx , volume dV_M , en M :

$$\overrightarrow{dP_M} = -dV_M \cdot \rho \cdot g \cdot \vec{y} = -\rho \cdot g \cdot h^2 \cdot dx \cdot \vec{y}$$



Soit $[Actions\ pesanteur]_O$ le torseur des actions de pesanteur en O :

$$[Actions\ pesanteur]_O = \begin{cases} \overrightarrow{R_0} \\ \overrightarrow{M_0} \end{cases}$$

Avec

$$\overrightarrow{R_0} = \int_0^L \overrightarrow{dP_M} = -\rho \cdot g \cdot h^2 \int_0^L dx \cdot \vec{y}$$

$$\overrightarrow{R_0} = -\rho \cdot g \cdot h^2 \cdot L \cdot \vec{y}$$

$$\overrightarrow{M_0} = \int_0^L \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dP_M} = \int_0^L \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \cdot g \cdot h^2 \cdot dx \\ 0 \end{pmatrix} = -\rho \cdot g \cdot h^2 \int_0^L x \cdot dx \cdot \vec{z}$$

$$\overrightarrow{M_0} = -\rho \cdot g \cdot h^2 \cdot \frac{L^2}{2} \cdot \vec{z}$$

On retrouve la résultante et le moment d'une charge linéique de valeur $-\rho \cdot g \cdot h^2$.

4 Portiques isostatiques

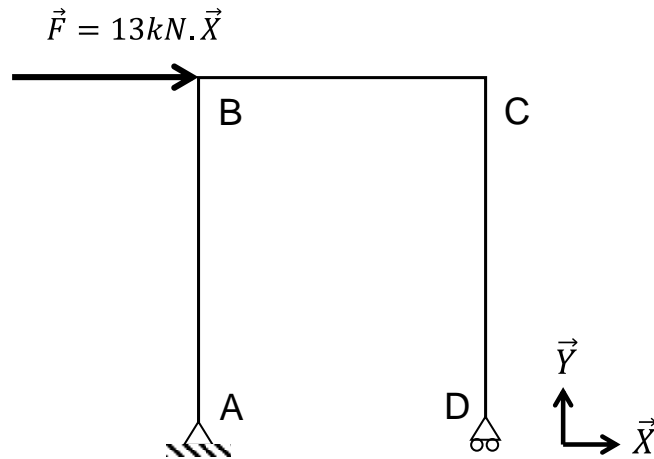
4.1 Exercice : portique

Soit le portique isostatique ci-dessous, de longueur L et de hauteur H .

La liaison en A est un appui (réaction en X et Y).

La liaison en D est un appui glissant (réaction en Y, déplacement possible en X).

Déterminer les réactions de liaison en A et D.



4.1.1 Exercice : portique

PFS

$$X_A + 13 = 0$$

$$Y_A + Y_D = 0$$

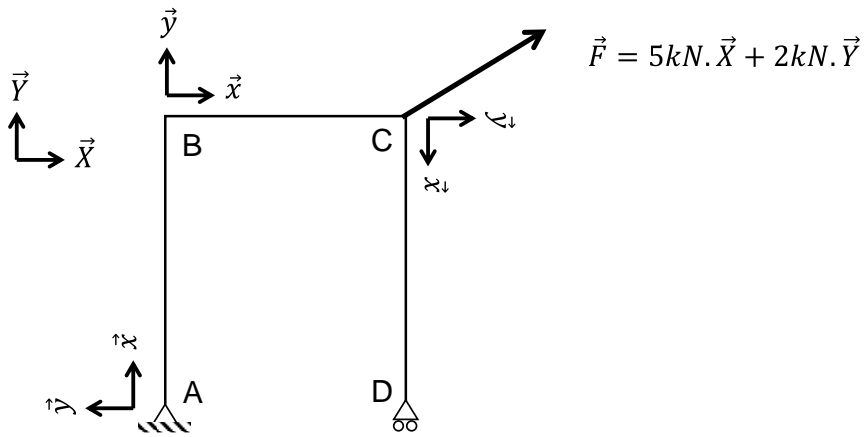
$-13.H + Y_D.L = 0$ (Somme des moments en A) donc

$$Y_D = 13.\frac{H}{L}$$

4.2 Exercice : portique

Soit le portique isostatique ci-dessous, de longueur $L=3\text{m}$ et de hauteur $h=4\text{m}$.

1. Déterminer les réactions de liaison en A et D
2. Tracer le diagramme du moment fléchissant M le long du portique



4.2.1 Exercice : portique

Le portique est isostatique.

PFS

$$X_A + 5 = 0$$

$$Y_A + Y_D + 2 = 0$$

- Somme des moments en A

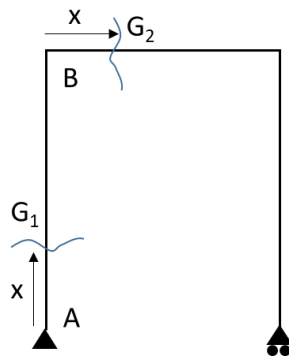
Le moment en A, dû à la force \vec{F} appliquée en C, a pour expression, dans le repère global :

$$\overline{M}_A(\vec{F}) = \overline{M}_C(\vec{F}) + \overline{AC} \wedge \vec{F} = \vec{0} + \begin{pmatrix} L \\ H \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2L - 5H \end{pmatrix}$$

Somme des moments en A suivant l'axe Z :

$$Y_D \cdot L + 2L - 5H = 0$$

$$\begin{cases} X_A = -5 \text{ kN} \\ Y_D = \frac{5H}{L} - 2 \\ Y_A = -\frac{5H}{L} \end{cases}$$



- Partie AB

Soit G_1 d'abscisse x sur la partie AB.

$$\overline{M}_{G_1}(\vec{F}) = \overline{M}_C(\vec{F}) + \overline{G_1C} \wedge \vec{F} = \vec{0} + \begin{pmatrix} L \\ H - x \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2L - 5(H - x) \end{pmatrix}$$

$$\overline{M}_{G_1}(Y_D) = \overline{M}_D(Y_D) + \overline{G_1D} \wedge Y_D \cdot \vec{Y} = \vec{0} + \begin{pmatrix} L \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ Y_D \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Y_D L \end{pmatrix}$$

$$M = 2L - 5(H - x) + Y_D L = 5x$$

- Partie BC

Soit G_2 d'abscisse x sur la partie BC.

$$\overline{M}_{G_2}(\vec{F}) = \overline{M}_C(\vec{F}) + \overline{G_2C} \wedge \vec{F} = \vec{0} + \begin{pmatrix} L-x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2(L-x) \end{pmatrix}$$

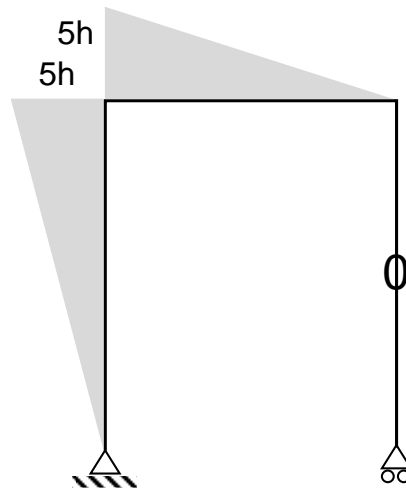
$$\overline{M}_{G_2}(Y_D) = \overline{M}_D(Y_D) + \overline{G_2D} \wedge Y_D \cdot \vec{Y} = \vec{0} + \begin{pmatrix} L-x \\ -H \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ Y_D \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Y_D(L-x) \end{pmatrix}$$

Le moment fléchissant a donc pour expression

$$M = 2(L-x) + Y_D(L-x) = \frac{5H}{L}(L-x)$$

- Partie CD

$$M = 0$$

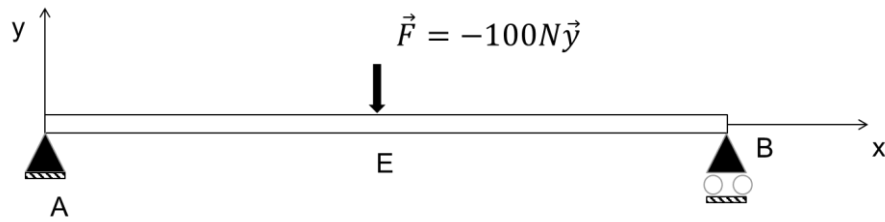


5 Poutres isostatiques en flexion

5.1 Exercice : poutre isostatique

Soit une poutre de longueur L , sollicitée par une force \vec{F} en E, à la distance $L/2$ de A.

1. Déterminer les efforts et moments en A et B
2. Déterminer le torseur de cohésion le long de la poutre
3. Construire les diagrammes des efforts normaux, tranchants et moments fléchissants



5.1.1 Exercice : poutre isostatique

Principe fondamental de la statique

$$X_A = 0$$

$$Y_A = Y_B = 50N$$

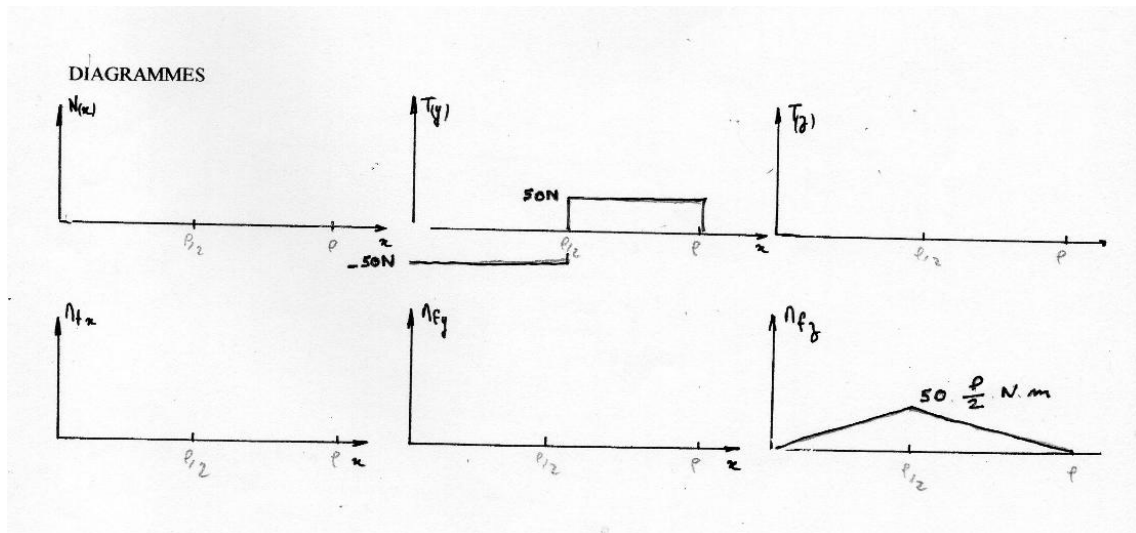
Torseur de cohésion

Pour $x \in [A ; E]$

$$[Action II \rightarrow I]_G = [Action ext \rightarrow II]_G = \begin{cases} -50N \cdot \vec{y} \\ 50x N \cdot m \vec{z} \end{cases}$$

Pour $x \in [E ; B]$

$$[Action II \rightarrow I]_G = [Action ext \rightarrow II]_G = \begin{cases} 50N \cdot \vec{y} \\ 50(L - x) N \cdot m \vec{z} \end{cases}$$



5.2 Exercice : poutre isostatique

Déterminer le diagramme des efforts tranchants et le diagramme des moments fléchissant dans la poutre ci-dessous.



5.2.1 Correction : poutre isostatique

PFS

$$Y_A + Y_B - F = 0$$

$$Y_B \cdot (a + b) - F \cdot a = 0$$

Donc

$$\begin{cases} Y_A = \frac{F \cdot b}{a + b} \\ Y_B = \frac{F \cdot a}{a + b} \end{cases}$$

Pour $0 < x < a$

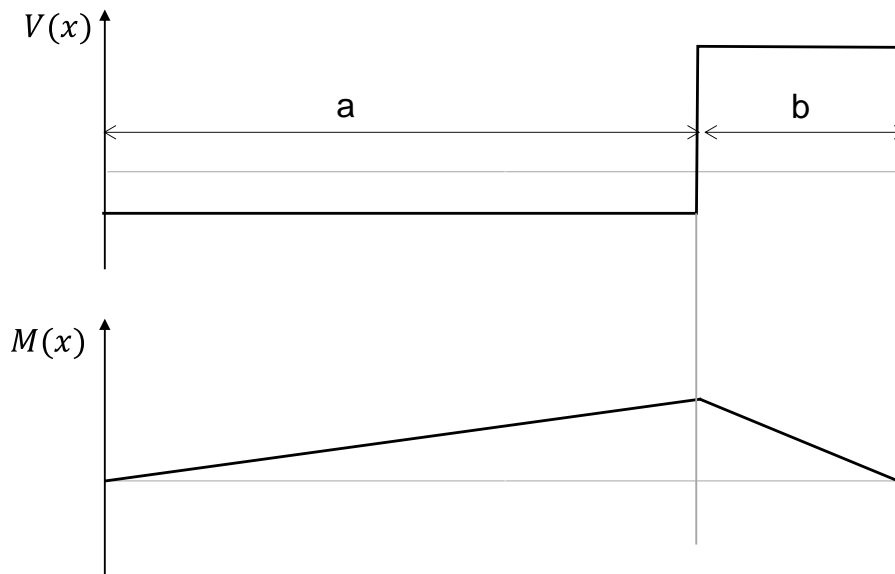
$$V(x) = -Y_A$$

$$M(x) = Y_A \cdot x = \frac{F \cdot b}{a + b} \cdot x$$

Pour $a < x < b$

$$V(x) = Y_B$$

$$M(x) = Y_B \cdot (a + b - x)$$



5.3 Exercice : poutre isostatique

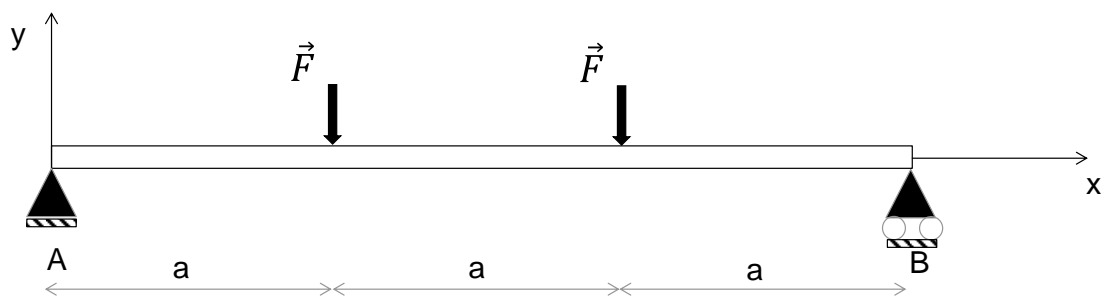
Soit la poutre ci-dessous.

$$\vec{F} = -1000N.\vec{y}$$

$$a=1m$$

Remarque : attention au schéma, le point A est aussi bloqué en X

1. Déterminer les efforts et moments en A et B
2. Déterminer le torseur de cohésion le long de la poutre
3. Construire les diagrammes des efforts et moments



5.3.1 Exercice : poutre isostatique

1/ PFS

En X : $X_a=0$

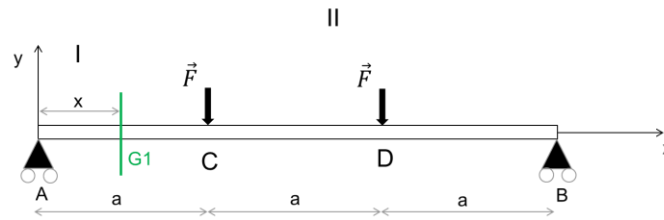
En Y : $Y_a - 2F + Y_b = 0$

Par symétrie du problème (géométrie, appuis et efforts) : $Y_a=Y_b$ donc **$Y_a=F$ et $Y_b=F$**

Pas de moment en A et B (appuis)

2/ Déterminer le torseur de cohésion le long de la poutre

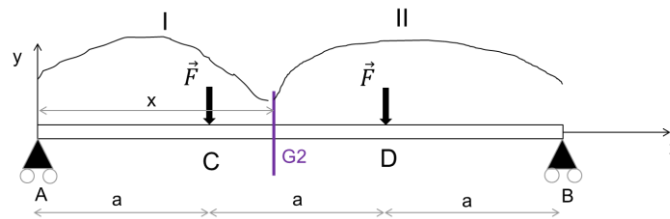
Pour une section d'abscisse x entre 0 et a, en G_1



$$\begin{cases} -2F\vec{y} + Y_b\vec{y} = -1000N.\vec{y} \\ M_f : \vec{G}_1\vec{C} \wedge \vec{F} + \vec{G}_1\vec{D} \wedge \vec{F} + \vec{G}_1\vec{B} \wedge Y_b\vec{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{R} = -1000N.\vec{y} \\ \vec{M} = 1000.x.\vec{z} \end{cases}$$

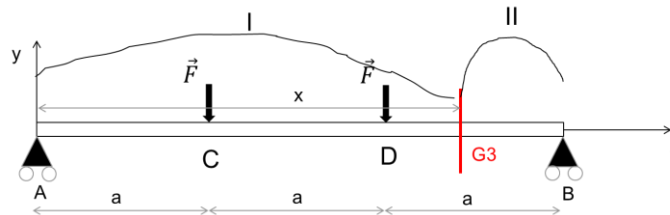
Pour une section d'abscisse x entre a et 2a, en G_2



$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M} = 1000.a.\vec{z} \end{cases}$$

Pour une section d'abscisse x entre 2a et 3a, en G_3

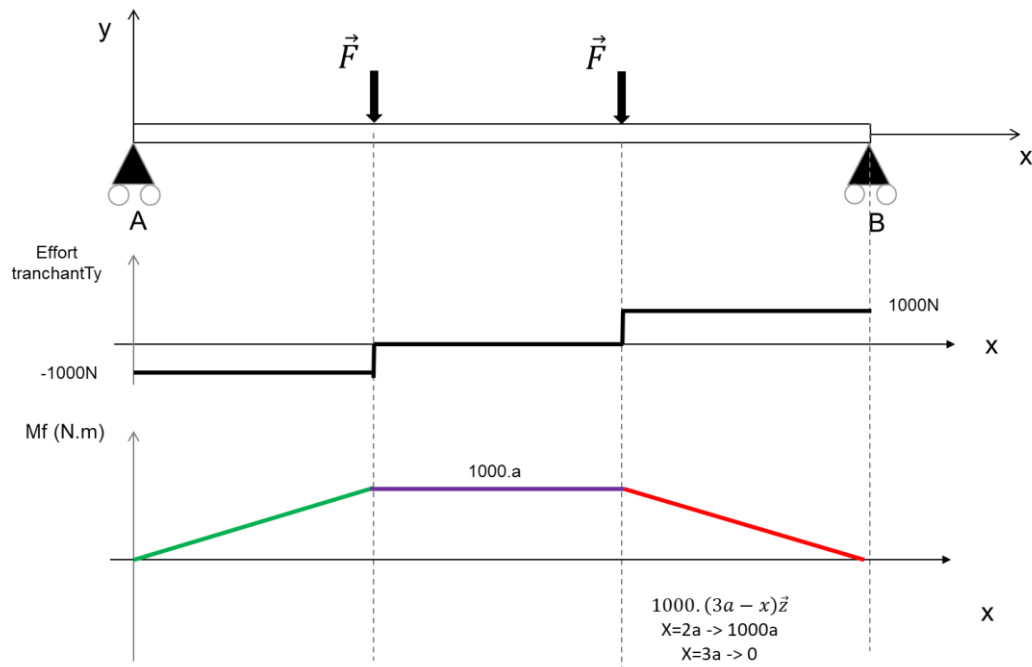
$$\begin{cases} \vec{R} = 1000N\vec{y} \\ \vec{M} = 1000.(3a - x)\vec{z} \end{cases}$$



3/ On parle de flexion 4 points : 2 points d'appui et deux forces.

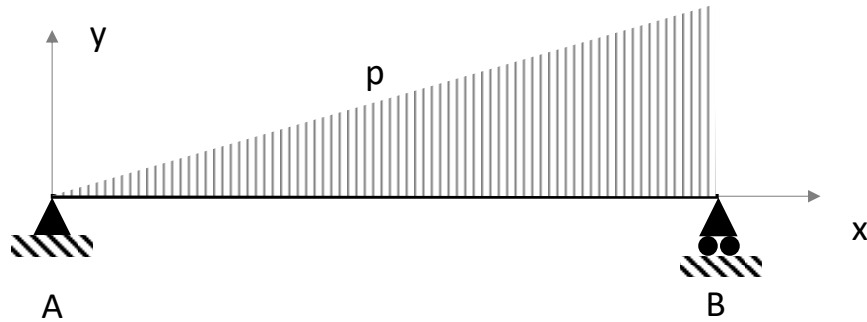
Effort normal : $N=0$ sur toute la poutre.

La flexion 4 points permet d'obtenir un état de flexion pure : entre les deux efforts, on a qu'un moment fléchissant et pas d'effort tranchant. On utilise souvent ce genre de montage pour solliciter des éprouvettes en flexion pure (assemblages soudés.....)



5.4 Exercice : poutre sur deux appuis, charge linéique croissante

Soit une poutre de longueur L et d'axe x , sur deux appuis A (appui) et B (appui glissant). Cette poutre est soumise à une charge linéique croissante p telle que l'effort total induit par cette charge sur la poutre soit P .



1/ On appelle a le coefficient directeur de la charge linéique. Par définition,

$$p(x) = a \cdot \frac{x}{L}$$

Montrer que

$$p(x) = \frac{2Px}{L^2}$$

2/ Calculer les réactions aux appuis A et B

3/ Calculer les efforts internes dans toute section de la poutre (effort normal, effort tranchant, moment fléchissant). On déterminera en particulier en quelle section le moment fléchissant est maximal et que vaut le moment fléchissant maximal.

5.4.1 Exercice : poutre sur deux appuis, charge linéique croissante

1/ Soit a le coefficient directeur de la charge linéique $p(x)$. Par définition,

$$P = \int_0^L p(x) dx = \int_0^L a \cdot \frac{x}{L} dx$$

Donc

$$P = \frac{aL}{2}$$

Donc

$$a = \frac{2P}{L}$$

Donc

$$p(x) = \frac{2Px}{L}$$

2/ PFS. Somme des forces : $X_A = 0$ et $Y_A + Y_B - P = 0$

Moment M dû à la charge linéique

$$M = \int_0^L x \cdot p(x) dx = \frac{2PL}{3}$$

Donc somme des moments en A :

$$-\frac{2PL}{3} + Y_B \cdot L = 0$$

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_B = \frac{2P}{3} \\ Y_A = \frac{P}{3} \end{cases}$$

3/ Efforts internes. Pour tout x le long de la poutre :

Effort normal

$$N(x) = 0$$

Effort tranchant

$$V(x) = \frac{2P}{3} - \int_x^L \frac{2Px}{L^2} dx = \frac{2P}{3} - \frac{2P}{L^2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_x^L = \frac{2P}{3} - \frac{P}{L^2} \cdot (L^2 - x^2)$$

$$V(x) = -\frac{P}{3} + \frac{Px^2}{L^2}$$

Moment fléchissant

Dans une section d'abscisse a le long de la poutre, le moment fléchissant a pour expression :

$$M = Y_B(L - a) - \int_a^L (x - a) \cdot \frac{2Px}{L^2} dx = \frac{Pa}{3} - \frac{Pa^3}{3L^2}$$

Donc dans une section d'abscisse x ,

$$M = \frac{Px}{3} - \frac{Px^3}{3L^2}$$

Remarque : on a bien

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{P}{3} - \frac{Px^2}{L^2} = -V(x)$$

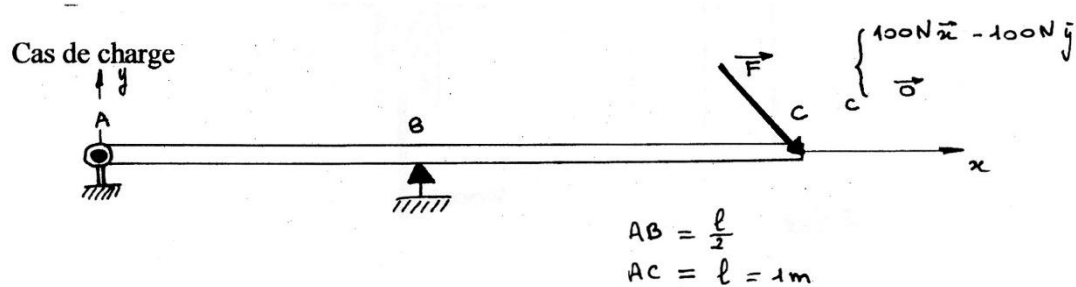
Le moment fléchissant est maximal lorsque $V(x)$ est nul :

$$V(x) = -\frac{P}{3} + \frac{Px^2}{L^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot L$$

$$M_{max} = \frac{2\sqrt{3}}{27} PL \approx 0,1283 \cdot PL$$

5.5 Exercice : effort dévié

Calculer l'expression du torseur de cohésion le long de la poutre et tracer les diagrammes des efforts internes.



5.5.1 Exercice : effort dévié

PFS

$$X_A = -100N$$

$$Y_A = -100N$$

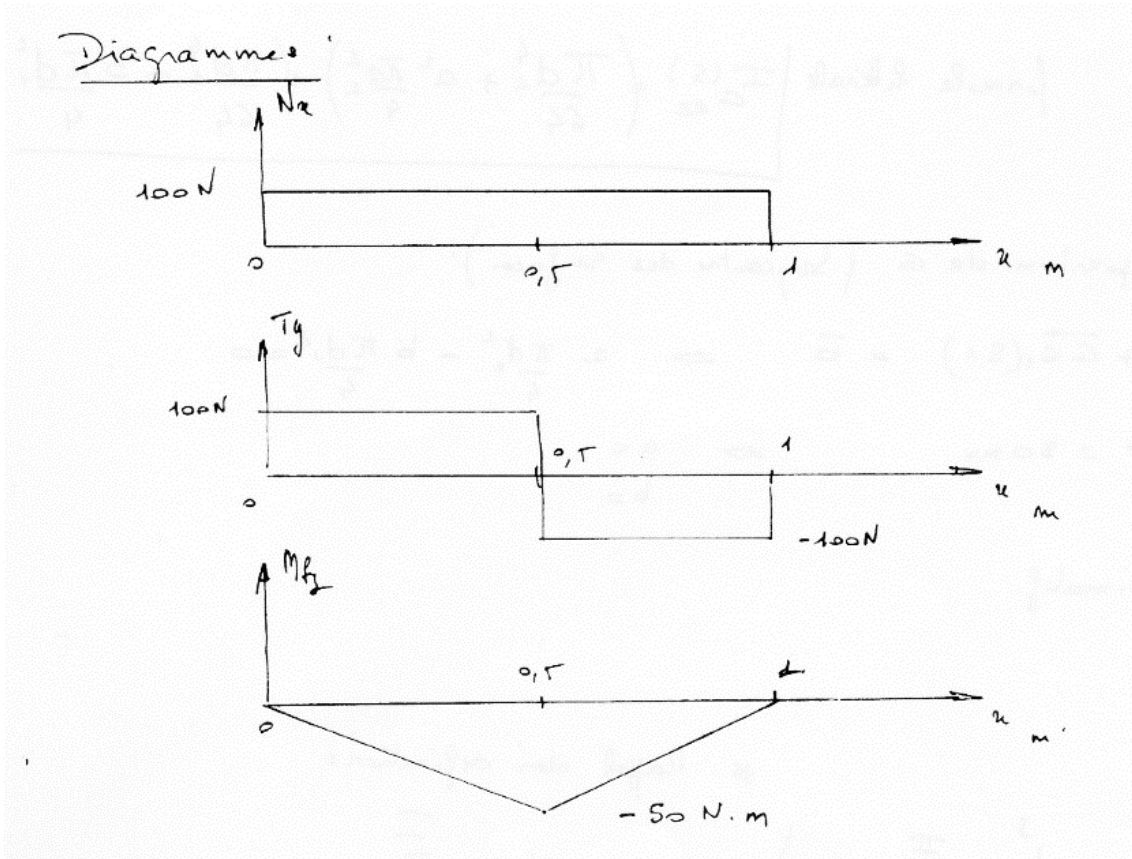
$$Y_B = 200N$$

Entre A et B

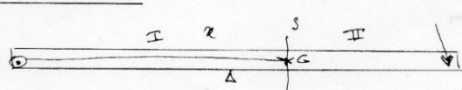
$$\begin{cases} 100N\vec{x} + 100N\vec{y} \\ -100 \cdot x \cdot \vec{z} \end{cases}$$

Entre B et C

$$\begin{cases} 100N\vec{x} - 100N\vec{y} \\ -100 \times (1-x) \cdot \vec{z} \end{cases}$$



Torseur de cohésion * Rappel des définitions



* Notion de coupe paramétrage

On isole la poutre calcul des actions extérieures

④ Problème plan, poids négligés

bilan des actions:

- [ext → poutre]_A liaison pivot $\begin{cases} \vec{R}_A = x_A \vec{x} + y_A \vec{y} \\ \vec{M}_A = \vec{0} \end{cases}$
- [ext → poutre]_B poutrelle $\begin{cases} \vec{R}_B = y_B \vec{y} \\ \vec{M}_B = \vec{0} \end{cases}$
- [F → poutre]_C $\begin{cases} 100 \text{ N } \vec{x} - 100 \text{ N } \vec{y} \\ \vec{0} \end{cases}$

PFs

théorème résultante: $\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_A = -100 \text{ N} \\ y_A = -100 \text{ N} \end{cases}$

théorème moments: $\vec{AB} \wedge \vec{R}_B + \vec{AC} \wedge \vec{F} + \vec{AA} \wedge \vec{R}_A = \vec{0} \Rightarrow y_B = +200 \text{ N}$

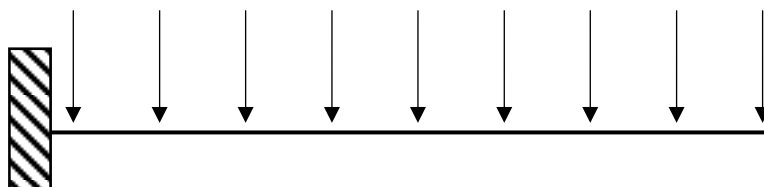
Calcul Torseurs de cohésion

x ∈ AB	x ∈ BC
on isole (I) Torseur cohésion = $-\begin{bmatrix} \text{Ext} \rightarrow \text{I} \end{bmatrix}$	on isole II Torseur de cohésion = $+\begin{bmatrix} \text{Ext} \rightarrow \text{II} \end{bmatrix}$

5.6 Exercice : moment fléchissant dû à une charge linéique constante

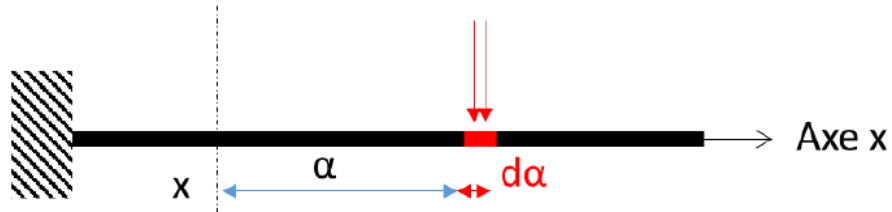
Soit la poutre ci-dessous d'axe x , soumise à une charge linéique q constante (N/m) tout le long de la poutre.

Déterminer le moment fléchissant dû à cette charge linéique.



5.6.1 Exercice : moment fléchissant dû à une charge linéique constante

Dans la section d'abscisse x , la force $q.d\alpha$ à la distance α de la section x exerce le moment $-\alpha.q.d\alpha$.

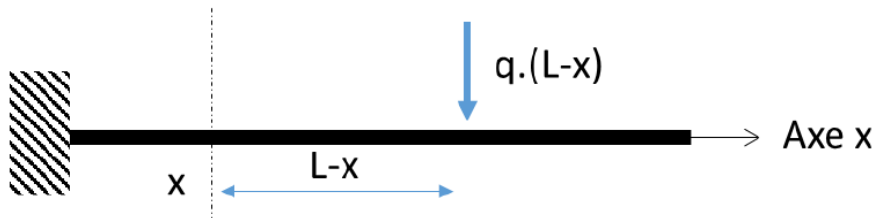


Il faut maintenant sommer (intégrer) l'ensemble entre 0 et $L-x$

$$M = \int_0^{L-x} -\alpha \cdot q \cdot d\alpha = \left[-q \cdot \frac{\alpha^2}{2} \right]_0^{L-x}$$

$$M(x) = -q \cdot \frac{(L-x)^2}{2}$$

Ce moment correspond à l'application d'une charge ponctuelle d'intensité $q \cdot (L-x)$ appliquée à la distance $(L-x)/2$ de la section d'abscisse x .



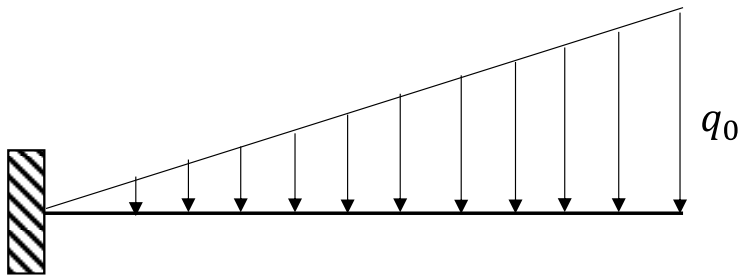
5.7 Exercice : moment fléchissant dû à une charge linéique non constante

Soit la poutre ci-dessous d'axe x , soumise à une charge linéique q (N/m) tout le long de la poutre telle que :

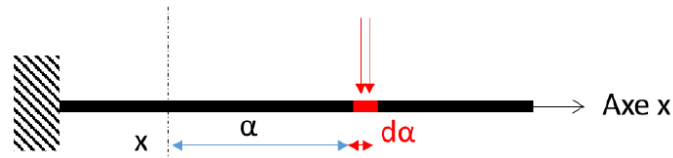
$$q = q_0 \cdot \frac{x}{L}$$

Avec q_0 constante.

Déterminer le moment fléchissant dû à cette charge linéique.



5.7.1 Exercice : moment fléchissant dû à une charge linéique non constante



Dans une section d'abscisse x , calculons le moment fléchissant dû à la charge en $x+\alpha$.

La charge linéique vaut dans la section d'abscisse $x+\alpha$:

$$q_0 \cdot \frac{x + \alpha}{L}$$

Appliquée sur la distance $d\alpha$, la force obtenue est $q_0 \cdot \frac{x+\alpha}{L} \cdot d\alpha$

Cette force applique un moment dM à la section d'abscisse x avec le bras de levier α tel que :

$$dM = -\alpha \cdot q_0 \cdot \frac{x + \alpha}{L} \cdot d\alpha$$

Le moment fléchissant total est donc

$$M = \int_0^{L-x} -\alpha \cdot q_0 \cdot \frac{x + \alpha}{L} \cdot d\alpha$$

$$M = \frac{q_0}{L} \cdot (L - x)^2 \cdot \left(-\frac{x}{2} - \frac{L - x}{3} \right)$$

Remarques

Pour $x=0$, $M = -\frac{q_0}{3} \cdot L^2$ on retrouve l'application d'une force d'intensité $\frac{q_0 L}{2}$ (aire du triangle), exercée au centre de gravité du triangle, soit en $x = \frac{2}{3}L$

Pour $x=L$, on a bien $M=0$.

5.8 Exercice : moment fléchissant, poutre sur deux appuis, charge linéique variable

Soit une dalle ABCD en béton armé telle que ci-dessous [3].

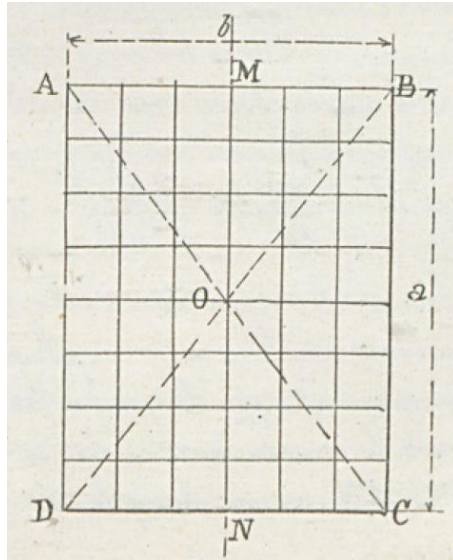
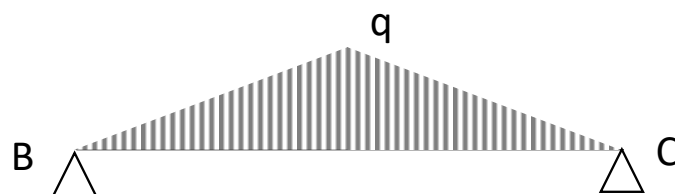


Figure 5. Dalle ABCD [3]

On propose de calculer le moment fléchissant maximal dans la poutre BC. On suppose que la poutre BC reprend la partie de la charge correspondant au triangle BOC. On peut ainsi modéliser la poutre BC comme une poutre sur deux appuis, soumise à une charge q linéique croissante entre B et le centre de la poutre et décroissante entre le centre de la poutre et C.

1/ Déterminer le moment fléchissant maximal dans la poutre



5.8.1 Exercice : moment fléchissant, poutre sur deux appuis, charge linéique variable

En un point d'abscisse x compris entre $x = 0$ et $x = \frac{L}{2}$, le moment fléchissant a pour expression :

$$M(x) = \frac{qL}{4} \cdot x - \frac{x}{3} \cdot \frac{qx}{2}$$

Le moment fléchissant est maximal en $L/2$

$$M_{max} = M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{qL}{4} \cdot \frac{L}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{qL}{2} = \frac{qL^2}{8} - \frac{qL^2}{24}$$

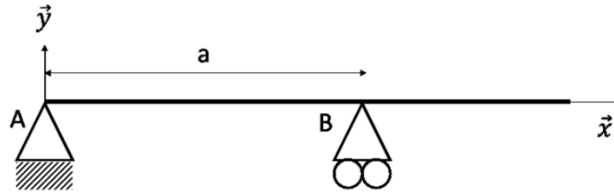
$$M_{max} = \frac{qL^2}{12}$$

5.9 Exercice : poutre en flexion : influence de la position de l'appui

Soit une poutre de longueur L reposant sur deux appuis A et B.

La distance entre A et B est appelée a , avec $a \leq L$. La poutre est donc en porte-à-faux entre B et son extrémité.

On applique une charge linéique q (en N/m) sur toute la poutre.



1/ Déterminer les réactions Y_A et Y_B aux appuis en A et B en fonction de la q , L et a .

On propose d'étudier l'influence de l'emplacement de l'appui B (donc l'influence de a) sur la valeur des réactions aux appuis.

On considère que

$$0,2.L \leq a \leq L$$

2/ Etudier les variations de Y_A en fonction de a

3/ Etudier les variations de Y_B en fonction de a

4/ Tracer sur un même graphe, en fonction de a , les réactions Y_A et Y_B , et $Y_A + Y_B$, pour $q = 2 \text{ kN/m}$ et $L = 5 \text{ m}$.

5.9.1 Exercice : poutre en flexion : influence de la position de l'appui

1/ Principe Fondamental de la Statique

$$Y_A + Y_B - q \cdot L = 0$$

$$Y_B \cdot a - q \cdot \frac{L^2}{2} = 0$$

Donc

$$Y_B = q \cdot \frac{L^2}{2a}$$

$$Y_A = -Y_B + qL = q \cdot \frac{L^2}{2a} + qL = \frac{-qL^2 + 2qLa}{2a} = qL \cdot \frac{(-L + 2a)}{2a}$$

2/

$$Y_A'(x) = qL \cdot \frac{4a - 2(2a - L)}{4a^2} = qL \cdot \frac{2L}{4a^2}$$

Pour tout x de I, $Y_A'(x) > 0$ donc la fonction g est strictement croissante

$$\lim_{x \rightarrow 0, 2L} Y_A = -\frac{3qL}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow L} g(x) = \frac{qL}{2}$$

3/

$$Y_B = q \cdot \frac{L^2}{2a}$$

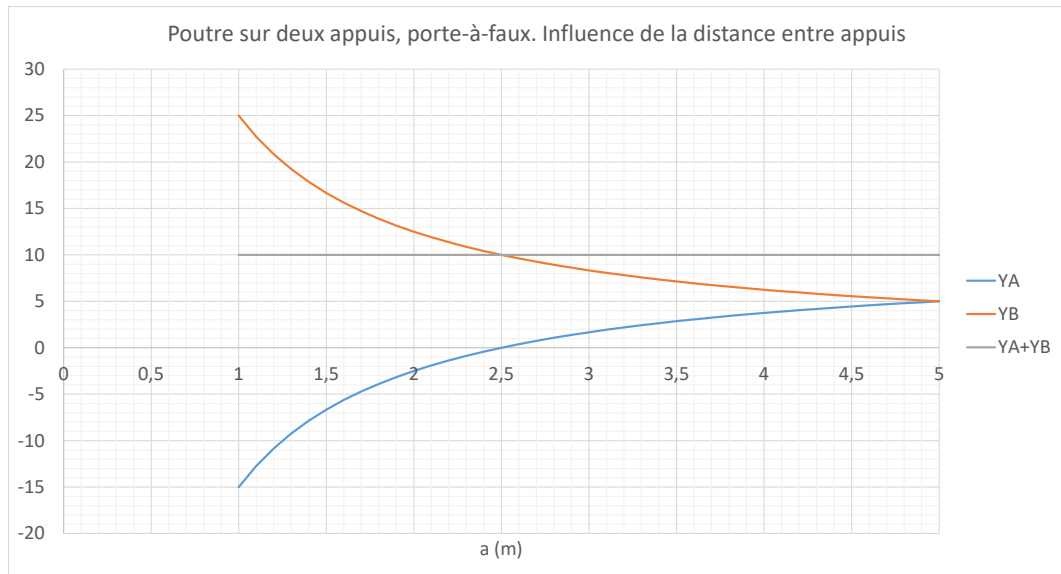
$$Y_B'(a) = -\frac{qL^2}{2} \cdot \frac{1}{a^2}$$

Pour tout x de I, $Y_B'(a) < 0$ donc la fonction Y_B est strictement décroissante

$$\lim_{x \rightarrow 0, 2L} f(x) = \frac{qL}{0,4} = 2,5qL$$

$$\lim_{x \rightarrow L} f(x) = \frac{qL}{2}$$

4/

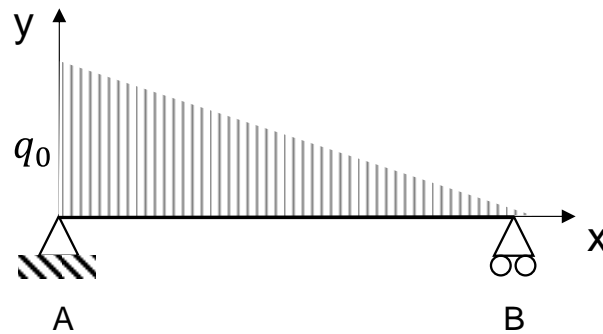


5.10 Exercice : poutre sur deux appuis avec charge linéique variable

Soit une poutre sur deux appuis A et B, de longueur L, d'axe x, soumise à une charge linéique q telle que

$$q = q_0 - q_0 \cdot \frac{x}{L}$$

On pose $x=0$ en A.



Déterminer les réactions d'appui en A et B.

5.10.1 Exercice : poutre sur deux appuis avec charge linéique variable

Principe Fondamental de la Statique

$$X_A = 0$$

$$Y_A + Y_B - \frac{q_0 L}{2} = 0$$

Somme des moments en A : soit M_q le moment dû à la charge linéique

$$Y_B \cdot L + M_q = 0$$

$$M_q = - \int_0^L \left(q_0 - q_0 \cdot \frac{x}{L} \right) \cdot x \cdot dx = - \int_0^L \left(q_0 \cdot x - q_0 \cdot \frac{x^2}{L} \right) dx$$

$$M_q = - \left[q_0 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{q_0}{L} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^L = -q_0 \cdot \frac{L^2}{2} + \frac{q_0}{L} \cdot \frac{L^3}{3} = -q_0 \cdot L^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

$$M_q = -q_0 \cdot L^2 \cdot \frac{1}{6} = -q_0 \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot L$$

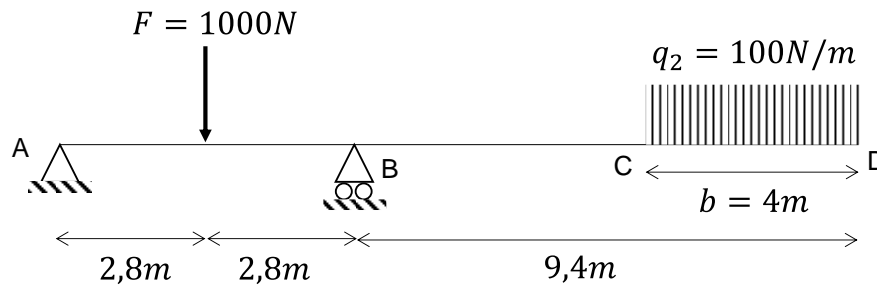
On retrouve le moment dû à une charge ponctuelle d'intensité $q_0 \cdot \frac{L}{2}$ appliquée au centre de gravité du triangle donc appliquée en $L/3$.

$$Y_B = q_0 \cdot L \cdot \frac{1}{6}$$

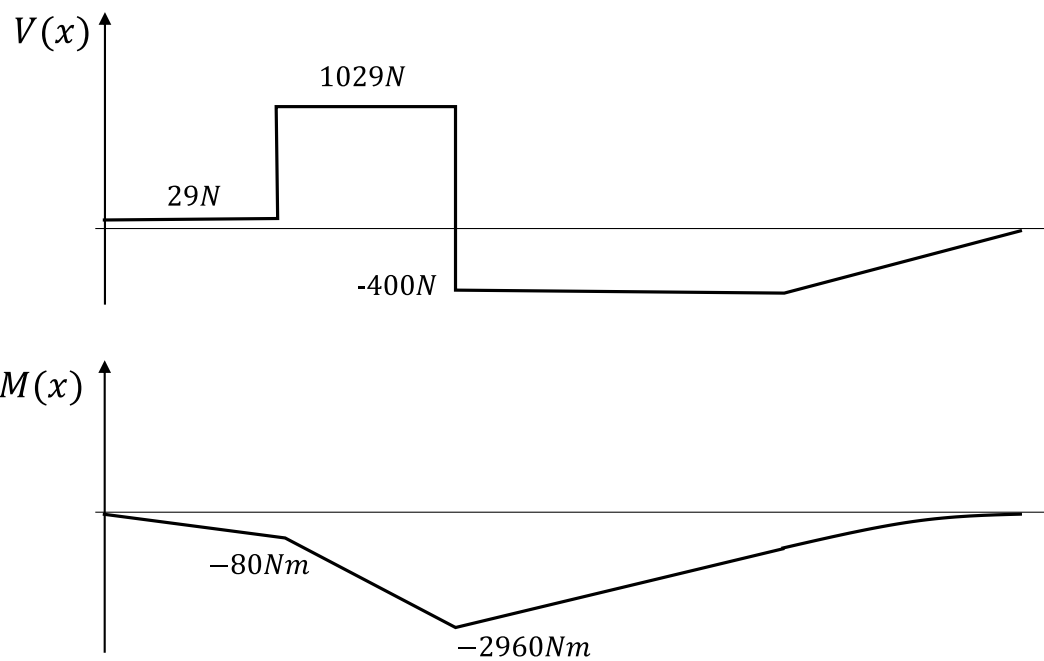
$$Y_A = -q_0 \cdot L \cdot \frac{1}{6} + \frac{q_0 L}{2} = q_0 \cdot L \cdot \frac{2}{6}$$

5.11 Exercice : poutre isostatique

Déterminer le diagramme des efforts tranchants et le diagramme des moments fléchissant dans la poutre ci-dessous.



5.11.1 Exercice : poutre isostatique



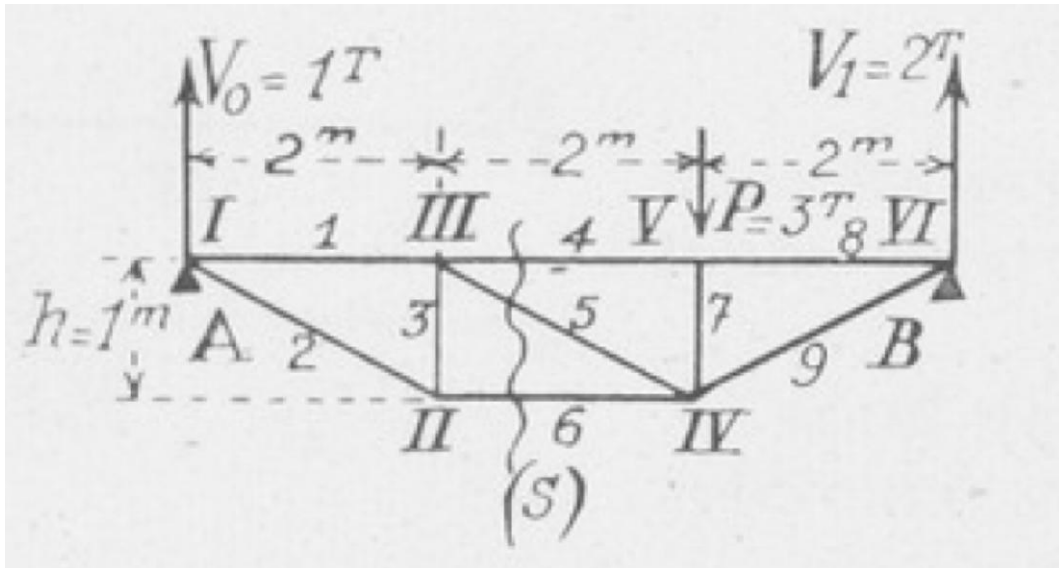
6 Treillis isostatiques

6.1 Exercice : treillis 1 [6]

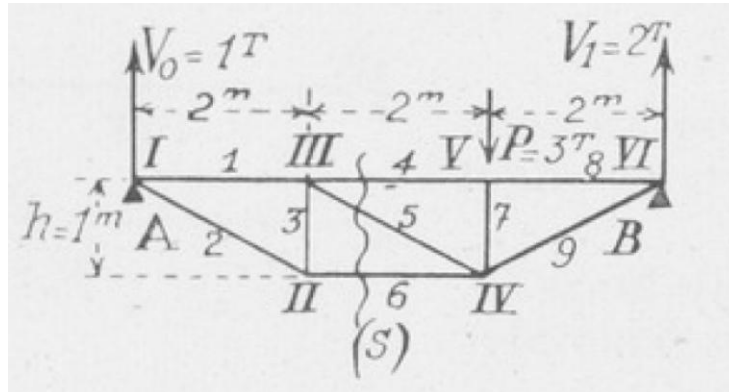
Les nœuds sont numérotés de I à VI. Une force $P = -3$ Tonnes est appliquée au nœud V.

1/ Déterminer les réactions d'appui en A et B

2/ En déduire les efforts dans les barres 1 à 9



6.1.1 Exercice : treillis 1 [6]



Mesurés à l'échelle des forces, on a les résultats ci-dessous (compression +, traction -) :

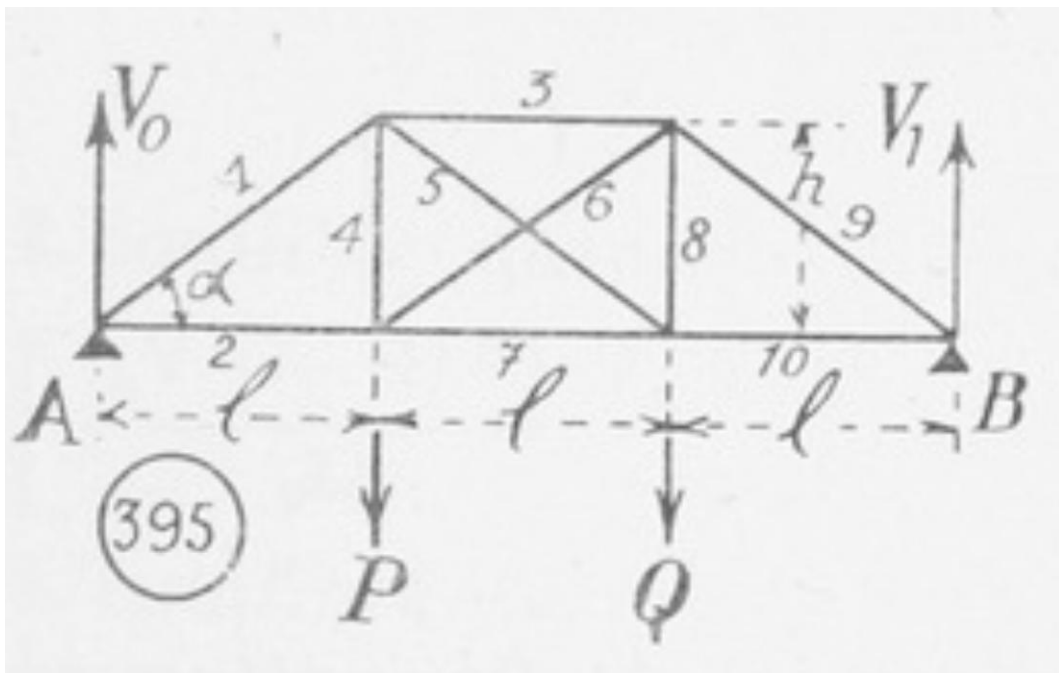
Barres	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Efforts en tonnes...	2;	-2,4;	1;	4;	-2,4;	-2;	3;	4;	-4,5

6.2 Exercice : treillis 2 [6]

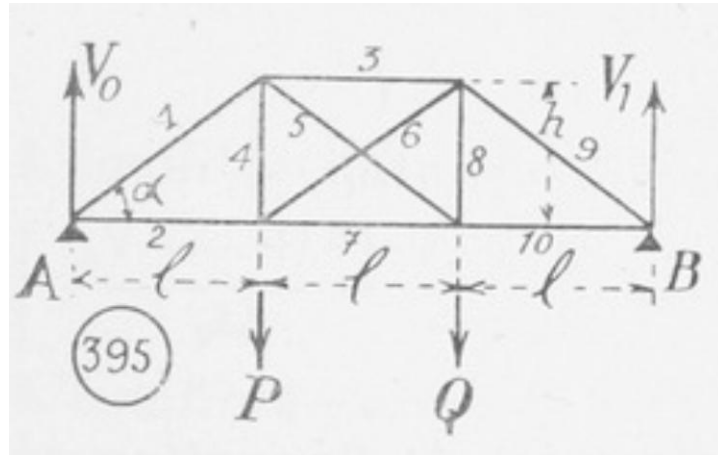
Soit le treillis articulé ci-dessous. Les barres sont surabondantes et on ne peut pas déterminer les efforts normaux dans toutes les barres avec seulement l'équilibre des nœuds.

On peut cependant, par l'équilibre des nœuds, calculer N_1, N_2, N_9, N_{10} en fonction de P et Q .

1. Appliquer le PFS pour exprimer les réactions $Y_A = V_0$ et $Y_B = V_1$ en A et B en fonction des efforts P et Q
2. Exprimer N_1, N_2, N_9, N_{10} en fonction de P et Q .



6.2.1 Exercice : treillis 2 [6]



1/ PFS

$$\begin{aligned}
 Y_A + Y_B - P - Q &= 0 \\
 Y_B \cdot 3L - P \cdot L - 2Q \cdot L &= 0 \\
 Y_B &= \frac{P + 2Q}{3}; Y_A = \frac{2P + Q}{3}
 \end{aligned}$$

2/

Equilibre du nœud A

$$\begin{aligned}
 -N_1 \cdot \cos \alpha - N_2 &= 0 \\
 -N_1 \cdot \sin \alpha + Y_A &= 0 \\
 \left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{Y_A}{\sin \alpha} \\ N_2 = -N_1 \cdot \cos \alpha = -\frac{Y_A}{\tan \alpha} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Equilibre du nœud B

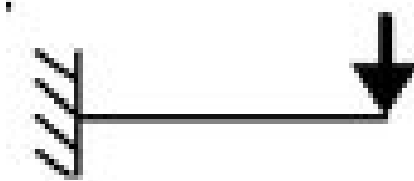
$$\begin{aligned}
 N_9 \cdot \cos \alpha + N_{10} &= 0 \\
 -N_9 \cdot \sin \alpha + Y_B &= 0
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_9 = \frac{Y_B}{\sin \alpha} \\ N_{10} = -\frac{Y_B}{\tan \alpha} \end{array} \right.$$

7 Loi de comportement d'une poutre en flexion

7.1 Exercice : flèche d'une poutre console sollicitée en flexion

Soit une poutre longueur L section constante S sur toute sa longueur, encastrée à une extrémité et soumise à un effort P à l'autre extrémité.

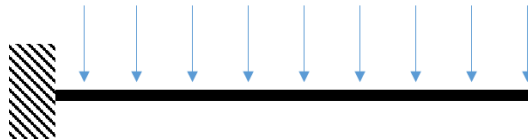


Dans une section d'abscisse x (axe de la poutre), la relation entre le moment fléchissant $M_f(x)$ et la dérivée seconde de la flèche $y''(x)$ est donnée par

$$M_f(x) = EI \cdot y''(x)$$

Q1/ En déduire la flèche en bout de poutre induite par l'effort P .

Q2/ Reprendre l'exercice pour la flèche d'une poutre soumise à un effort réparti q en N/m tout le long de la poutre



7.1.1 Exercice : flèche d'une poutre console sollicitée en flexion

$$Mf(x) = EI \cdot y''(x)$$

Moment fléchissant dans une section x

$$Mf(x) = -P \cdot (L - x)$$

$$y'' = \frac{Mf}{EI} = \frac{-P}{EI} \cdot (L - x)$$

$$y' = \frac{-P}{EI} \cdot \left(L \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) + A$$

$$y(x) = \frac{-P}{EI} \cdot \left(L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right) + Ax + B$$

Conditions aux limites : encastrement en x=0

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Donc

$$A = 0$$

$$B = 0$$

Donc

$$y(x) = \frac{-P}{EI} \cdot \left(L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right)$$

En x=L,

$$y(L) = \frac{-P}{EI} \cdot \left(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{6} \right)$$

$$y(L) = \frac{-PL^3}{3EI}$$

Q2/ Dans la section X, on sait que le moment revient à un effort de valeur q.(L-x), appliquée entre X et L donc à l'abscisse (X+L)/2 donc

$$Mf(X) = -q \cdot (L - X) \cdot \frac{L - X}{2} = -\frac{q}{2} \cdot (L^2 - 2XL + X^2)$$

$$y'' = \frac{Mf}{EI} = \frac{-q}{2EI} \cdot (L^2 - 2XL + X^2)$$

$$y' = \frac{-q}{2EI} \cdot \left(L^2 \cdot X - LX^2 + \frac{X^3}{3} \right) + A$$

$$y = \frac{-q}{2EI} \cdot \left(L^2 \cdot \frac{X^2}{2} - L \frac{X^3}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{X^4}{4} \right) + AX + B$$

Conditions aux limites : encastrement en X=0

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Donc A=0 et B=0

$$y = \frac{-q}{2EI} \cdot \left(L^2 \cdot \frac{X^2}{2} - L \frac{X^3}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{X^4}{4} \right)$$

En $X=L$

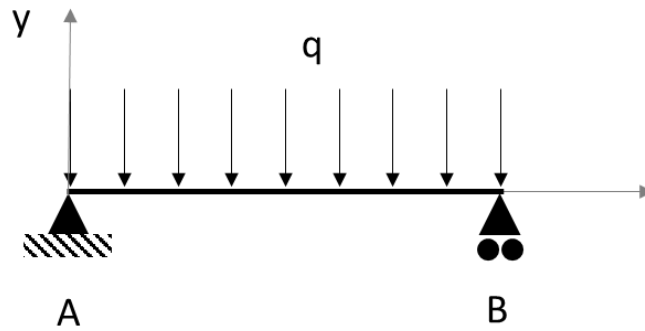
$$y = \frac{-q}{2EI} \cdot \left(L^2 \cdot \frac{L^2}{2} - L \frac{L^3}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{L^4}{4} \right)$$
$$y = \frac{-q \cdot L^4}{2EI} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right) = \frac{-q \cdot L^4}{2EI} \cdot \left(\frac{6 - 4 + 1}{12} \right) = \frac{-q \cdot L^4}{2EI} \cdot \frac{3}{12}$$

$$y(L) = \frac{-q \cdot L^4}{8EI}$$

7.2 Exercice : flèche d'une poutre isostatique en flexion

Soit une poutre de longueur L , axe x , module d'Young E , moment quadratique I , soumise à une charge linéique q orientée suivant $-y$.

Déterminer l'équation de la déformée $y(x)$ le long de la poutre.



7.2.1 Exercice : flèche d'une poutre isostatique en flexion

Principe fondamental de la statique

$$R_{yB} = R_{yA} = q \cdot \frac{L}{2}$$

$$Mf = EIy''$$

$$Mf = \frac{qL}{2} \cdot (L - x) - q \cdot (L - x) \cdot \frac{L - x}{2}$$

Donc

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{Mf}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{q}{2} (L \cdot (L - x) - (L - x)^2) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{q}{2} (L^2 - xL - (L^2 - 2xL + x^2)) \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{q}{2} (xL - x^2) \end{aligned}$$

Donc

$$y' = \frac{q}{2EI} \cdot \left(L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + A$$

$$y = \frac{q}{2EI} \cdot \left(L \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{1}{12} \cdot x^4 \right) + Ax + B$$

 $y(0) = 0$ donc $B=0$. De plus $y(L) = 0$ donc

$$y = \frac{q}{2EI} \cdot \left(\frac{L^4}{6} - \frac{1}{12} L^4 \right) + AL = 0$$

Donc

$$A = -\frac{q \cdot L^3}{2EI} \cdot \frac{1}{12}$$

Donc

$$y = \frac{q}{2EI} \cdot \left(L \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{1}{12} \cdot x^4 \right) - \frac{q \cdot L^3}{2EI} \cdot \frac{1}{12} x$$

Pour $x=L/2$

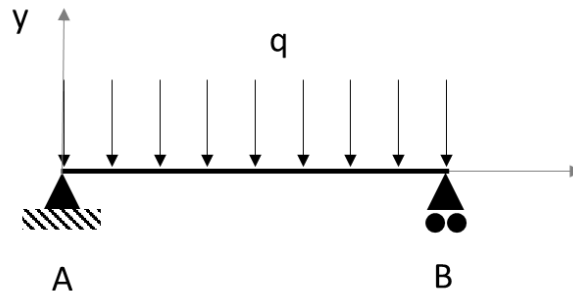
$$y = \frac{q}{2EI} \left(\frac{L^4}{6 \cdot 8} - \frac{1}{12} \cdot \frac{L^4}{16} \right) - \frac{q \cdot L^3}{2EI} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{L}{2}$$

$$y = \frac{q}{2EI} \cdot L^4 \cdot \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{24} \right) = \frac{q}{EI} \cdot L^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{384} - \frac{2}{384} - \frac{16}{384} \right) = \frac{q}{EI} \cdot L^4 \cdot \frac{-5}{384}$$

$$y = \frac{-5 q \cdot L^4}{384 EI}$$

7.3 Exercice : flèche d'une poutre en flexion

Soit une poutre de longueur L , axe x , module d'Young E , moment quadratique I , soumise à une charge linéique q orientée suivant $-y$.



1/ Déterminer l'équation de la déformée $y(x)$ le long de la poutre.

2/ La poutre est en acier. La section est pleine et carrée. Déterminer le côté a de la section pour que la flèche ne dépasse pas $1/500^{\text{ème}}$ de la longueur L .

3/ On souhaite utiliser une poutre rectangulaire de largeur b en z , hauteur h en y . Tracer h et y en fonction de la masse de la poutre, dans le respect du critère sur la flèche. Quelles valeurs pour b et h peut-on proposer pour diviser la masse de la poutre dimensionnée en question 1 ?

4/ Quelle modification supplémentaire de la conception pourrions-nous opérer pour encore diminuer la masse de la structure ?

Données :

- Module d'Young $E=210\,000\text{ MPa}$
- Masse volumique acier 7800 kg/m^3
- Longueur $L=5\text{m}$
- $q = 2\text{ kN/m}$

7.3.1 Exercice : flèche d'une poutre en flexion

1/ Principe fondamental de la statique

$$R_{yB} = R_{yA} = q \cdot \frac{L}{2}$$

$$Mf = EIy''$$

$$Mf = \frac{qL}{2} \cdot (L-x) - q \cdot (L-x) \cdot \frac{L-x}{2}$$

Donc

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{Mf}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{q}{2} (L \cdot (L-x) - (L-x)^2) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{q}{2} (L^2 - xL - (L^2 - 2xL + x^2)) \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{q}{2} (xL - x^2) \end{aligned}$$

$$y' = \frac{q}{2EI} \cdot \left(L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + A$$

$$y = \frac{q}{2EI} \cdot \left(L \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{1}{12} \cdot x^4 \right) + Ax + B$$

$y(0) = 0$ donc $B=0$. De plus $y(L) = 0$ donc

$$y = \frac{q}{2EI} \cdot \left(\frac{L^4}{6} - \frac{1}{12} L^4 \right) + AL = 0 \Rightarrow A = -\frac{q \cdot L^3}{2EI} \cdot \frac{1}{12}$$

Donc

$$y = \frac{q}{2EI} \cdot \left(L \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{1}{12} \cdot x^4 \right) - \frac{q \cdot L^3}{2EI} \cdot \frac{1}{12} x$$

Pour $x=L/2$

$$y = \frac{q}{2EI} \left(\frac{L^4}{6 \cdot 8} - \frac{1}{12} \cdot \frac{L^4}{16} \right) - \frac{q \cdot L^3}{2EI} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{L}{2}$$

$$y = \frac{q}{2EI} \cdot L^4 \cdot \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{24} \right) = \frac{q}{EI} \cdot L^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{384} - \frac{2}{384} - \frac{16}{384} \right) = \frac{q}{EI} \cdot L^4 \cdot \frac{-5}{384}$$

$$y_{max} = \frac{-5 q \cdot L^4}{384 EI}$$

2/ Si l'on veut $|y_{max}| = \frac{L}{500}$ alors

$$\frac{5q \cdot L^4}{384E \cdot \frac{a^4}{12}} = \frac{L}{500}$$

$$\frac{5q \cdot L^3}{32E \cdot a^4} = \frac{1}{500}$$

$$32E \cdot a^4 = 2500qL^3$$

$$a = \sqrt[4]{\frac{2500qL^3}{32E}}$$

$$a = 9,82\text{cm}$$

Masse

$$m = \rho a^2 L$$

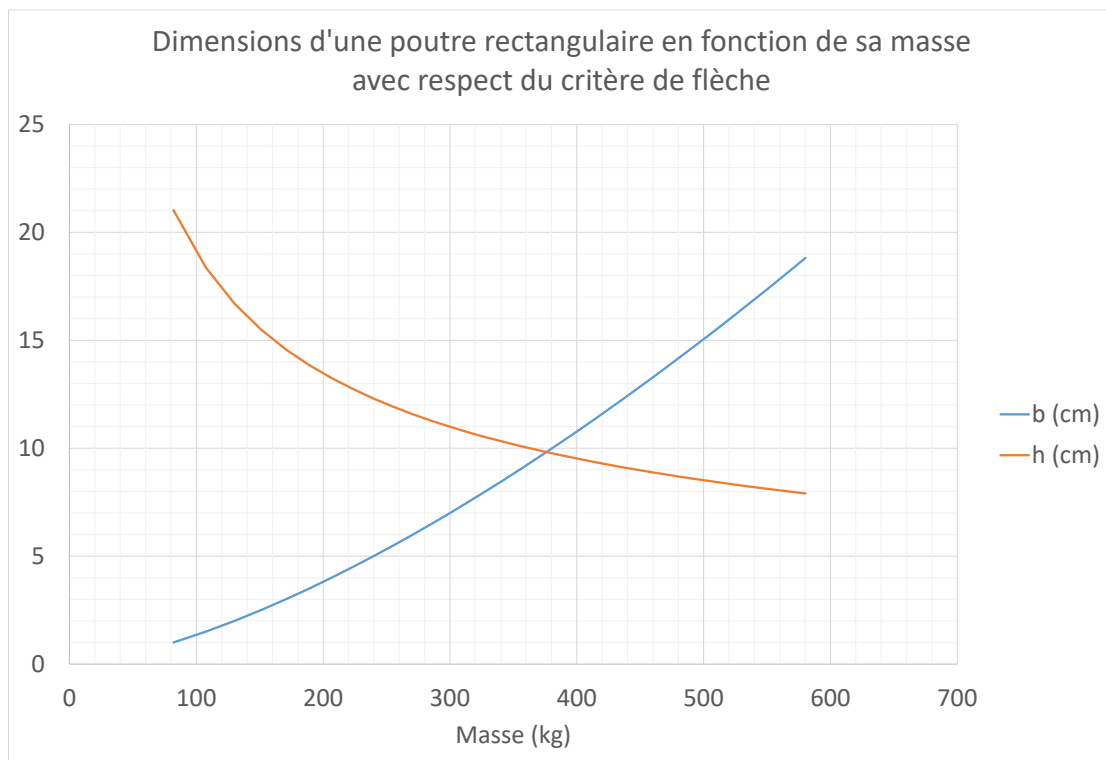
3/ Soit une section de largeur b suivant z , hauteur h .

$$I_{Gz} = b \cdot \frac{h^3}{12}$$

On veut le même moment quadratique pour respecter le critère de la flèche

$$b \cdot \frac{h^3}{12} = \frac{a^4}{12} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{a^4}{b}}$$

$$m = \rho b h L = \rho b \cdot \sqrt[3]{\frac{a^4}{b}} \cdot L$$

On a tracé ci-dessous b en fonction de la masse m .

4/ Poutre creuse

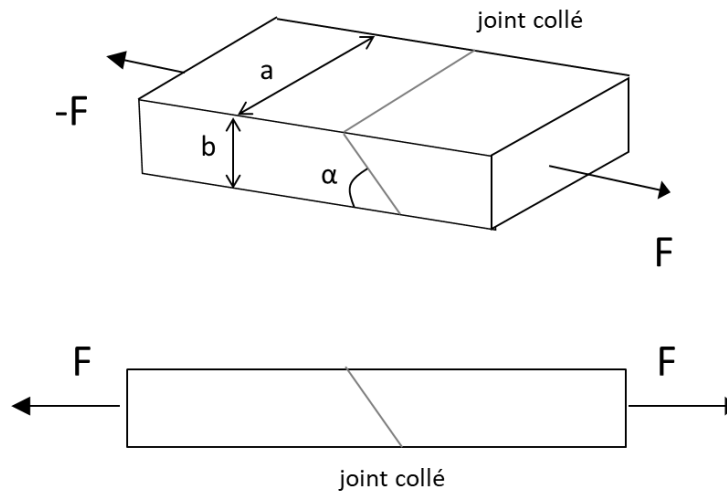
8 Estimation des contraintes

8.1 Exercice : traction et cisaillement d'un joint collé

Soient deux poutres en bois de section rectangulaire, collées comme le montre la figure ci-dessous. Un effort de traction $F=400$ daN est appliqué.

On donne $a=120$ mm ; $b=80$ mm ; $\alpha=65^\circ$

Calculer la contrainte normale et la contrainte tangentielle dans le joint collé



8.1.1 Exercice : traction et cisaillement d'un joint collé

Soient F_n l'effort normal sur le joint collé et F_t l'effort de cisaillement

On a : $\cos \alpha = F_t / F$; $\sin \alpha = F_n / F$

La section considérée est $S = a.b / \sin \alpha$

Contrainte normale : $F_n/S = 0.342 \text{ MPa}$; contrainte tangentielle $F_t/S = 0.160 \text{ MPa}$

8.2 Exercice : équilibre des forces dans une section soumise à un moment

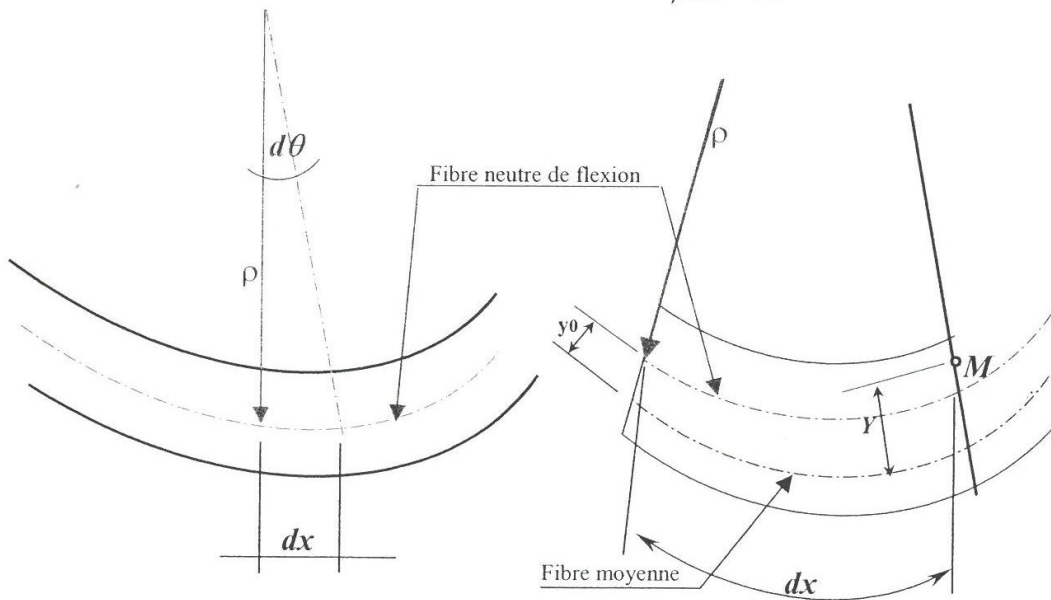
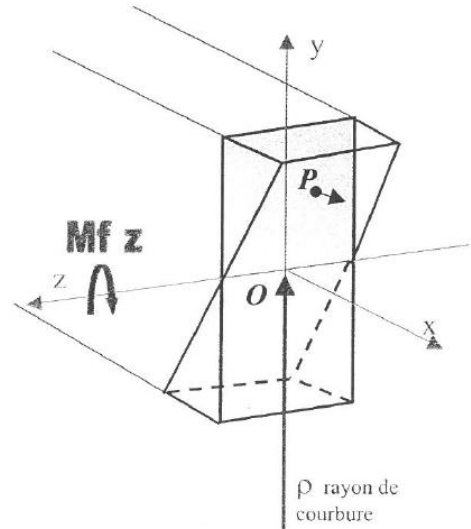
Soit une poutre de section S , module d'Young E , soumise à un moment fléchissant M_f ,

Apports théoriques : un peu de géométrie

Hypothèse de Bernoulli : les sections droites restent planes après déformation.

Soit ρ le rayon de courbure de la fibre neutre de flexion, alors

$$\rho \cdot d\theta = dx$$



La fibre neutre ne s'allonge pas $\implies \rho \cdot d\theta = dx =$ longueur d'un élément de volume

Rayon de courbure au point $M : = (\rho + y_0 - Y)$

Allongement unitaire Δl de la fibre au point M de cote $Y : = (\rho + y_0 - Y)d\theta - \rho d\theta = \Delta l$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{(y_0 - Y)d\theta}{dx} = \frac{(y_0 - Y)}{\rho}$$

On suppose que la fibre moyenne et la fibre neutre de flexion sont confondues, alors $y_0 = 0$ et

$$\varepsilon_{xx} = \frac{-y}{\rho}$$

De plus on a

$$y''(x) = \frac{1}{\rho}$$

Questions

Le moment fléchissant est donné par

$$M_f = \iint_S (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{T}) dS$$

Avec

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

σ_{xx} contrainte normale dans la section, au point P.

Questions

Q1/ Calculer $\overrightarrow{OP} \wedge \vec{T}$

Q2/ En déduire que

$$M_{fz} = \iint_S z \cdot \sigma_{xx} \cdot dS \cdot \vec{y} - \iint_S y \cdot \sigma_{xx} \cdot dS \cdot \vec{z}$$

La loi de Hooke, en négligeant les autres contraintes, donne

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx}$$

De plus, les axes z et y étant axes principaux d'inertie, on a

$$\iint zy dS = 0$$

$$\iint y^2 dS = I_z$$

Q3/ En déduire l'expression de M_f en fonction de E, I_z et y'' (modifier l'expression de σ_{xx} dans l'expression de M_f obtenue en Q2)

Q4/ En déduire l'expression de $\sigma_{xx}(y)$ en fonction de M_f , I_z et y

8.2.1 Exercice : équilibre des forces dans une section soumise à un moment

$$\vec{OP} \wedge \vec{T} = \begin{vmatrix} 0 & \vec{x} \\ z \times \sigma_{xx} & \vec{y} \\ -y \times \sigma_{xx} & \vec{z} \end{vmatrix}$$

$$Mf_z = \iint z \sigma_{xx} dS \vec{y} - \iint y \sigma_{xx} dS \vec{z}$$

et $\sigma_{xx} = -\frac{E \times y}{\rho}$ avec y point courant de la section droite.

$$Mf_z = -\iint zy \frac{E}{\rho} dS \vec{y} + \iint y^2 \frac{E}{\rho} dS \vec{z}$$

z et y étant les axes principaux d'inertie

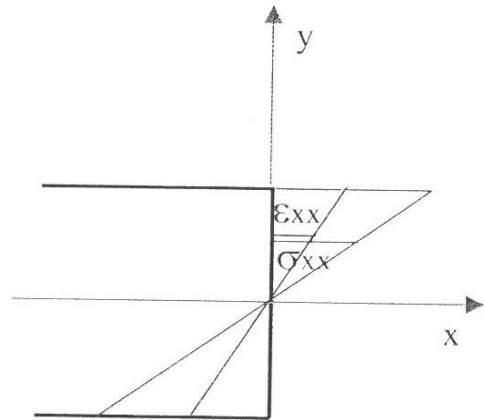
$$\iint zy dS = 0 \quad \text{et} \quad \iint y^2 dS = I_z$$

$$Mf_z = \frac{E}{\rho} I_z \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\rho} = Y''$$

$$Mf_z = EI_z y'' \quad y'' = \frac{Mf_z}{EI_z}$$

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = -\frac{Ey}{\rho}$$

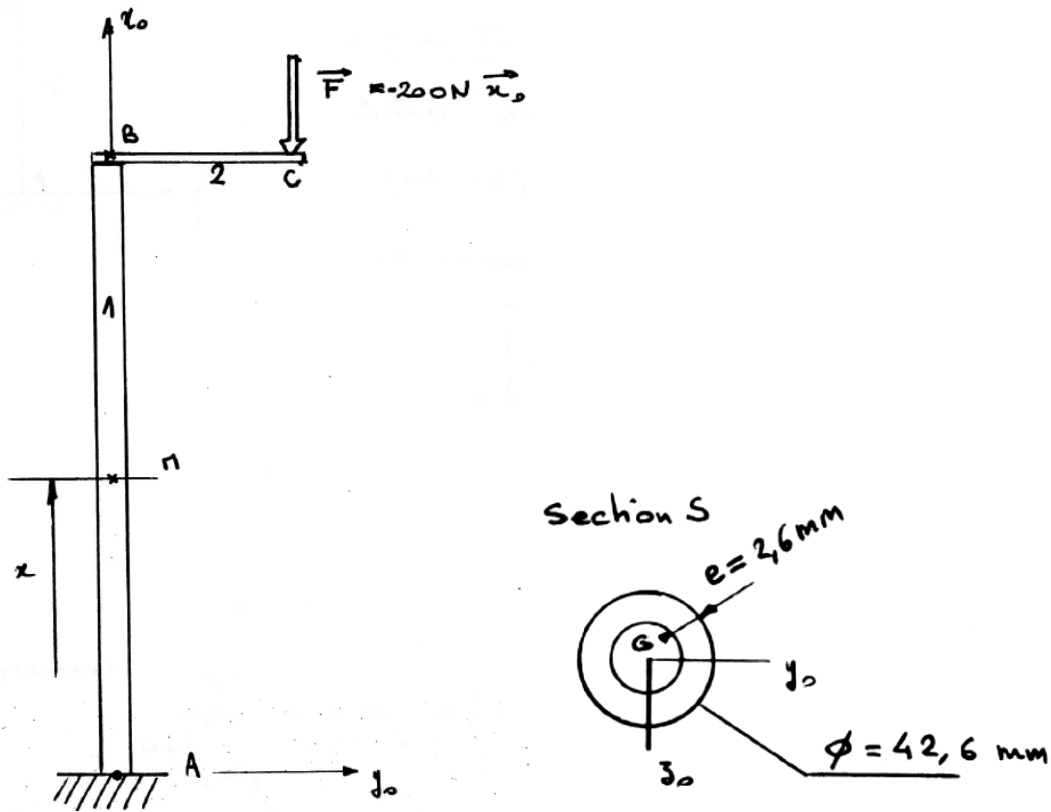
$$\varepsilon_{xx} = -\frac{y}{\rho} = -y y'' = -y \frac{Mf_z}{EI_z}$$



avec y point courant de la section
et y'' dérivée seconde de l'équation de la déformée

$$\sigma_{xx} = -\frac{Mf_z}{I_z} y$$

8.3 Exercice : poutre creuse



AB=1m ; BC=0,5m. On néglige le poids propre de la poutre.

Questions

1. Au point M tel que $\overline{AM} = x \cdot \overline{x_0}$, écrire le torseur de cohésion dans la section
2. En déduire les différents diagrammes le long de la poutre (entre A et B)
3. Tracer, dans une section, les contraintes dues uniquement aux efforts normaux
4. Tracer et calculer, dans la section la plus sollicitée, les contraintes dues au moment fléchissant, calculer la contrainte maximale de flexion dans une section

8.3.1 Exercice : poutre creuse

1/ Coupure : la partie I de la poutre est la partie AM. La partie II est la partie MBC.

Soit $[Actions II \rightarrow I]_M$ le torseur de cohésion au point M (torseur des efforts internes), donc dans la section d'abscisse x.

En appliquant le PFS sur la partie II, on obtient :

$$[Actions II \rightarrow I]_M = [Actions ext \rightarrow II]_M$$

Les seules actions extérieures sont la force en C. Son torseur en C a pour expression :

$$[Actions \vec{F}]_C = \begin{cases} \vec{F} = -200N \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{M}_C = \vec{0} \end{cases}$$

On déplace ce torseur en M

$$[Actions \vec{F}]_M = \begin{cases} \vec{F} = -200N \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{M}_M = \vec{MC} \wedge \vec{F} \end{cases}$$

$$\vec{MC} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100Nm \end{pmatrix}$$

Le torseur de cohésion dans une section d'abscisse x a pour expression :

$$[Actions II \rightarrow I]_M = \begin{cases} \vec{F} = -200N \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{M}_M = 100Nm \vec{z}_0 \end{cases}$$

2/ Le diagramme des efforts tranchants est nul.

L'effort normal est constant et a pour valeur -200 N.

Le moment fléchissant est constant et a pour valeur 100 Nm.

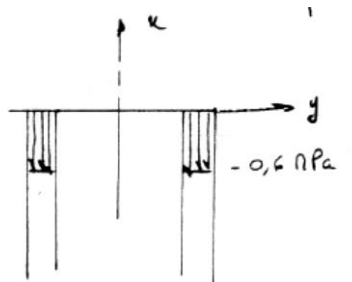
3/ la répartition des contraintes dues à l'effort normal est uniforme et en tout point :

$$\sigma_n = \frac{N_x}{S} = -\frac{200}{S}$$

$$S = \frac{\pi}{4} d_e^2 - \frac{\pi}{4} d_i^2 = 327mm^2$$

$$\sigma_n = -0.6 MPa$$

Les contraintes dues aux efforts normaux ont donc le profil ci-dessous



4/ Contraintes dues au moment fléchissant dans la section la plus sollicitée

Le moment fléchissant et l'effort normal sont constants donc toute section subit la même sollicitation.

$$\sigma_{flexion} = -\frac{M_{fz} \cdot y}{I_z}$$

$$I_z = \frac{\pi}{64} \cdot (d_e^4 - d_i^4) = 65621 \text{ mm}^4$$

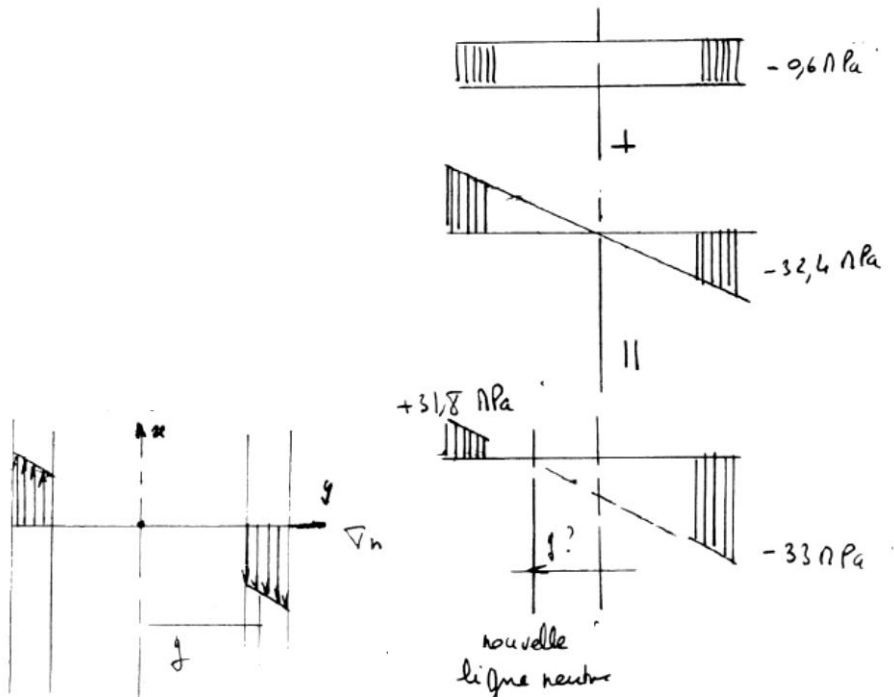
$$\sigma_{flexion} = -1,52 \cdot y$$

La contrainte maximale de flexion a pour valeur (pour $y=-d/2$)

$$\sigma_{flexion_max} = 32,4 \text{ MPa}$$

La contrainte minimale de flexion a pour valeur (pour $y=d/2$)

$$\sigma_{flexion_min} = -32,4 \text{ MPa}$$



Le profil global des contraintes est la somme des profils obtenus par traction et flexion :

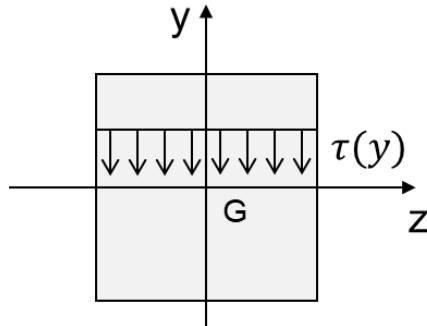
$$\sigma_{maxi} = -0,6 \text{ MPa} - 32,4 \text{ MPa}$$

On voit un décalage de la ligne neutre. Calcul de nouvelle ligne neutre définie par $\sigma_n = 0$

$$\frac{N_x}{S} + \frac{-M_f \cdot y}{I_{Gz}} = 0 \Rightarrow y = -0,46 \text{ mm}$$

8.4 Exercice : Contrainte de cisaillement

Soit une section S carrée de côté a, contenue dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) .



La section est soumise à un effort tranchant T suivant l'axe $-\vec{y}$.

La contrainte de cisaillement en tout point d'ordonnée y est définie par

$$\tau(y) = \frac{T \cdot S_z}{I_{Gz} \cdot b(y)}$$

- S_z moment statique de la section définie entre $y = -a/2$ et y.
- I_{Gz} moment quadratique de la section S par-rapport à l'axe
- $b(y)$ largeur de la section en y.

Calculer la contrainte de cisaillement **moyenne** sur la section S.

8.4.1 Exercice : Contrainte de cisaillement

$$I_{Gz} = \int y^2 dS = \frac{a^4}{12}$$

$$\forall y \quad b(y) = a$$

$$S_z = \int_{-a/2}^y y dy dz = a \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-a/2}^y = a \cdot \left(\frac{y^2}{2} - \frac{a^2}{8} \right)$$

Donc

$$\tau(y) = \frac{12T}{a^5} \cdot a \cdot \left(\frac{y^2}{2} - \frac{a^2}{8} \right) = \frac{12T}{a^4} \cdot \left(\frac{y^2}{2} - \frac{a^2}{8} \right)$$

Par définition, la contrainte de cisaillement moyenne a pour expression :

$$\begin{aligned} \tau_{moy} &= \frac{1}{a} \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \tau(y) dy = \frac{1}{a} \cdot \frac{12T}{a^4} \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{a^2}{8} \right) dy = \frac{12T}{a^5} \cdot \left[\frac{y^3}{6} - \frac{a^2}{8} \cdot y \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \\ \tau_{moy} &= \frac{12T}{a^5} \cdot \left(\frac{a^3}{48} - \frac{a^3}{16} + \frac{a^3}{48} - \frac{a^3}{16} \right) = \frac{12T}{a^5} \cdot \frac{-2a^3}{24} \end{aligned}$$

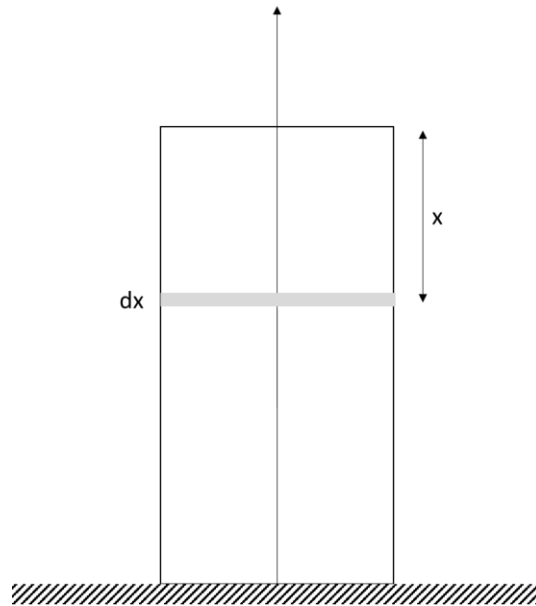
$\tau_{moy} = -\frac{T}{a^2}$

La contrainte de cisaillement moyenne est l'effort tranchant divisé par la section. C'est la contrainte obtenue lorsque l'on suppose que le champ de contrainte de cisaillement est uniforme sur la section.

8.5 Exercice : déformation d'un pilier sous son propre poids

Soit un pilier vertical de masse volumique ρ , module d'élasticité E , de section S , hauteur H , posé au sol et comprimé sous son poids propre.

Calculer la variation de longueur totale du pilier vertical.



8.5.1 Exercice : déformation d'un pilier sous son propre poids

Contrainte dans une section S, pour un effort normal F :

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

La déformation du pilier a pour expression

$$\varepsilon = \frac{\Delta H}{H}$$

ΔH : variation de la hauteur H.

Loi de Hooke

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

L'élément de hauteur dx, situé à la distance x du sommet, est soumis à la force F telle que :

$$F = \rho \cdot S \cdot x \cdot g$$

La déformation a donc pour expression, avec la loi de Hooke

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\rho \cdot S \cdot x \cdot g}{S \cdot E} = \frac{\rho \cdot x \cdot g}{E}$$

La déformation a aussi pour expression

$$\varepsilon = \frac{dx - dx'}{dx}$$

dx : hauteur avant déformation

dx' : hauteur après déformation

donc

$$dx' = -\varepsilon \cdot dx + dx = dx \cdot \left(1 - \frac{\rho \cdot x \cdot g}{E}\right)$$

La hauteur H' après déformation s'obtient en intégration dx' sur tout le pilier :

$$H' = \int_0^H dx' = \int_0^H dx \cdot \left(1 - \frac{\rho \cdot x \cdot g}{E}\right) = \left[x - \frac{\rho \cdot x^2 \cdot g}{2E} \right]_0^H = H - \frac{\rho \cdot H^2 \cdot g}{2E}$$

La variation de hauteur est donc

$$H' - H = \frac{\rho \cdot H^2 \cdot g}{2E}$$

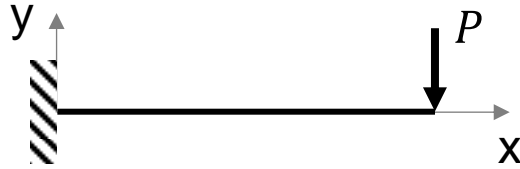
$$H' - H = \frac{\rho \cdot H^2 \cdot g}{2E} = \frac{P \cdot H}{2ES}$$

Avec P poids du pilier tel que $P = \rho \cdot H \cdot S \cdot g$

8.6 Exercice : solide d'égalé résistance [5]

Soit une poutre encastrée à gauche et libre à droite, de longueur L , de largeur b , de limite d'élasticité R_e .

La poutre est soumise à une force P verticale, appliquée à son extrémité.



On propose d'appliquer à la poutre une hauteur h variable telle que, dans la section d'abscisse x

$$h^2 = \frac{6P}{R_e \cdot b} \cdot (L - x)$$

- 1/ Calculer le moment fléchissant $M_f(x)$ dans une section d'abscisse x
- 2/ En déduire la contrainte maximale dans la section. Que peut-on observer ?
- 3/ Représenter la hauteur h de la poutre le long de la poutre

8.6.1 Exercice : solide d'égalé résistance [5]

1/

$$M_f(x) = -P \cdot (L - x)$$

2/ Par définition, la contrainte normale dans la section S au point d'ordonnée y a pour expression

$$\sigma(y) = -\frac{M_f \cdot y}{I_z}$$

Donc pour $y = h/2$ on a la contrainte maximale de flexion

$$\sigma_{max} = \frac{P \cdot (L - x) \cdot \frac{h}{2}}{b \cdot \frac{h^3}{12}} = \frac{6P \cdot (L - x)}{b \cdot h^2}$$

Avec l'expression de h proposée dans l'énoncé on a

$$\sigma_{max} = \frac{6P \cdot (L - x)}{b \cdot \frac{6P}{R_e \cdot b} \cdot (L - x)} = R_e$$

La contrainte maximale de flexion est la même dans toute section de la poutre et est égale à R_e .

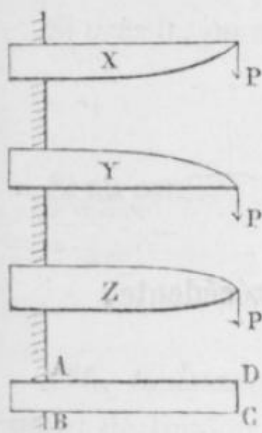
On parle de solide d'égalé résistance.

3/

Supposant au contraire que la largeur b reste constante, et résolvant l'équation par rapport à h , on aura, pour une valeur quelconque l de L ,

$$h^2 = \frac{6P}{R_b} l.$$

Fig. 29.



C'est-à-dire que le carré de la hauteur h sera proportionnel à l ; et la pièce qui est représentée en plan par le rectangle ABCD (fig. 29), dont la dimension $AB = b$, le sera en élévation par l'une quelconque des trois formes paraboliques X, Y, Z, dont le sommet est au point d'application de la force P.

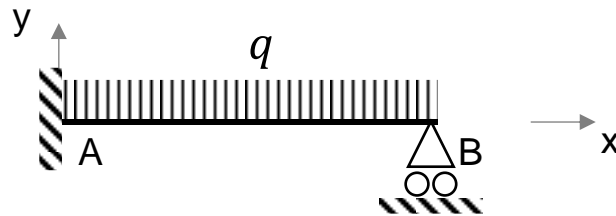
On peut, en opérant d'une manière analogue, déterminer la forme des solides d'égalé résistance pour toutes les manières dont peuvent reposer les solides, et quelle que soit la manière dont ils sont chargés.

9 Systèmes hyperstatiques

9.1 Exercice : poutre hyperstatique

Soit une poutre de longueur L encastree en A et simplement appuyee en B (appui glissant).

Soient M_A le moment d'encastrement en A, X_A et Y_A les reactions d'encastrement en A et Y_B la reaction d'appui en B.



Q1/ Déterminer le degré d'hyperstaticité de la structure.

Q2/ A l'aide du PFS en A, montrer que

$$M_A = Y_A \cdot L - \frac{qL^2}{2}$$

Pour déterminer toutes les inconnues de liaison, on va apporter des équations supplémentaires à l'aide de considérations sur la déformée.

Q3/ Déterminer l'équation de la déformée $y(x)$ de la poutre en fonction de Y_A , q , L et M_A

Q4/ Que vaut la déformée $y(x)$ en B ?

Q5/ En déduire que

$$M_A = \frac{L}{3} \cdot \left(Y_A - \frac{qL}{4} \right)$$

Q6/ En déduire que

$$Y_A = \frac{5}{8} qL$$

Q6/ En déduire M_A et Y_B

9.1.1 Exercice : poutre hyperstatique

Q1/ dg=1. Structure hyperstatique. Le PFS ne suffit pas.

Q2/ Somme des moments en B :

$$M_A - Y_A \cdot L + \frac{qL^2}{2} = 0$$

Q3/ Le moment fléchissant a pour expression

$$M_f = -M_A + Y_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} = EI \cdot y''(x)$$

Donc

$$EI \cdot y'(x) = -M_A \cdot x + \frac{Y_A x^2}{2} - \frac{q}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + C$$

En $x=0$, $y'(x) = 0$ (encastrement) donc $C=0$

$$EI y(x) = -\frac{M_A}{2} x^2 + \frac{Y_A}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{q}{6} \cdot \frac{x^4}{4} + D$$

En $x=0$, $y(x) = 0$ (encastrement) donc $D=0$

$$y(x) = \frac{1}{EI} \cdot \left(-\frac{M_A}{2} x^2 + \frac{Y_A}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{q}{6} \cdot \frac{x^4}{4} \right)$$

Q4/ en B, $y(x)=0$

Q5/ On sait que pour $x=L$, $y(x)=0$ donc

$$-\frac{M_A}{2} L^2 + \frac{Y_A}{2} \cdot \frac{L^3}{3} - \frac{q}{6} \cdot \frac{L^4}{4} = 0$$

$$-M_A + Y_A \cdot \frac{L}{3} - \frac{q}{3} \cdot \frac{L^2}{4} = 0$$

$$M_A = \frac{L}{3} \cdot \left(Y_A - \frac{qL}{4} \right)$$

Q6/

$$M_A = \frac{L}{3} \cdot \left(Y_A - \frac{qL}{4} \right)$$

De plus on a vu en Q1 que

$$M_A = Y_A \cdot L - \frac{qL^2}{2}$$

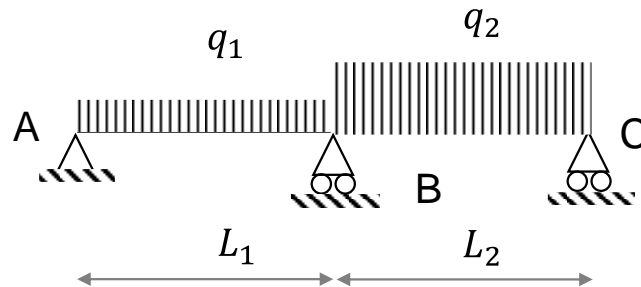
$$Y_A = \frac{5}{8} qL$$

Q7/ PFS

10 Poutres continues

10.1 Exercice : théorème des 3 moments

Soit une poutre à 2 travées de longueur L_1 et L_2 , soumises aux charges linéiques q_1 et q_2

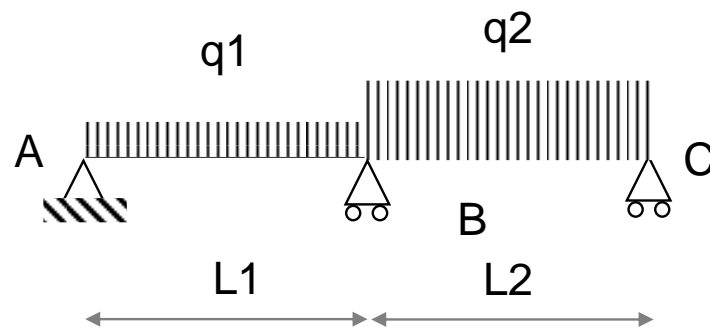


On suppose que le module E et le moment quadratique I sont constants le long de la poutre.

Montrer que le moment fléchissant en B a pour expression

$$M_B = -\frac{q_1 L_1^3 + q_2 L_2^3}{8(L_1 + L_2)}$$

10.1.1 Exercice : théorème des 3 moments



$$M_A \cdot L_1 + 2M_B \cdot (L_1 + L_2) + M_C \cdot L_2 = 6EI \cdot (\Omega_{i,d}^0 - \Omega_{i,g}^0)$$

$$\begin{cases} M_A = 0 \\ M_C = 0 \end{cases}$$

$$\Omega_{i,d}^0 = -q_2 \cdot \frac{L_2^3}{24EI}$$

$$\Omega_{i,g}^0 = q_1 \cdot \frac{L_1^3}{24EI}$$

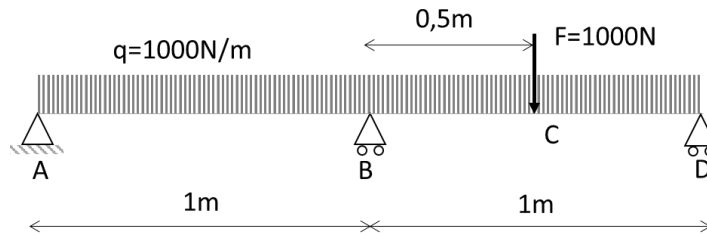
$$M_B = -\frac{q_1 L_1^3 + q_2 L_2^3}{8(L_1 + L_2)}$$

10.2 Exercice : poutre continue par superposition

Soit la poutre continue ci-dessous, axe x , longueur $L=2\text{m}$, module E , moment quadratique I , soumise à une charge linéique q sur toute sa longueur, et à une force F en C.

La poutre est hyperstatique de degré 1.

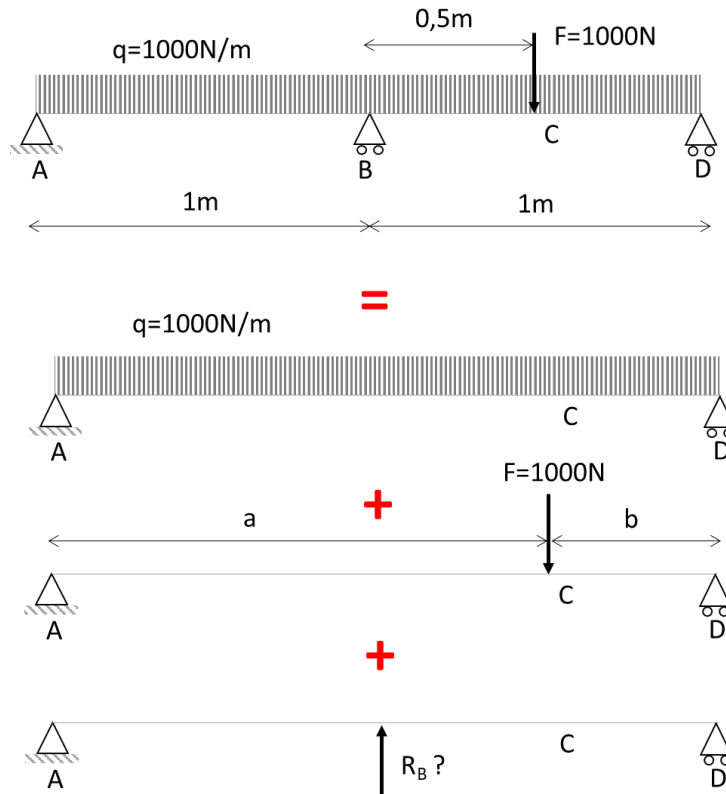
L'axe vertical ascendant est l'axe y .



On propose de résoudre cette poutre continue (estimation des appuis en A, B et D) par l'utilisation du théorème de superposition.

Soit la même poutre de longueur 2m uniquement portée par les appuis A et D.

Par superposition on a :



La partie 1 étudie les flèches des cas isostatiques.

Les résultats de la partie 1 peuvent être directement utilisés pour la partie 2.

Partie 1 : calcul des flèches pour les cas isostatiques

1/ Dans le cas de la charge linéique seule, pour la poutre sans l'appui en B, montrer que la flèche en $x=L/2$ a pour expression :

$$y_1 = -\frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI}$$



2/ Dans le cas de la force F seule appliquée en C, pour la poutre sans l'appui en B, montrer que la flèche en $x=L/2$ a pour expression :

$$y_2 = -\frac{F b}{6EIL} \cdot \left[a \cdot (L + b) - \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right]$$



3/ Dans le cas de la réaction R_B seule appliquée au centre de la poutre, montrer que la flèche en $x=L/2$ a pour expression :

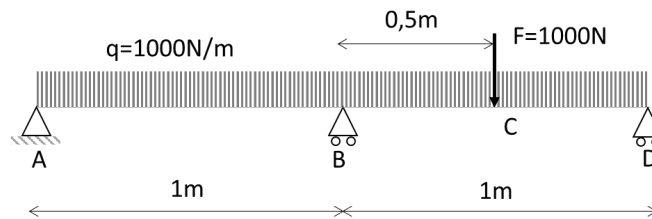
$$y_3 = \frac{R_B L^3}{48EI}$$



Partie 2 : calcul de la réaction R_B à l'appui B de la poutre continue

- 1/ Pour la poutre continue, que vaut la flèche au point B ?
- 2/ En déduire une relation simple entre y_1 , y_2 et y_3 .
- 3/ En déduire la valeur de la réaction R_B .

10.2.1 Exercice : poutre continue par superposition



Partie 1

- 1/ Calcul direct de déformée à partir de $M = EIy''$
- 2/ Calcul direct de déformée à partir de $M = EIy''$
- 3/ Calcul direct de déformée à partir de $M = EIy''$

Partie 2

- 1/ Pour la poutre continue, $y_B = 0$
- 2/ On a donc par superposition

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

- 3/ On en déduit :

$$R_B = -\frac{48EI}{L^3} \cdot (y_1 + y_2) = \frac{48EI}{L^3} \cdot \left[\frac{Fb}{6EIL} \cdot \left[a \cdot (L+b) - \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right] + \frac{5}{384} \cdot \frac{FL^3}{EI} \right]$$

La connaissance de E et I n'est pas nécessaire puisque le facteur EI disparaît de l'expression de R_B

Application numérique :

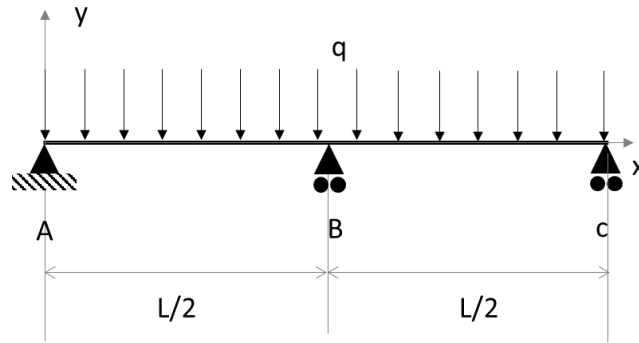
$$R_B = 1937 \text{ N}$$

On peut alors en déduire les réactions aux appuis en A et D.

10.3 Exercice : poutre continue sur trois appuis

Soit la poutre de longueur $L=4\text{m}$ ci-dessous, reposant sur trois appuis en A, B et C.

La poutre est soumise à une charge linéique $q = -1000 \text{ N/m}$ suivant y .



Partie 1 : superposition

Par superposition, en considérant que la flèche y_B est nulle, calculer R_{yB} , réaction d'appui en B suivant y .

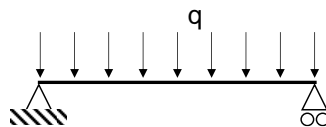
Partie 2 : théorème des 3 moments

Par le théorème des 3 moments, retrouver la valeur de R_{yB} calculée en partie 1.

Formulaire

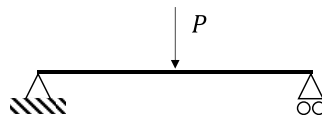
Poutre sur deux appuis, longueur L , effort linéique q : flèche maximale

$$y_{max} = -\frac{5qL^4}{384EI}$$



Poutre sur deux appuis, longueur L , effort ponctuel p au centre

$$y_{max} = -\frac{PL^3}{48EI}$$



Théorème des 3 moments

$$M_{i-1} \frac{L_i}{6EI_i} + 2M_i \left(\frac{L_i}{6EI_i} + \frac{L_{i+1}}{6EI_{i+1}} \right) + M_{i+1} \frac{L_{i+1}}{6EI_{i+1}} = \Omega_{i,d}^0 - \Omega_{i,g}^0$$

Effort tranchant

$$V(x) = V_0(x) + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_i}$$

10.3.1 Exercice : poutre continue sur trois appuis

Partie 1 : superposition

Le cas étudié est par superposition la somme de deux cas : Poutre sur deux appuis avec effort linéique q + Poutre sur deux appuis avec effort ponctuel R_{YB} au centre

La flèche en B est nulle donc la somme des flèches dues à chaque cas est nulle :

$$-\frac{5qL^4}{384EI} + \frac{R_{YB} \cdot L^3}{48EI} = 0$$

$$R_{YB} = 48 \times \frac{5qL}{384} = 0.625qL = 2500 \text{ N}$$

Partie 2 : théorème des 3 moments

$$M_A \cdot \frac{L}{6EI} + 2M_B \left(\frac{L}{6EI} + \frac{L}{6EI} \right) + M_C \frac{L}{6EI} = -\frac{q \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3}{24} - \frac{q \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3}{24}$$

Moment sur appuis : $M_A = 0$ et $M_C = 0$

On a finalement

$$M_B = -\frac{qL^2}{32}$$

Effort tranchant :

Travée 1

$$V(x) = \frac{qL}{4} - q \cdot \frac{L-x}{2} + \frac{qL^2}{32} \cdot \frac{2}{L}$$

Donc l'effort tranchant à gauche de l'appui en B a pour valeur

$$V\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5qL}{16} = 1250 \text{ N}$$

Travée 2

$$V(x) = \frac{qL}{4} - q \cdot \frac{L-x}{2} + \frac{qL^2}{32} \cdot \frac{2}{L}$$

Donc l'effort tranchant à droite de l'appui en B a pour valeur

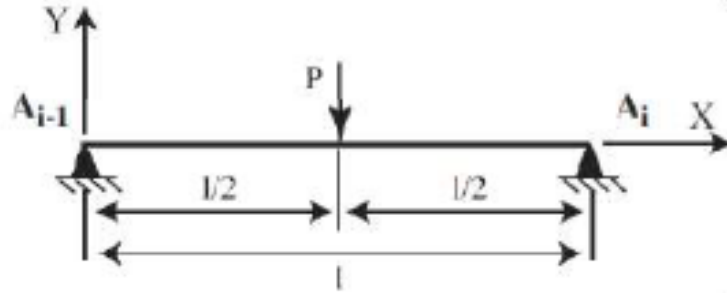
$$V(0) = \frac{qL}{4} + \frac{qL}{16} - \frac{qL^2}{32} \cdot \frac{2}{L} = -\frac{5qL}{16} = -1250 \text{ N}$$

Par conséquent, on a

$$R_{YB} = 1250 - (-1250) = 2500 \text{ N}$$

10.4 Exercice : rotation à un appui

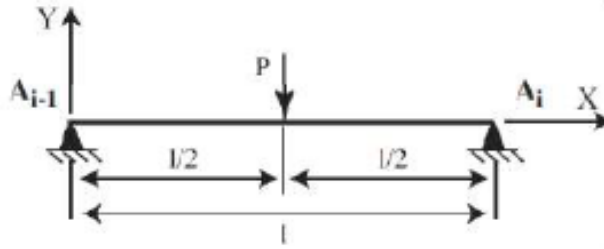
Soit une poutre de longueur L , posée sur deux appuis A_{i-1} et A_i .



Montrer que, $\omega(0)$ rotation de la poutre au niveau de l'appui A_{i-1} , a pour expression :

$$\omega(L) = -\frac{P \cdot L^2}{16EI}$$

10.4.1 Exercice : rotation à un appui



Soient X_{A_i} et Y_{A_i} les réactions en X et Y au niveau de l'appui A_i et $X_{A_{i-1}}$ et $Y_{A_{i-1}}$ réaction en X et Y au niveau de l'appui A_{i-1} .

Par symétrie,

$$X_{A_i} = X_{A_{i-1}} = 0$$

$$Y_{A_i} = Y_{A_{i-1}} = \frac{P}{2}$$

Le moment fléchissant dans une section d'abscisse x a pour expression :

$$M_f(x) = EI \cdot y''(x)$$

Dans la partie $[0 ; L/2]$

$$M_f = -P \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right) + \frac{P}{2} \cdot (L - x) = -\frac{PL}{2} + Px + \frac{PL}{2} - \frac{Px}{2} = \frac{Px}{2}$$

Donc

$$y'' = \frac{Px}{2EI}$$

Donc

$$y' = \frac{P}{2EI} \cdot \frac{x^2}{2} + A$$

La rotation est la dérivée de la flèche y donc

$$y' = \omega$$

Conditions aux limites : $\omega(L/2)=0$ donc

$$\omega\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{P}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L^2}{4} + A = 0$$

Donc

$$\omega = \frac{P}{2EI} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{P \cdot L^2}{16EI}$$

Donc en $x=0$,

$$\omega(0) = -\frac{P \cdot L^2}{16EI}$$

NB : pour la flèche en $x=L$, il faut changer l'expression du moment fléchissant :

$$M_f = \frac{P}{2} \cdot (L - x)$$

F. Menan

On obtient

$$\omega(L) = \frac{P}{2EI} \cdot \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) - 3 \cdot \frac{P \cdot L^2}{16EI}$$

$$\omega(L) = \frac{P \cdot L^2}{16EI}$$

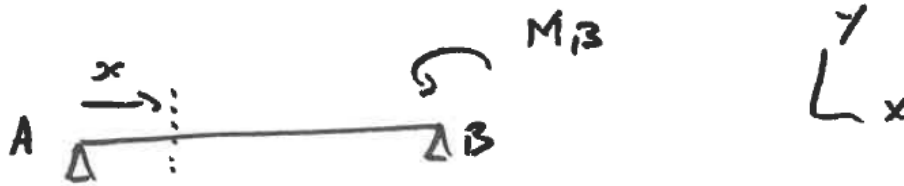
10.5 Exercice : rotation à un appui

Soit la poutre isostatique ci-dessous sur deux appuis en A et B, soumise à un moment M_B en B.

Calculer les rotations ω_A et ω_B en A et B.

On pourra écrire le PFS pour déterminer les appuis en A et B, en déduire le moment fléchissant dans une section d'abscisse et enfin la relation entre le moment fléchissant et la déformée $y(x)$.

On sait que la rotation dans la section d'abscisse x est la dérivée de $y(x)$ par-rapport à x .



10.5.1 Exercice : rotation à un appui

ΣM en A :

$$M_B + Y_B \cdot L = 0$$

Donc

$$Y_B = -\frac{M_B}{L}$$

ΣF en y :

$$Y_A + Y_B = 0$$

Donc

$$Y_A = \frac{M_B}{L}$$

Moment fléchissant :

$$M_f(x) = M_B + Y_B \cdot (L - x) = M_B - \frac{M_B}{L} \cdot (L - x) = M_B \cdot \frac{x}{L}$$

Donc

$$y'' = \frac{1}{EI} \cdot M_B \cdot \frac{x}{L}$$

Par intégration,

$$y' = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M_B}{L} \cdot \frac{x^2}{2} + K_1$$

Condition aux limites :

$$K_1 = \omega_A$$

Par intégration,

$$y = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M_B}{L} \cdot \frac{x^3}{6} + \omega_A \cdot x + K_2$$

Condition aux limites : $y(0) = 0$ donc $K_2 = 0$. $y(L) = 0$ donc

$$\omega_A = -\frac{M_B \cdot L}{6EI}$$

De plus,

$$y'(L) = \omega_B = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M_B}{L} \cdot \frac{L^2}{2} - \frac{1}{EI} \cdot \frac{M_B \cdot L}{6}$$

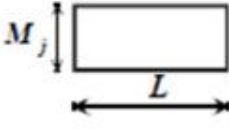
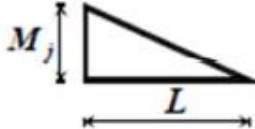
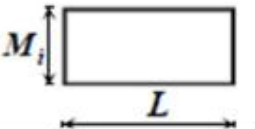
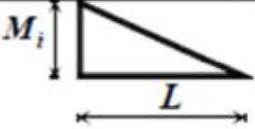
$\omega_B = \frac{M_B \cdot L}{3EI}$

11 Méthodes énergétiques

11.1 Exercice : tableau des intégrales de Mohr

Retrouver les résultats donnés dans le tableau ci-dessous

$$\int m_j(x) \cdot m_i(x)$$

$m_j(x)$		
$m_i(x)$		
	$LM_i M_j$	$\frac{1}{2} LM_i M_j$
	$\frac{1}{2} LM_i M_j$	$\frac{1}{3} LM_i M_j$

11.1.1 Exercice : tableau des intégrales de Mohr

Case 11 : Deux rectangles

$$\int m_j(x).m_i(x) = \int_0^L M_i.M_j dx = M_i.M_j.[x]_0^L = M_i.M_j.L$$

Case 21 et Cas 12 : un triangle et un rectangle

$$\int M_j.M_i.\left(1 - \frac{x}{L}\right) dx = M_i.M_j.\left[x - \frac{x^2}{2L}\right]_0^L = M_i.M_j.\left(L - \frac{L^2}{2L}\right) = \frac{1}{2}.L.M_i.M_j$$

Case 22 : deux triangles dans le même sens

$$\int m_j(x).m_i(x) = \int_0^L M_i.\left(1 - \frac{x}{L}\right)M_j\left(1 - \frac{x}{L}\right) dx = M_i.M_j.\int_0^L \left(1 - \frac{2x}{L} + \frac{x^2}{L^2}\right) dx$$

$$\int m_j(x).m_i(x) = M_i.M_j.\left[x - \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{3L^2}\right]_0^L = M_i.M_j.\left(L - L + \frac{1}{3}.L\right) = \frac{1}{3}.L.M_i.M_j.$$

12 Exercices de synthèse

12.1 Exercice : flèche d'une poutre console

La flèche maximale δ d'une poutre console sollicitée par une force F à son extrémité a pour expression :

$$\delta = -\frac{FL^3}{3EI}$$

L : longueur de la poutre ; E : module d'Young et I : moment quadratique

Q1/ Retrouver ce résultat à l'aide de la formule $M_f(x) = EIy''(x)$

Q2/ Retrouver ce résultat par le théorème de la charge unitaire

Q3/ Retrouver ce résultat par la méthode des déplacements



12.1.1 Exercice : flèche d'une poutre console



Q1/ Par la loi de comportement de la poutre en flexion

$$M_f(x) = EIy''(x)$$

Or

$$M_f(x) = -F \cdot (L - x)$$

Par intégration on obtient

$$y(x) = -\frac{F}{6EI} \cdot x^2 \cdot (3L - x)$$

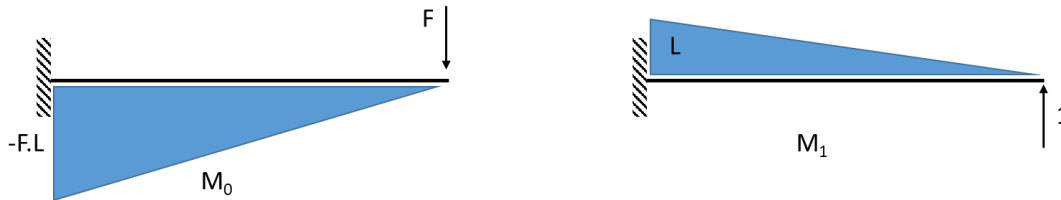
$$\delta = y(L)$$

On a bien

$$\delta = -\frac{FL^3}{3EI}$$

Q2/ Par le théorème de la charge unitaire

On applique une charge unitaire au point où l'on cherche le déplacement.



$$\delta = \frac{\partial W}{\partial F} = \int_0^L \frac{1}{EI} \cdot M_0 M_1 dx$$

E et I sont constants entre 0 et L donc :

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{1}{EI} \int_0^L M_0 M_1 dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot L \cdot (-FL)(L)$$

$$\delta = -\frac{FL^3}{3EI}$$

Q3/ Par la méthode des déplacements

Soient A le point d'encastrement, B l'extrémité de la poutre et S la section de la poutre.

Encastrement en A donc pas de degrés de liberté en A : $u_{xA} = 0$; $u_{yA} = 0$; $\omega_A = 0$

Hypothèse de longueur de poutre invariante : $u_{xB} = 0$.

$$\begin{pmatrix} X_{AB} \\ Y_{AB} \\ M_{AB} \\ X_{BA} \\ Y_{BA} \\ M_{BA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{YB} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ M_A \\ 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$Y_{BA} = \frac{12EI}{L^3} u_{YB} - \frac{6EI}{L^2} \omega_B + F$$

$$M_{BA} = -\frac{6EI}{L^2} u_{YB} + \frac{4EI}{L} \omega_B$$

Equilibre du nœud B

$$Y_{BA} = 0$$

$$M_{BA} = 0$$

L'équation pour M_{BA} donne

$$\omega_B = \frac{3}{2} \cdot \frac{u_{YB}}{L}$$

Donc dans l'équation pour Y_{BA} on obtient :

$$\frac{12EI}{L^3} u_{YB} - \frac{6EI}{L^2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{u_{YB}}{L} = -F$$

$$(12EI - 9EI)u_{YB} = FL^3$$

Après arrangement des termes on a bien :

$$u_{YB} = -\frac{FL^3}{3EI}$$

13 Références Bibliographiques

- [1] « Annales des mines. Revue mensuelle des industries extractives », nov. 1971, [En ligne]. Disponible sur: [Source gallica.bnf.fr / MINES ParisTech](http://gallica.bnf.fr/MINES_ParisTech)
- [2] J. P. Larralde, Éd., *Mécanique statique I - Méthode analytique*. in Collection des industries mécaniques. Paris ; New York : Issy-les-Moulineaux: Masson et EAP, 1981.
- [3] Espitallier, *Le Béton armé, systèmes généraux et calcul des ouvrages en béton armé*. Paris, 1906.
- [4] A. Giet, *Problèmes de résistance des matériaux tome 1*. DUNOD, 1973.
- [5] J. Buchetti, *Manuel des constructions métalliques et mécaniques*. 1888. [En ligne]. Disponible sur: <http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb301722737>
- [6] E. Callandreau, *Problèmes de résistance des matériaux avec leurs solutions*. Albin Michel, 1944. [En ligne]. Disponible sur: [Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France](http://gallica.bnf.fr/Bibliothèque_nationale_de_France)
- [7] Y. Brémont et P. Réocreux, *Mécanique du solide indéformable: statique cours et exercices résolus classes préparatoires aux grandes écoles, MPSI, PTSI, PSI, PSI*, MP, MP*, PT, PT*, premier cycle universitaire*. in *Mécanique*, no. 2. Paris: Ellipses, 1996.
- [8] A. Castigliano, *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. in *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*, no. vol. 1 à 2. A. F. Negro, 1879. [En ligne]. Disponible sur: <https://books.google.fr/books?id=d0EArvXp34gC>
- [9] L. Buthaud, « Polycopié de mécanique des solides ISAE-ENSMA ». ISAE ENSMA, 2002.
- [10] Chillon, *Résistance des matériaux Tome 1*, vol. 1. Paris: DUNOD, 1961.
- [11] P.-O. Martin, « Formulaire résistance des matériaux - Poutres ». CTICM, 2021.
- [12] *Comprendre simplement la résistance des matériaux: la structure, principes et enjeux pour la conception*, 3e édition. Antony [France]: Éditions Le Moniteur, 2019.
- [13] D. Gamby, « Polycopié de Résistance des Matériaux ». ISAE-ENSMA, 2002.