Résistance des Matériaux

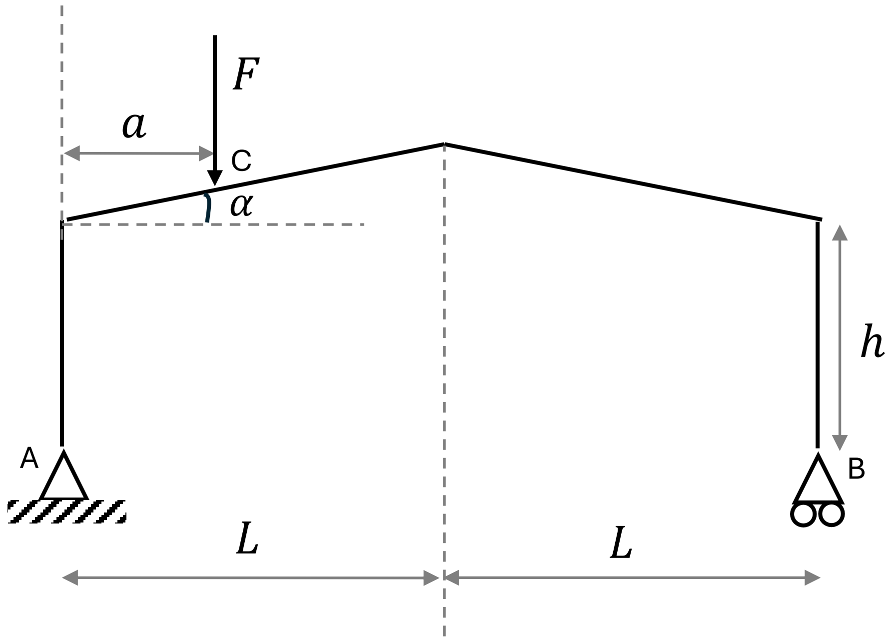
—

Exercice : portique à deux versants

Soit le portique ci-dessous. Le portique est articulé en A et simplement appuyé en B.

Une force $F = 1000\ N$ verticale est appliquée à la distance a de l'appui A.

1. Montrer que l'angle α indiqué sur le schéma a pour valeur $\alpha \approx 11{,}30°$
2. Calculer les degrés d'hyperstaticité externe, interne, et global de la structure
3. Déterminer les réactions aux appuis A et B
4. En déduire les efforts internes (moment fléchissant M, effort normal N et effort tranchant V) et tracer les diagrammes
5. Calculer le déplacement vertical en C dû à la force F à l'aide du théorème de la charge unitaire
6. Calculer le déplacement horizontal en B dû à la force F à l'aide du théorème de la charge unitaire



Données

- $L = 5m$
- $a = 2m$
- $h = 3m$
- La toiture a une pente de 20%
- $E = 210\ 000\ MPa$
- $I = 8356\ cm^4$ (IPE 300)

Correction

1/ Pente 20% donc

$$\alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{1}{5}\right) \approx 11{,}3°$$

2/

Degré externe : $d_e = r - 3 = 0$

Degré interne : $d_i = l_i - (3b - 3) = 9 - (3 \times 4 - 3) = 0$

Avec l_i nombre d'inconnues de liaison interne (3 encastrements) et b nombre de barres

Degré global : $d_g = d_e + d_i = 0$. La structure est isostatique.

3/ PFS

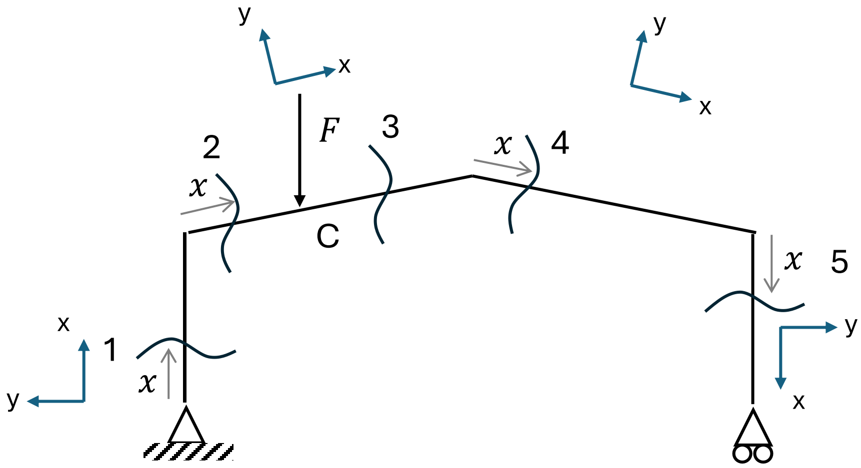
$$X_A = 0$$

$$Y_A + Y_B - F = 0$$

$$Y_B.2L - F.a = 0$$

$$\begin{cases} Y_B = F.\dfrac{a}{2L} = 200\ N \\ Y_A = \dfrac{F.(L-2a)}{2L} = 800\ N \end{cases}$$

4/ 5 coupures à réaliser. Les repères locaux des sections sont définis ci-dessous.



Coupure 1

$$\begin{cases} N = -Y_A = -\dfrac{F.(L-2a)}{2L} \\ V = 0 \\ M = 0 \end{cases}$$

Coupure 2

$$\begin{cases} N = -Y_A.\sin\alpha \\ V = -Y_A.\cos\alpha \\ M = Y_B.(2L - x.\cos\alpha) - F.(a - x.\cos\alpha) = \dfrac{F.(2L-a)}{2L}.x.\cos\alpha \end{cases}$$

Coupure 3

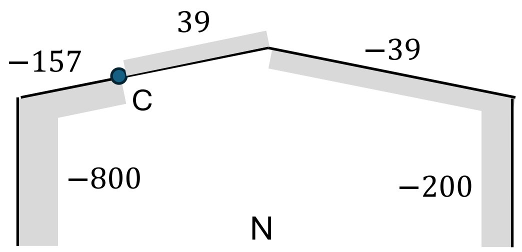
$$\begin{cases} N = Y_B.\sin\alpha \\ V = Y_B.\cos\alpha \\ M = Y_B.(2L - x.\cos\alpha) \end{cases}$$

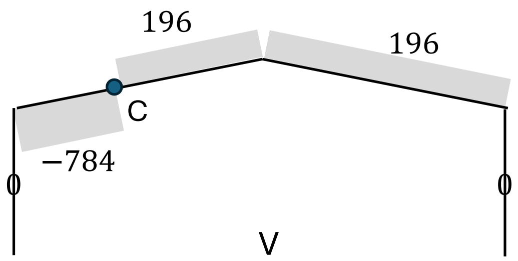
Coupure 4

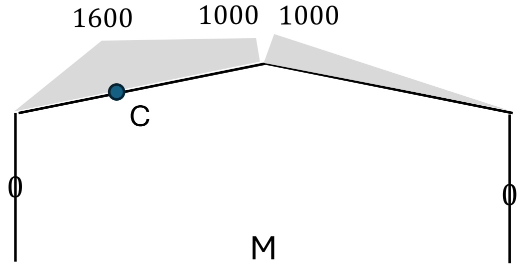
$$\begin{cases} N = -Y_B.\sin\alpha \\ V = Y_B.\cos\alpha \\ M = Y_B.(L - x.\cos\alpha) \end{cases}$$

Coupure 5

$$\begin{cases} N = -Y_B \\ V = 0 \\ M = 0 \end{cases}$$







Remarques

Repères locaux des barres

Les réactions aux appuis et efforts doivent être projetés dans les repères locaux des barres afin de déterminer N et V.

Le moment fléchissant peut être calculé dans le repère local ou dans le repère global de la structure car l'axe z est le même pour tous les repères

Vérification des expressions

Reprenez toutes les expressions avec $\alpha = 0$ (toiture plate) et vérifiez si les résultats sont cohérents.

Moment M_2 : autre méthode

Soit G_2 le point d'abscisse x où la coupure est effectuée, alors on peut calculer les moments exercés par F et Y_B avec la formule :

$$\overrightarrow{M_2(x)} = \overrightarrow{G_2C} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} (a - x.\cos\alpha) \\ / \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F.(a - x.\cos\alpha) \end{pmatrix}$$

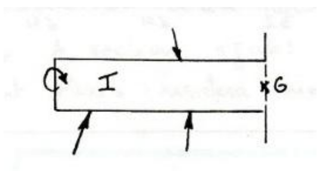
Pas besoin de calculer la composante de G_2C en y puisqu'on la multiplie par 0 dans le calcul

$$\overrightarrow{M_2(x)} = \overrightarrow{G_2B} \wedge \overrightarrow{R_B} = \begin{pmatrix} 2L - x.\cos\alpha \\ / \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ Y_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Y_B.(2L - x.\cos\alpha) \end{pmatrix}$$

Pas besoin de calculer la composante de G_2B en y puisqu'on la multiplie par 0 dans le calcul

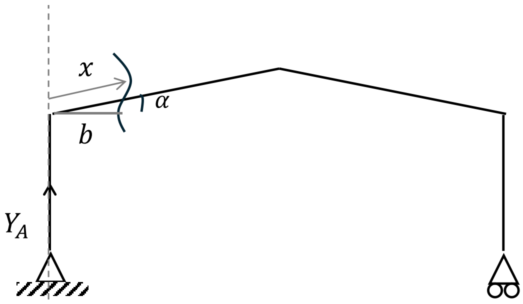
On a bien $M_2 = Y_B.(2L - x.\cos\alpha) - F.(a - x.\cos\alpha)$

Moment M_2 : en considérant les actions sur la partie I (à gauche de la coupure), avec un signe « - »



$$[Actions\ II\ \rightarrow\ I] = -[Actions\ extérieures\ \rightarrow\ I]$$

Le bras de levier de l'effort Y_A est $b = x.\cos\alpha$, comme indiqué sur le schema ci-dessous.



On obtient directement :

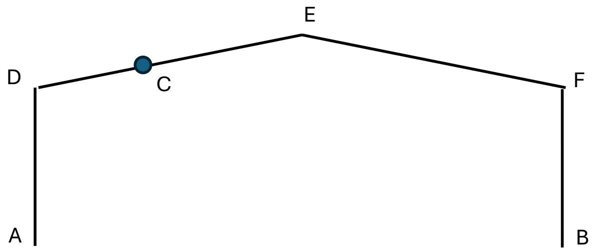
$$M_2(x) = -(-Y_A.x.\cos\alpha) = \frac{F.(2L - a)}{2L}.x.\cos\alpha$$

5/ Déplacement vertical en C

$$u = \frac{1}{EI}.\int M_O M_1 dx$$

- M_0 ; moment fléchissant du à l'effort F
- M_1 : moment fléchissant du à une force de 1N appliquée en C. On pourra aisément avoir le diagramme pour ce cas, en divisant par F le diagramme pour M_0

Pour les intégrales, on définit les points ci-dessous :



$M_0 = 0$ entre A et D et entre F et B donc

$$u_C = \frac{1}{EI}\cdot\left(\int_D^C M_O M_1 dx + \int_C^E M_O M_1 dx + \int_E^F M_O M_1 dx\right)$$

$$\int_D^C M_O M_1 dx = \frac{1}{3} \times 2{,}04 \times 1600 \times 1{,}6$$

$$\int_C^E M_O M_1 dx = \frac{1}{6}(5{,}10 - 2{,}04) \times (2 \times 1600 \times 1{,}6 + 1600 \times 1 + 1 \times 1000 + 2 \times 1000)$$

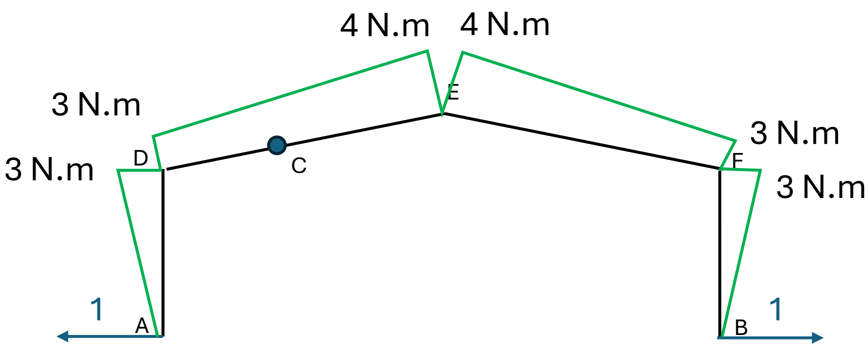
$$\int_E^F M_O M_1 dx = \frac{1}{3} \times 5{,}10 \times 1000$$

$$\boxed{u = 4{,}96 \times 10^{-4} m}$$

6/ Déplacement horizontal en B

$$u_D = \frac{1}{EI}\cdot\int_{\square}^{\square} M_O M_1 dx$$

- M_0 ; moment fléchissant du à l'effort F (connu)
- M_1 : moment fléchissant du à une force de 1N appliquée suivant l'axe x en D



$$u_D = \frac{1}{EI}\cdot\left(\int_D^C M_O M_1 dx + \int_C^E M_O M_1 dx + \int_E^F M_O M_1 dx\right)$$

$$\int_D^C M_O M_1 dx = \frac{1}{6}.2{,}04.1600.\left(2\times\left(3+\frac{2{,}04}{5{,}10}\right)+3\right)$$

$$\int_C^E M_O M_1 dx = \frac{1}{6}.(5{,}10-2{,}04).(1600\times4+1000\times4+1600\times3+2\times1000\times3)$$

$$\int_E^F M_O M_1 dx = \frac{1}{6}.5{,}10.1000.(2\times4+3)$$

$$\boxed{u_D = 1{,}67.10^{-3} m}$$