

# Résistance des Matériaux

—

## Cours



<https://lesdocsduprof.com/>

[fmenan@cesi.fr](mailto:fmenan@cesi.fr)

Janvier 2026

# Table des matières

<b>1</b>	<b>GENERALITES .....</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>ESTIMATION DES EFFORTS ET MOMENTS .....</b>	<b>7</b>
2.1	NOTION DE TORSEUR .....	7
2.2	PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE .....	8
2.3	SCHEMATISATION DES LIAISONS PAR LES TORSEURS .....	8
2.4	CAS PARTICULIER D'UNE CHARGE LINEIQUE.....	10
<b>3</b>	<b>DEGRE D'HYPERSTATICITE D'UN SYSTEME .....</b>	<b>11</b>
3.1	DEFINITIONS .....	11
3.2	EXEMPLES.....	11
3.3	DEGRE D'HYPERSTATICITE INTERNE .....	13
3.4	DEGRE D'HYPERSTATICITE EXTERNE .....	13
3.5	AUTRES FORMULES POUR LE DEGRE GLOBAL .....	13
<b>4</b>	<b>RESOLUTION D'UN PROBLEME DE RDM .....</b>	<b>15</b>
4.1	DEMARCHE.....	15
4.2	EXEMPLE .....	15
<b>5</b>	<b>ETUDE DES POUTRES.....</b>	<b>17</b>
5.1	NOTION DE POUTRE.....	17
5.2	HYPOTHESES .....	17
5.3	EFFORTS DANS UNE POUTRE : TORSEUR DE COHESION.....	18
<b>6</b>	<b>CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS .....</b>	<b>21</b>
6.1	CENTRE DE GRAVITE.....	21
6.2	MOMENT STATIQUE .....	22
6.3	RELATION ENTRE LE MOMENT STATIQUE ET LE CENTRE DE GRAVITE.....	22
6.4	MOMENT QUADRATIQUE.....	23
6.5	MOMENT QUADRATIQUE POLAIRE .....	25
6.6	MOMENT QUADRATIQUE ET MOMENT QUADRATIQUE POLAIRE DE SECTIONS USUELLES .....	26
<b>7</b>	<b>ESTIMATION DES CONTRAINTES .....</b>	<b>28</b>
7.1	TRACTION – COMPRESSION.....	28
7.2	CISAILLEMENT .....	30
7.3	TORSION .....	33
7.4	FLEXION PURE .....	33
7.5	PRINCIPE DE SUPERPOSITION .....	35
7.6	CONCENTRATION DE CONTRAINTES.....	37
7.7	CRITERES DE RUPTURE / DIMENSIONNEMENT.....	38
<b>8</b>	<b>LOI DE COMPORTEMENT D'UNE POUTRE EN FLEXION .....</b>	<b>40</b>
8.1	DEFORMEE D'UNE POUTRE EN FLEXION.....	40
<b>9</b>	<b>SYSTEMES HYPERSTATIQUES.....</b>	<b>44</b>
9.1	RESOLUTION D'UN PROBLEME HYPERSTATIQUE .....	44
9.2	METHODE DES DEPLACEMENTS .....	46
<b>10</b>	<b>POUTRES CONTINUES.....</b>	<b>55</b>
10.1	THEOREME DES TROIS MOMENTS .....	55
10.2	MOMENT FLECHISSANT .....	58
10.3	EFFORT TRANCHANT .....	60
10.4	FORMULAIRE.....	61

10.5	POUTRES CONTINUES PAR STATIQUE GRAPHIQUE .....	61
<b>11</b>	<b>METHODES ENERGETIQUES.....</b>	<b>63</b>
11.1	ENERGIE DE DEFORMATION .....	63
11.2	THEOREME DE RECIPROCITE DE MAXWELL-BETTI .....	66
11.3	THEOREME DE CASTIGLIANO .....	68
11.4	THEOREME DE MENABREA.....	71
11.5	THEOREME DE LA CHARGE UNITAIRE.....	71
<b>12</b>	<b>FLAMBEMENT .....</b>	<b>76</b>
12.1	INTRODUCTION.....	76
12.2	MODELISATION DU PHENOMENE.....	77
<b>13</b>	<b>FICHES METHODES .....</b>	<b>81</b>
13.1	POUR NE PLUS VOUS TROMPER DANS LES BRAS DE LEVIER ET LES SIGNES DES MOMENTS .....	81
<b>14</b>	<b>RAPPELS : PROPRIETES MECANIQUES DES MATERIAUX .....</b>	<b>83</b>
14.1	MATERIAU HOMOGENE / HETEROGENE ET MATERIAU ISOTROPE / ANISOTROPE.....	83
14.2	DEFORMATION .....	83
14.3	COMPORTEMENT EN TRACTION.....	83
<b>15</b>	<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....</b>	<b>87</b>

Couverture : image générée par IA

# 1 Généralités

La Résistance des Matériaux « *a pour objet l'étude des conditions d'équilibre élastique des corps* » [2].

La Figure 1 présente une démarche classique de dimensionnement d'une structure, partant d'une conception donnée au départ, de conditions de service imposées par le cahier des charges et d'un matériau donné.

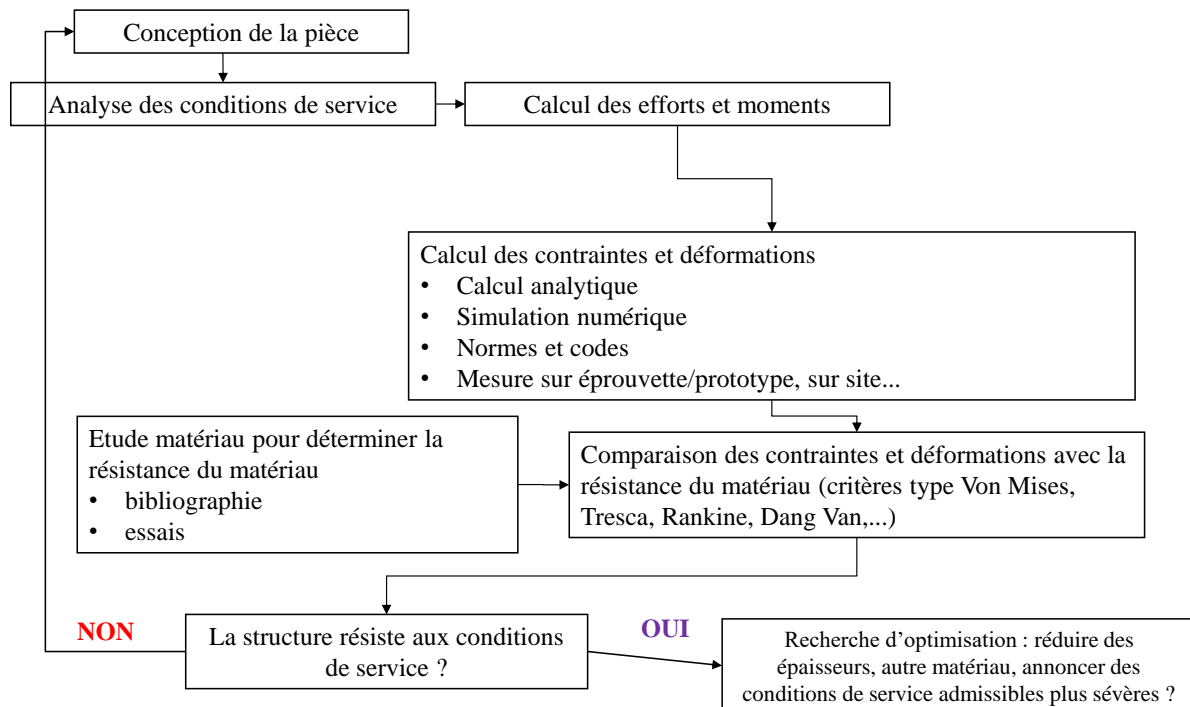


Figure 1. Exemple de conception et analyse d'une structure

On parlera plutôt de dimensionnement lorsque, partant des efforts de service et du matériau, il faudra estimer les dimensions de la pièce pour qu'elle résiste aux conditions de service.

On parlera plutôt de justification lorsque, partant des dimensions, des efforts de service, du matériau, on vérifiera par le calcul que la pièce résiste aux conditions de service.

On peut distinguer 4 méthodes d'analyse d'une structure :

- Analytique : théorie classique de la Résistance Des Matériaux issue de la Mécanique des milieux continus. C'est l'objet de ce document.
- Normes & Codes : théorie classique + quelques paramètres, diagrammes, résultats issus de l'expérience ou d'essais + quelques coefficients de sécurité spécifiques, conditions de chargement « métier »...etc.
- Simulation numérique (Figure 3 et Figure 4)
- Essais (Figure 2)

Les méthodes analytiques ne sont pas à délaissier : elles permettent rapidement et à moindre coût de dimensionner/justifier une structure, ou de vérifier le résultat d'une simulation, d'un essai. Dans certains secteurs elles restent la première méthode d'analyse des structures.

Les normes et codes proviennent d'organismes extérieurs à l'entreprise (AFNOR, réglementation, Eurocodes, CODAP...) ou sont mis en œuvre par l'entreprise elle-même afin de respecter une réglementation générale (cas de l'aéronautique).

La simulation numérique est aujourd'hui **peu coûteuse** et relativement simple d'usage mais un logiciel peut fournir des **résultats aberrants**, donc cette méthode demande du recul et de l'esprit critique....

Les essais sont **coûteux** et parfois **fastidieux** mais restent un **moyen fiable de valider une conception**. En R&D ils fournissent de nouvelles connaissances, valident les modèles...etc. Certains secteurs d'activité sont obligés, par réglementation, de fournir des résultats d'essais de validation.

La meilleure approche est en fait de **comparer entre elles toutes ces méthodes** afin de se faire sa meilleure idée sur la résistance finale de la structure.

	Principe	Avantages	Inconvénients
Théorie analytique	Calcul "feuille blanche" à partir de la théorie analytique standard	Rapide Bon marché	Inutilisable pour géométries, chargements, comportements matériaux complexes
Normes & Codes	Calculs analytiques basés sur des modèles souvent issus d'observations expérimentales	Rapide Bon marché	Difficile pour géométries, chargements, comportements matériaux complexes Trop conservatif parfois
Simulation numérique	Logiciels du commerce standards (ABAQUS, NASTRAN, ANSYS, MSC, CATIA, SOLIDWORKS.....) Méthodes numériques : éléments finis,.....etc	Utilisable pour des géométries et comportements complexes	Coût plus élevé que les méthodes analytiques (10k€-30k€ une licence logiciel) Expertise et esprit critique nécessaires Puissance de calcul nécessaire
Essais	Essai mécanique "échelle 1" ou sur modèles réduits en laboratoire d'essais	Validation idéale de la tenue d'une structure Utilisable pour des géométries et comportements très complexes	Valide seulement pour le cas de charge étudié Si besoin de modification géométrie ou matériau, procédure longue Cher

Tableau 1. Comparaison des différentes méthodes de dimensionnement



Figure 2. Essai de fatigue sur le COMET ([http://jn.passieux.free.fr/html/Comet\\_1.php](http://jn.passieux.free.fr/html/Comet_1.php))

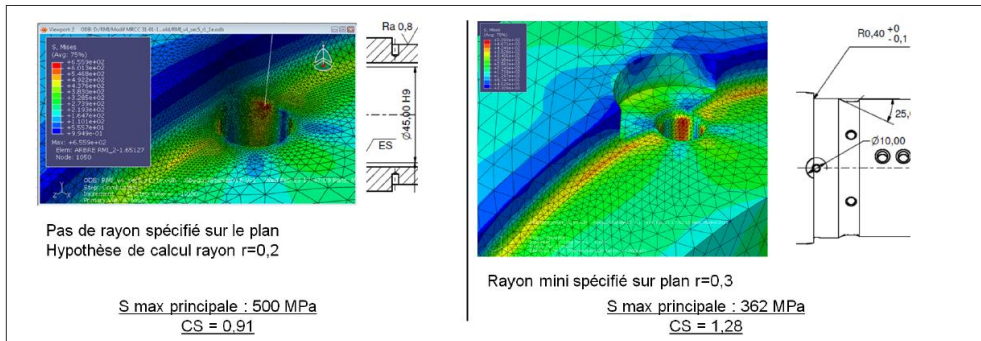


Fig. 8 : Exemple d'optimisation en fatigue de la conception du RMI. A gauche : conception originale. A droite : conception optimisée. CS : Coefficient de Sécurité

Figure 3. Exemple de calcul par éléments finis sur Abaqus [3]

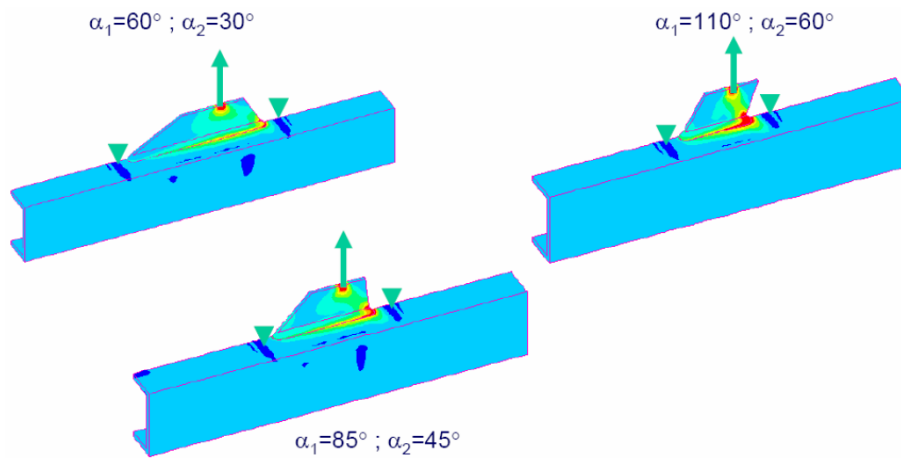


Figure 21. 3 different attachment geometries analysed by FEA

Figure 4. Simulation numérique de diverses attaches soudées [4]

## 2 Estimation des efforts et moments

### 2.1 Notion de torseur

#### 2.1.1 Constatations

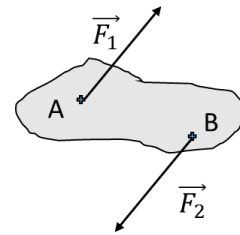
##### Constatation 1

En mécanique du point, l'équilibre du système se traduit par une somme des forces extérieures nulles :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

En mécanique des solides, cette condition est-elle suffisante ?

Soit un solide soumis à l'action de deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  telles que  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ .

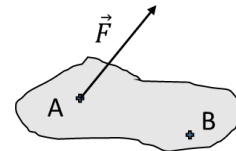


On a bien  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$  et pourtant on voit bien que le solide n'est pas à l'équilibre. Le solide n'est pas à l'équilibre car la somme des moments n'est pas nulle.

##### Constatation 2

La force F ci-dessous, appliquée en A, exerce un moment en B. Si l'on souhaite exprimer au point B l'action qu'a cette force, on doit exprimer à la fois la force F et le moment dû à cette force.

Ces constatations montrent que l'on a besoin d'un outil mathématique nouveau : le torseur. Il contient à la fois l'information sur la force et l'information sur le moment appliqué.



#### 2.1.2 Torseur : définition

Un torseur statique d'action mécanique est un système constitué de deux grandeurs :

- Une force appelée « résultante »  $\vec{R}$
- Un moment résultant  $\vec{M}$

L'action en A, exercée par un solide 1 sur un solide 2, dans le repère (X,Y,Z) est exprimée comme ci-dessous :

$$[Action\ 1 \rightarrow 2]_A = \begin{matrix} \begin{matrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{matrix} \\ A \end{matrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

$X_{12}$ ,  $Y_{12}$  et  $Z_{12}$  sont les composantes dans le repère (X,Y,Z) de la force (résultante) appliquée par le solide 1 sur le solide 2 en A.

$L_{12}$ ,  $M_{12}$  et  $N_{12}$  sont les composantes dans le repère (X,Y,Z) du moment appliqué par le solide 1 sur le solide 2 en A.

De nombreuses notations existent. L'essentiel est d'en utiliser une suffisamment explicite pour le lecteur.

### 2.1.3 Déplacement d'un torseur

Le torseur en B d'une action mécanique appliquée au point A a pour expression :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R} \end{array} \right\}_B = \boxed{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A}$$

### 2.1.4 Torseur pour un problème plan

Dans le plan un solide est soumis à deux forces et un moment. Par exemple dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$ , les forces ont pour seules composantes X et Y et les moments sont seulement suivant  $\vec{z}$ . Le torseur d'action mécanique sera :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} X \\ Y \\ / \end{array} \right\}_A \quad \left\{ \begin{array}{c} / \\ / \\ N \end{array} \right\}}$$

## 2.2 Principe fondamental de la statique

Enoncé : un solide S est en équilibre sous l'action de n torseurs d'actions mécaniques si la somme des n torseurs, tous écrits au même point A, est égale au torseur nul.

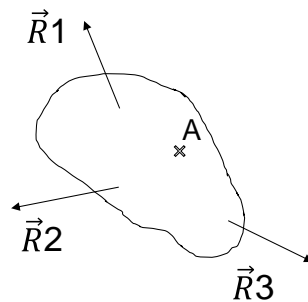


Figure 5. Solide soumis à trois actions mécaniques

Pour l'exemple de la Figure 5 le PFS s'écrira :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1 \end{array} \right\}_A} + \boxed{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2 \end{array} \right\}_A} + \boxed{\left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_3 \\ \vec{M}_3 \end{array} \right\}_A} = \boxed{\left\{ \begin{array}{c} \Sigma \vec{R}_i \\ \Sigma \vec{M}_i \end{array} \right\}_A} = \boxed{\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A}$$

### 2.3 Schématisation des liaisons par les torseurs

Une liaison technologique usuelle peut être schématisée sous forme d'un torseur.

Voir colonne actions transmissibles de la figure ci-dessous.

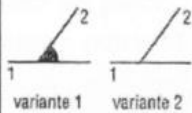
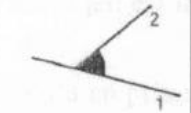
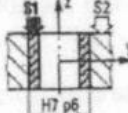
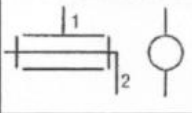
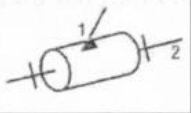
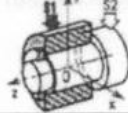
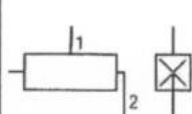
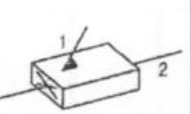
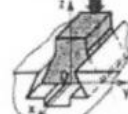
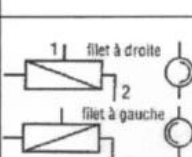
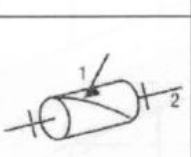
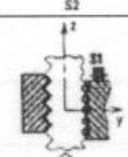
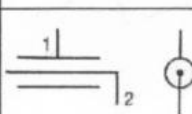
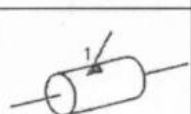
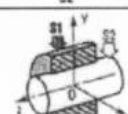
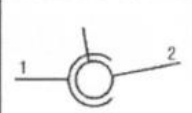

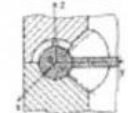
Symbole des liaisons mécaniques NFE 04-015 ISO 3952					
Nom de la liaison	Représentation plane	Représentation en perspective	Exemple	Torseur cinématique	Actions transmissibles
Encastrement ou liaison fixe				$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_0$	$\begin{bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{bmatrix}_0$
Pivot d'axe (0,Z)				$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \omega_z \end{bmatrix}_0$	$\begin{bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{bmatrix}_0$
Glissière d'axe (0,X)				$\begin{bmatrix} V_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_0$	$\begin{bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{bmatrix}_0$
Hélicoïdale d'axe (0,Z)				$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & V_z \omega_z \end{bmatrix}_0$ $V_z = \frac{p}{2\pi} \omega_z$	$\begin{bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{bmatrix}_0$ $N = \frac{p}{2\pi} Z$
Pivot glissant d'axe (0,Z)				$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & V_z \omega_z \end{bmatrix}_0$	$\begin{bmatrix} X & L \\ Y & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_0$
Rotule à doigt de centre 0, axe doigt (0,Z)				$\begin{bmatrix} 0 & \omega_x \\ 0 & 0 \\ 0 & \omega_z \end{bmatrix}_0$	$\begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & 0 \end{bmatrix}_0$

Tableau 2. Schématisation des liaisons par les torseurs

Les liaisons les plus rencontrées dans les poutres sont présentées ci-dessous.

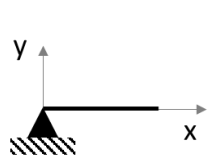
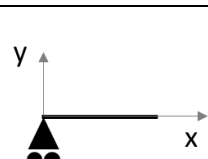
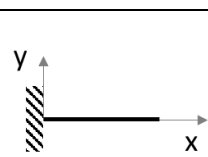
Liaison	Schéma usuel	Torseur associé
Appui		$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ A \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} / \\ / \\ 0 \end{Bmatrix}$
Appui glissant		$\begin{Bmatrix} 0 \\ Y \\ A \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} / \\ / \\ 0 \end{Bmatrix}$
Encastrement		$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ A \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} / \\ / \\ N \end{Bmatrix}$

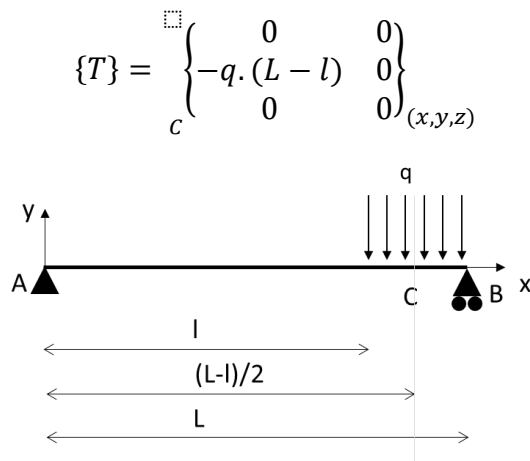
Tableau 3. Schématisation des liaisons usuelles de RDM par les torseurs

## 2.4 Cas particulier d'une charge linéique

Une charge linéique est une charge appliquée le long d'un élément 1D. C'est une charge par unité de longueur exprimée en N/m.

Pour exprimer son moment en un point, on peut représenter une charge linéique par une force ponctuelle appliquée au milieu de la ligne d'application de cette charge.

La charge linéique ci-dessous, appliquée entre  $l$  et  $L$ , peut donc être représentée par le torseur en  $C$  :



On peut déplacer ce torseur en A

$$\vec{M}_A = \vec{M}_C + \vec{AC} \wedge (-q \cdot (L - l) \cdot \vec{y}) = \begin{pmatrix} \frac{L-l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -q \cdot (L-l) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -q \cdot \frac{(L-l)^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\{T\}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ -q \cdot (L-l) \\ 0 \\ 0 \\ -q \cdot \frac{(L-l)^2}{2} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

### 3 Degré d'hyperstaticité d'un système

#### 3.1 Définitions

On définit :

- $d_{Global}$  degré d'hyperstaticité global du système.  $d_{Global}$  correspond au nombre d'équations nécessaires, en plus des équations d'équilibre, pour calculer les réactions d'appui.
- $d_{externe}$  degré d'hyperstaticité externe
- $d_{interne}$  degré d'hyperstaticité interne

Dans le plan on a

$$d_{externe} = r - 3$$

$$d_{interne} = l_i - (3b - 3)$$

$$d_{Global} = d_{externe} + d_{interne}$$

Avec

- $r$  : nombre de réactions d'appui
- $l_i$  nombre d'inconnues dues aux liaisons internes
- $b$  nombre d'éléments composant la structure

Remarque : dans l'espace, on a :

$$d_{externe} = r - 6$$

$$d_{interne} = l_i - (6b - 6)$$

#### 3.2 Exemples

Les structures de la Figure 6 illustrent les trois degrés d'hyperstaticité et leur relation.

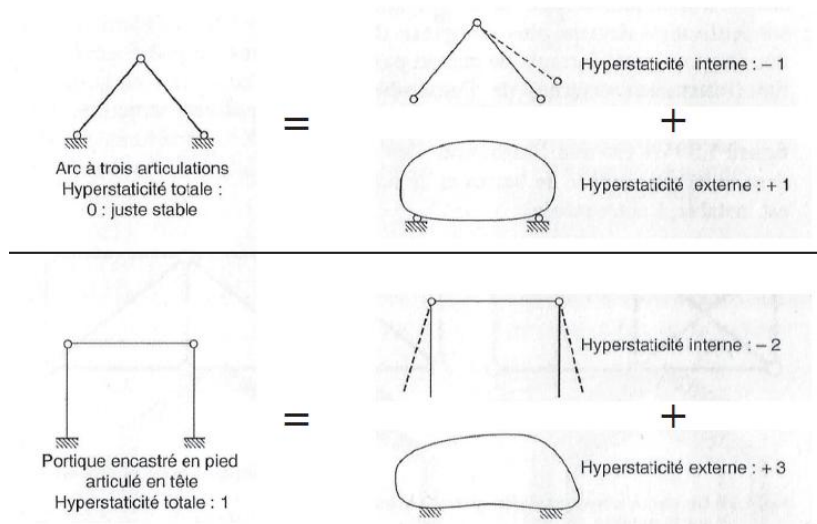


Figure 6. Exemples de degré d'hyperstaticité (EPSAA - construction A3 Guillaume NICOLAS - 2019-2020)

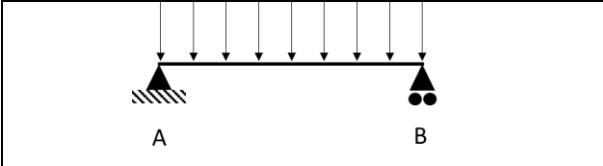
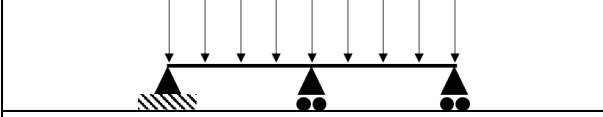
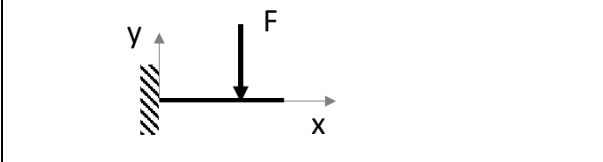
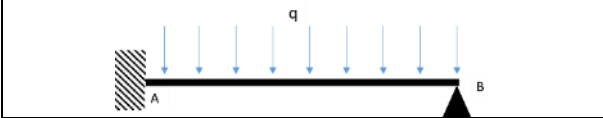
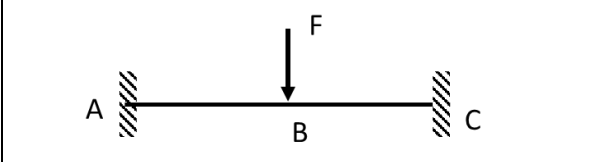
	Isostatique
	Hyperstatique
	Isostatique
	Hyperstatique
	Hyperstatique

Figure 7. Systèmes isostatiques / hyperstatiques

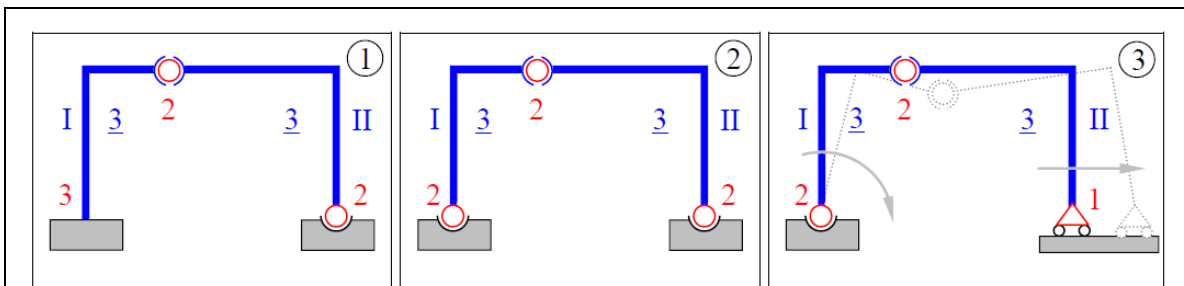


Image : ECAM Lyon - RdM - Serge VIALA

Cas	1	2	3
Paramètres	$r=5$ $li=2$ $b=2$	$r=4$ $li=2$ $b=2$	$r=3$ $li=2$ $b=2$
Externe	$5-3=2$	$4-3=1$	$3-3=0$
Interne	$2-(3*2-3)=-1$	$2-(3*2-3)=-1$	$2-(3*2-3)=-1$
Global	1	0	-1

Figure 8. Exemples de structures isostatiques / hyperstatiques

### 3.3 Degré d'hyperstaticité interne

On parle de stabilité interne quand deux points de la structure ne peuvent pas se déplacer l'un par-rapport à l'autre sans qu'il y ait déformation des éléments de la structure. Autrement dit, on a stabilité interne s'il est nécessaire que les éléments de la structure se déforment pour que deux points aient un déplacement relatif non nul.

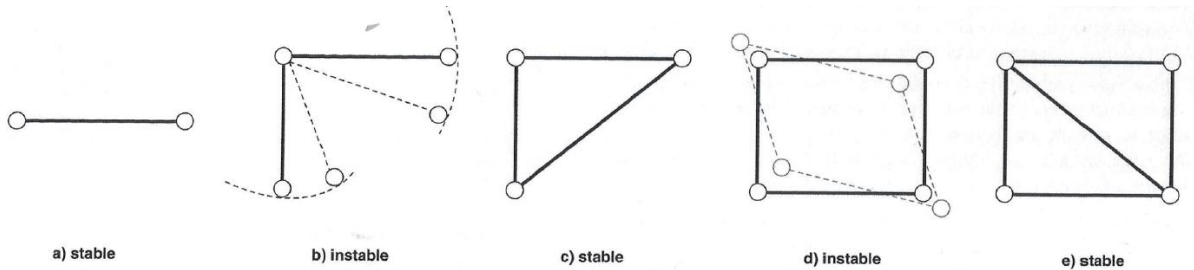


Figure 9. EPSAA - construction A3 Guillaume NICOLAS - 2019-2020

### 3.4 Degré d'hyperstaticité externe

Pour le degré d'hyperstaticité externe, on considère la structure comme indéformable et on compare le nombre d'inconnues de liaison au nombre d'équations apportées par les équations d'équilibre.

Pour des structures simples (poutres,...), le degré d'hyperstaticité interne étant nul, on confond souvent le degré d'hyperstaticité externe et le degré d'hyperstaticité global.

### 3.5 Autres formules pour le degré global

Il existe de nombreuses autres formules pour calculer les différents degrés d'hyperstaticité.

Formule 1

$$d_G = p - ddl$$

- ddl nombre total de degrés de liberté avant assemblage de la structure (3 par élément dans le plan et 6 dans l'espace)
- p nombre total de degrés de liberté bloqués par les liaisons

Articulation		$p=2(n-1)$ degrés de liberté bloqués par les liaisons N : nombre d'éléments reliés entre eux
Encastrement		$p=3(n-1)$ degrés de liberté bloqués par les liaisons N : nombre d'éléments reliés entre eux

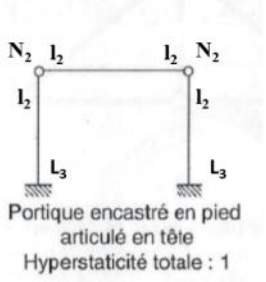
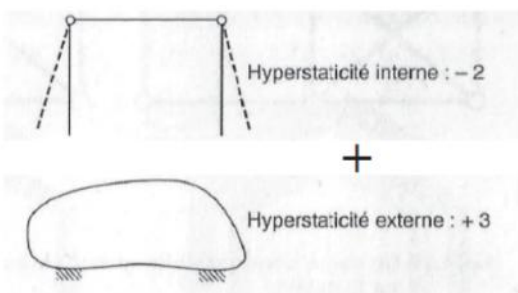
Formule 2

$$d_{global} = \sum L_i + \sum l_i - \sum N_i - 3b$$

- $\sum L_i$  liaisons externes (nombre de réactions aux appuis)
- $\sum l_i$  liaisons dans chaque barre
- $\sum N_i$  nombre de ddl bloqués aux nœuds de la structure
- $b$  nombre d'éléments composant la structure

Exemple

$$d_{global} = 2L_3 + 4l_2 - 2N_2 - 3 = 6 + 8 - 4 - 3 = 1$$

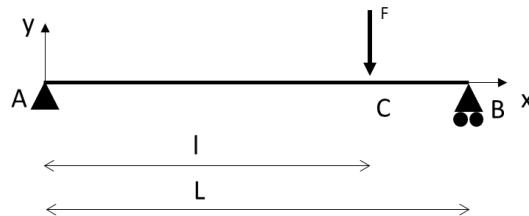
	=		$\sum L_i = 6$ $\sum l_i = 8$ $\sum N_i = 4$ $B = 3$
EPSAA - construction A3 Guillaume NICOLAS - 2019-2020			

## 4 Résolution d'un problème de RDM

### 4.1 Démarche

1. Schématiser les liaisons par des torseurs
2. Isoler une pièce de la structure
3. Faire le bilan des forces sur cette pièce
4. Calculer le degré d'hyperstaticité du problème (si problème hyperstatique, voir chapitres suivants)
5. Si problème isostatique, appliquer le PFS
6. Résoudre le système d'équations

### 4.2 Exemple



#### Etape 1 : définir les torseurs

Exprimer le torseur d'action mécanique de chaque action ou liaison extérieure.

Appui en A	Appui glissant en B	Effort en C
$\{T_1\} = \begin{matrix} \square \\ A \end{matrix} \begin{pmatrix} R_{xA} & 0 \\ R_{yA} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$	$\{T_2\} = \begin{matrix} \square \\ B \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R_{yB} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$	$\{T_3\} = \begin{matrix} \square \\ C \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$
$\vec{R}_A = R_{xA} \cdot \vec{x} + R_{yA} \cdot \vec{y}$ $\vec{M}_A = \vec{0}$	$\vec{R}_B = R_{yB} \cdot \vec{y}$ $\vec{M}_B = \vec{0}$	$\vec{F}_C = -F \cdot \vec{y}$ $\vec{M}_C = \vec{0}$

#### Etape 2 : déplacer les torseurs en un même point

On choisit le point A.

- Appui en A

$$\{T_1\} = \begin{matrix} \square \\ A \end{matrix} \begin{pmatrix} R_{xA} & 0 \\ R_{yA} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$$

- Appui glissant en B

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{AB} \wedge \vec{R}_B = \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R_{By} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \cdot R_{Bx} \end{pmatrix}$$

$$\{T_2\} = \begin{matrix} \square \\ A \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R_{yB} & 0 \\ 0 & L \cdot R_{Bx} \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$$

- Effort en C

$$\vec{M}_A = \vec{M}_C + \vec{AC} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \cdot l \end{pmatrix}$$

$$\{T_3\} = \begin{matrix} \square \\ A \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F \cdot l \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$$

### Etape 3 : Principe fondamental de la statique

Pour un système en équilibre, la somme des torseurs est égale au torseur nul, en tout point du système. Il vient que la somme des résultantes et la somme des moments sont nulles.

$$\begin{matrix} \square \\ A \end{matrix} \begin{pmatrix} R_{xA} & 0 \\ R_{yA} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)} + \begin{matrix} \square \\ A \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R_{yB} & 0 \\ 0 & L \cdot R_{Bx} \end{pmatrix}_{(x,y,z)} + \begin{matrix} \square \\ A \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F \cdot l \end{pmatrix}_{(x,y,z)} = \{0\}$$

$$R_{xA} = 0$$

$$R_{yA} + R_{yB} - F = 0$$

$$L \cdot R_{Bx} - F \cdot l = 0$$

## 5 Etude des poutres

### 5.1 Notion de poutre

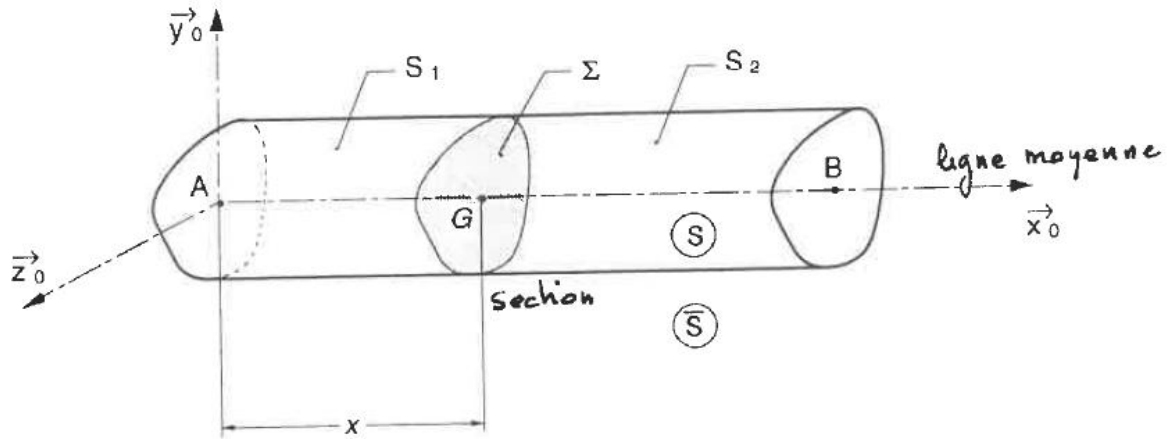


Figure 10. Notion de poutre

Une poutre est un solide dont une dimension, la longueur, est grande devant les grandeurs caractéristiques de la section (diamètre, côté, largeur, hauteur.....). C'est un solide généré par une section ayant translaté le long d'une abscisse (droite ou curviligne).

Les charges supportées doivent être contenues dans le plan de symétrie.

### 5.2 Hypothèses

Le matériau sera supposé homogène et isotrope.

Les déformations seront supposées faibles par-rapport aux dimensions de la poutre.

Analyse élastique : le matériau reste dans le domaine élastique.

Principe de St Venant : loin des points d'application des charges, l'état de contraintes ne dépend que du torseur associé à l'effet de ces charges.

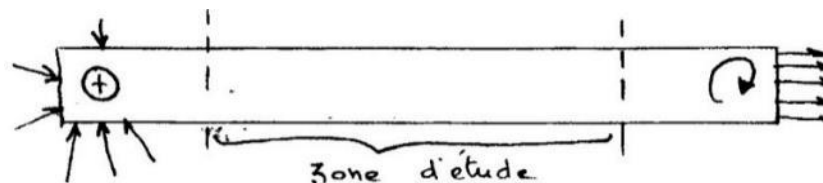


Figure 11. Principe de St Venant

Hypothèse de Navier Bernoulli : toute section droite avant déformation reste, après déformation, une section droite.

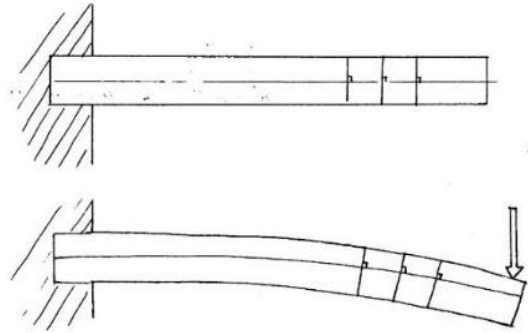


Figure 12. Hypothèse de Navier Bernoulli

## 5.3 Efforts dans une poutre : torseur de cohésion

### 5.3.1 Définition

Par définition, le torseur des actions de la partie II sur la partie I, écrit [Actions II → I], est le torseur de cohésion (ou torseur des efforts intérieurs).

$$[\text{Actions II} \rightarrow \text{I}]_G = \begin{pmatrix} N_x & M_x \\ T_y & M_y \\ T_z & M_z \end{pmatrix}$$

$N_x$  : effort normal

$T_y$  et  $T_z$  : efforts tranchants

$M_x$  : moment de torsion

$M_y$  et  $M_z$  : moments fléchissant (flexion)

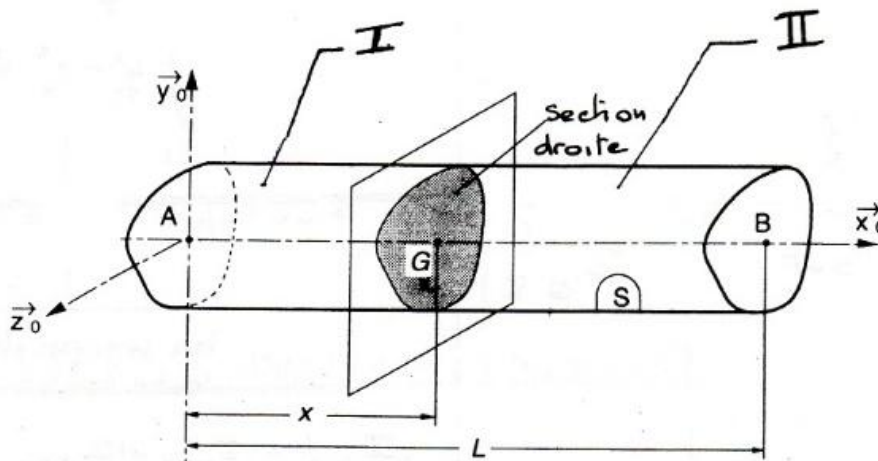
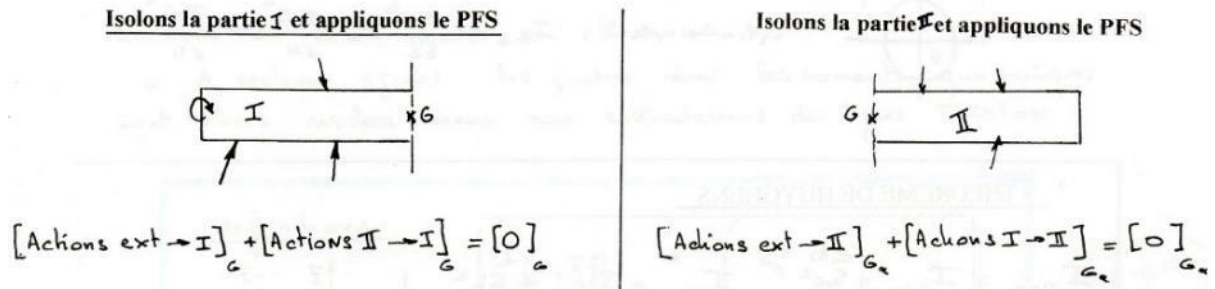


Figure 13. Méthode de la coupure dans une poutre

### 5.3.2 Calcul du torseur de cohésion

Le principe fondamental de la statique ne traite que des efforts extérieurs à la poutre. Comment alors déterminer les efforts internes en G ? On utilise la méthode de la coupure : on

coupe la poutre en deux parties I et II, suivant la section passant par G. En isolant la partie I ou la partie II, le torseur de cohésion devient un effort extérieur et peut être déterminé par le PFD.



Pour déterminer le torseur de cohésion (efforts internes), on pourra utiliser une des deux formules suivantes :

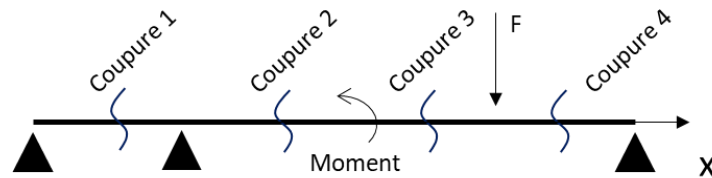
$$[Actions\ II \rightarrow I] = -[Actions\ extérieures \rightarrow I]$$

Ou

$$[Actions\ II \rightarrow I] = [Actions\ extérieures \rightarrow II]$$

### 5.3.3 Diagrammes des efforts et des moments

En partant de la gauche de la poutre, on coupe la poutre en deux parties dans une section d'abscisse x puis il suffit d'identifier les actions extérieures sur la partie de gauche ou de droite.



A chaque passage d'une liaison, d'un effort ou moment extérieur, une nouvelle coupure est nécessaire car le torseur de cohésion change d'expression.

Ci-dessous des exemples de diagrammes d'efforts et moments.

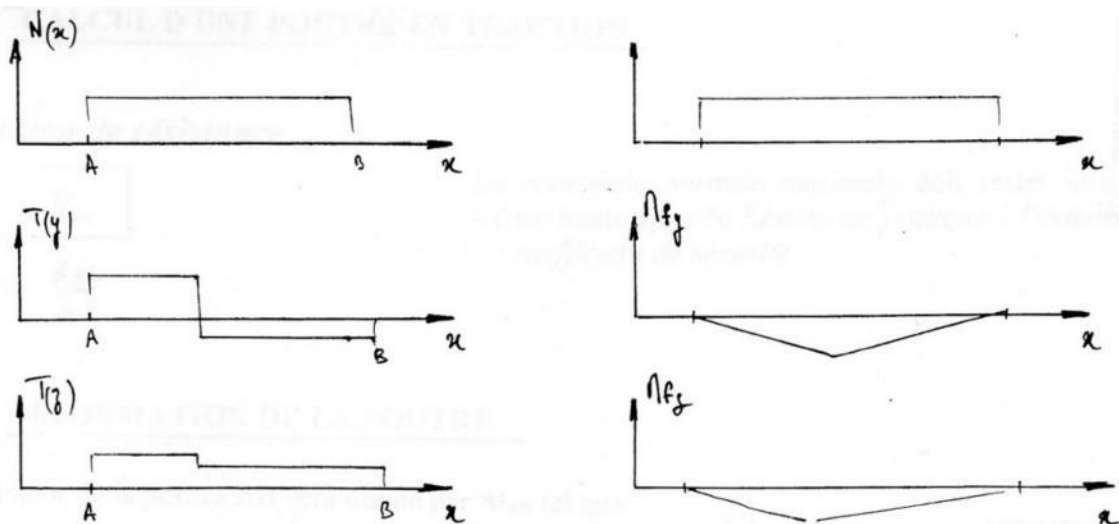


Figure 14. Diagrammes des efforts et des moments

### 5.3.4 Correspondance entre les diagrammes

L'équilibre de toute section de la poutre nous donne :

$$\frac{dM_f}{dx} + T = 0$$

$$\frac{dM_t}{dx} = 0$$

### 5.3.5 Torseurs de cohésion usuels

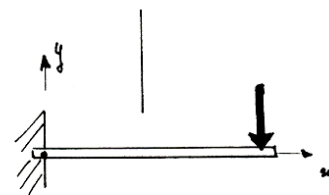
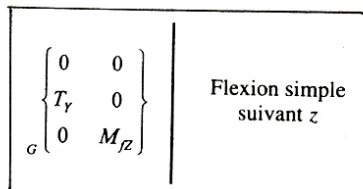
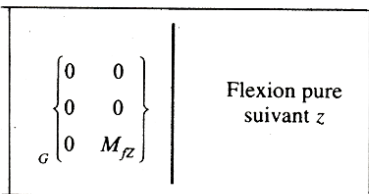
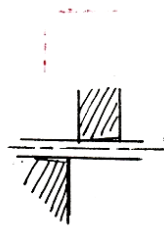
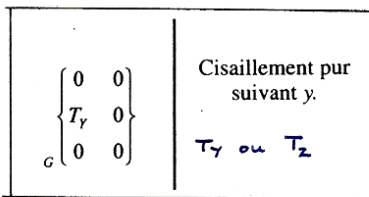
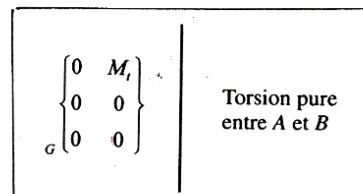
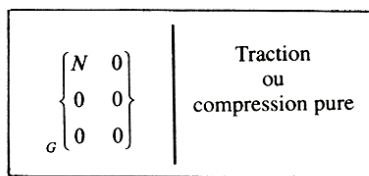


Figure 15. Torseurs de cohésion pour diverses sollicitations dans une section droite [5]

## 6 Caractéristiques géométriques des sections

On connaît maintenant les “efforts intérieurs” dans la structure (torseur de cohésion).

On va déterminer les contraintes induites par ces efforts.

Pour déterminer les contraintes dans la poutre, il nous faut d’abord déterminer les caractéristiques géométriques des sections. C’est l’objet de ce chapitre.

### 6.1 Centre de gravité

#### 6.1.1 Pour un solide

Le centre de gravité G d’un solide est le barycentre des masses. Pour tout point O on a

$$m \cdot \overrightarrow{OG} = \int_{M \in \text{solide}} \overrightarrow{OM} \cdot dm$$

#### 6.1.2 Pour un ensemble de points matériels ou de solides

$$m \cdot \overrightarrow{OG} = \sum m_i \cdot \overrightarrow{OG}_i$$

#### 6.1.3 Cas d’un solide homogène

Si la masse volumique est la même en tout point (solide homogène),  $\rho(M) = \rho$  et  $m = \rho \cdot V$  donc

$$\rho \cdot V \cdot \overrightarrow{OG} = \iint_{M \in \text{Solide}} \overrightarrow{OM} \cdot \rho dV = \rho \cdot \iint_{M \in \text{Solide}} \overrightarrow{OM} \cdot dV$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{V} \cdot \iint_{M \in S} \overrightarrow{OM} \cdot dV$$

Le centre de gravité est alors le centre géométrique du solide.

#### 6.1.4 Centre de gravité d’une section homogène

Pour une section homogène, de masse surfacique identique en tout point,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{S} \cdot \iint_{M \in S} \overrightarrow{OM} \cdot dS$$

Le centre de gravité est alors le centre géométrique de la section.

## 6.2 Moment statique

Le moment statique  $S_{\Delta}$  d'une section  $S$  par-rapport à l'axe  $\Delta$  est défini par

$$S_{\Delta} = \iint_S \alpha \cdot dS$$

La distance  $r$  est la distance entre la surface  $dS$  et l'axe  $\Delta$ .

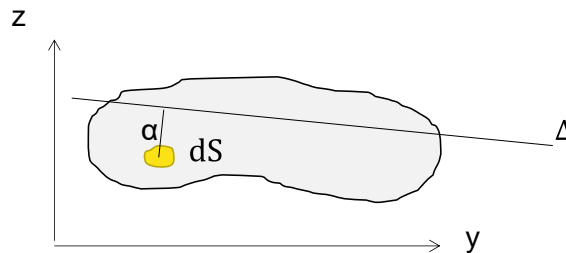


Figure 16

En particulier, les moments statiques par-rapport aux axes  $(Oy)$  et  $(Oz)$  ont pour expression

$$S_{Oy} = \iint_S z \cdot dydz$$

$$S_{Oz} = \iint_S y \cdot dydz$$

## 6.3 Relation entre le moment statique et le centre de gravité

On a vu que pour une section homogène,

$$\vec{OG} = \frac{1}{S} \cdot \iint_{M \in S} \vec{OM} \cdot dS$$

Si l'on projette cette égalité vectorielle sur les axes de la Figure 16 on obtient

$$y_g = \frac{1}{S} \cdot \iint_{M \in S} y \cdot dydz$$

$$z_g = \frac{1}{S} \cdot \iint_{M \in S} z \cdot dydz$$

On a donc

$$S \cdot y_g = S_{Oz}$$

$$S \cdot z_g = S_{Oy}$$

Dans la pratique, on calculera souvent le moment statique d'une section à l'aide de ces relations, car on connaît généralement facilement la position du centre de gravité G.

## 6.4 Moment quadratique

### 6.4.1 Définition

Par définition, le moment quadratique d'une section S par-rapport à l'axe  $\Delta$  est défini par :

$$I_{\Delta} = \iint_S \alpha^2 \cdot dS$$

La distance  $\alpha$  est la distance entre la surface  $dS$  et l'axe  $\Delta$ .

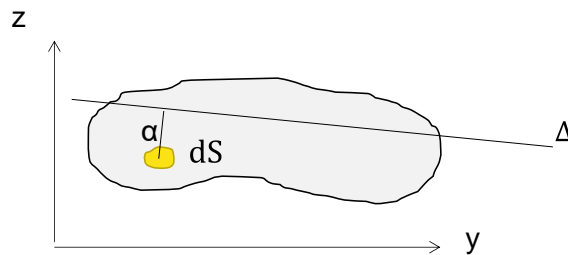


Figure 17

### 6.4.2 Moment quadratique pour un axe quelconque : théorème de Huygens

Soit le solide ci-dessous de surface S et de centre de gravité G.

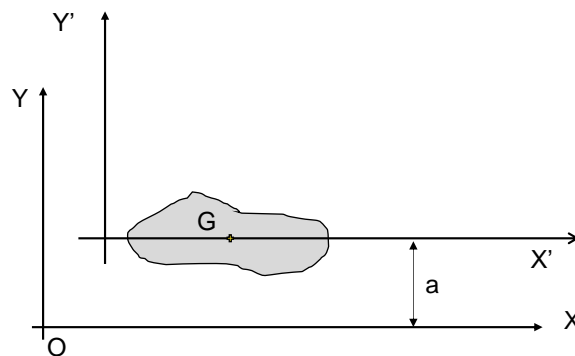


Figure 18. Moment quadratique pour un axe quelconque : théorème de Huyghens

L'axe  $X'$  passant par G est parallèle à l'axe X et situé à une distance a.

Par définition, le moment d'inertie de la section S par-rapport à l'axe GX et le moment d'inertie de la section S par-rapport à l'axe GX' ont pour expression

$$I_X = \iint_S y^2 dS$$

$$I_{GX'} = \iint_S y'^2 dS$$

Or, pour tout point M de la section S, la coordonnée y du point M dans le repère (X,Y) est

$$y = a + y'$$

$$I_X = \iint_S (a + y')^2 dS = \iint_S a^2 + 2ay' + y'^2 dS = \iint_S a^2 dS + \iint_S 2ay' dS + \iint_S y'^2 dS$$

L'intégrale  $\iint_S 2ay' dS$  est nulle car l'axe X' passe par le centre de gravité et par définition.

De plus

$$\iint_S a^2 dS = a^2 \cdot S$$

Le dernier terme n'est autre que  $I_{GX}$ .

On peut finalement écrire le théorème de Huygens : « le moment d'inertie  $I_X$  par rapport à un axe quelconque X est égal au moment d'inertie  $I_{GX'}$  de cette surface par rapport l'axe X' parallèle au premier et mené par son centre de gravité, augmenté du produit de la surface S par le carré de la distance a entre ces deux axes. »

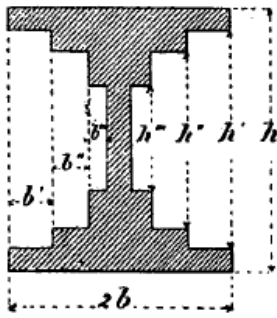
$$I_{OX} = I_{GX} + a^2 \cdot S$$

### 6.4.3 Remarque : calcul de moments quadratiques pour des sections usuelles

L'utilisation de l'intégrale peut mener à des calculs fastidieux.

Dans la pratique, on pourra presque toujours calculer le moment quadratique d'une section en la décomposant en surfaces élémentaires dont le moment quadratique est connu et en opérant par addition ou soustraction (Figure 19), et en utilisant le théorème de Huygens si nécessaire.

Citons à titre d'exemple le profil doublement symétrique ci-joint, que l'on a souvent occasion d'employer.



Fig, 28.

La surface est égale à celle du rectangle extérieur de dimensions  $2b$  et  $h$ , dont on retrancherait six rectangles partiels, symétriques deux à deux et ayant pour dimensions respectives  $h'$  et  $b'$ ,  $h''$  et  $b''$ ,  $h'''$  et  $b'''$ .

La valeur du moment d'inertie relatif à l'axe de symétrie horizontal s'obtiendra aisément en utilisant cette décomposition.

Il est égal à :

$$\frac{bh^3 - b'h'^3 - b''h''^3 - b'''h'''^3}{6}$$

Figure 19. Jean Résal - 1892 [6]

## 6.5 Moment quadratique polaire

Le moment quadratique polaire par-rapport au point O ci-dessous est donné par :

$$I_O = \iint_S r^2 dS$$

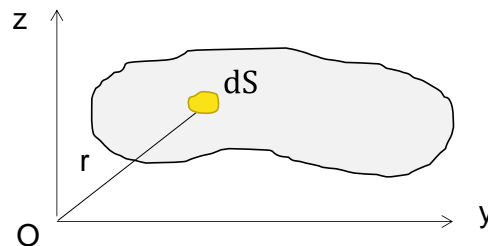


Figure 20

Remarque : en Figure 20 on a, par le théorème de Pythagore

$$I_O = \iint_S r^2 dS = \iint_S y^2 + z^2 dS$$

Donc

$$I_O = I_{oz} + I_{oy}$$

Avec  $I_{oz}$  et  $I_{oy}$  moments quadratique de la section S par-rapport à z et y.

## 6.6 Moment quadratique et moment quadratique polaire de sections usuelles

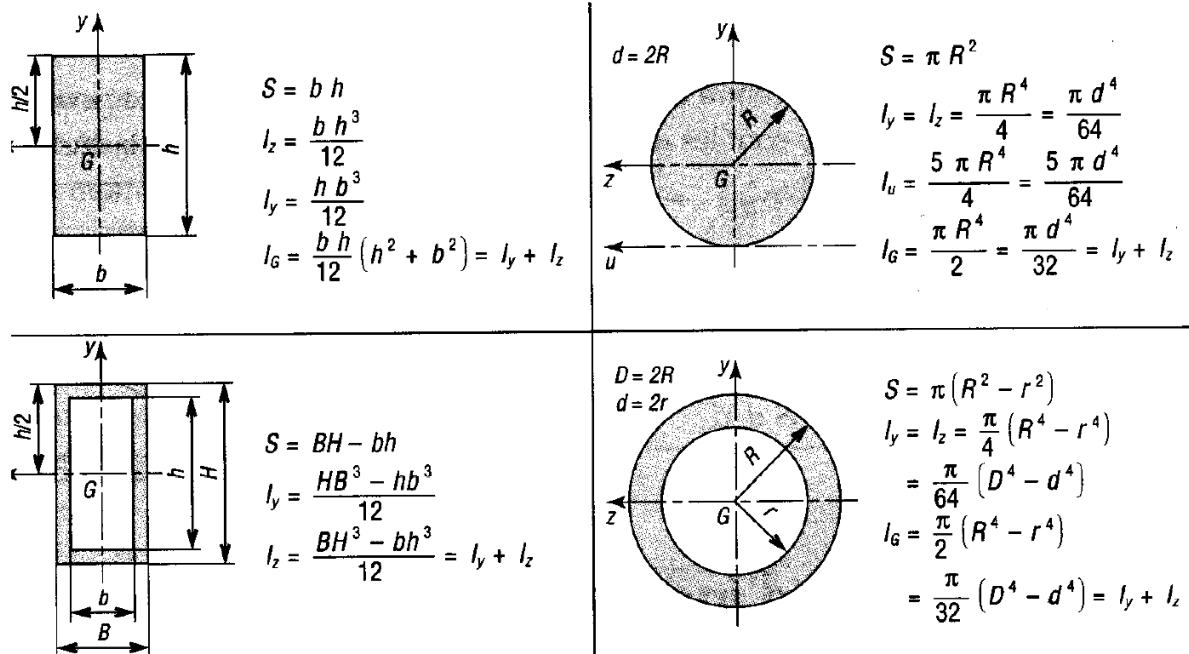


Figure 21. Moment quadratique et moment quadratique polaire de sections usuelles [7]



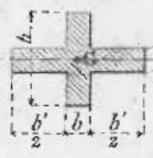
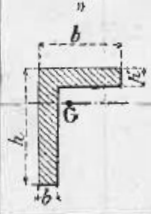
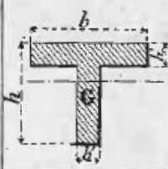

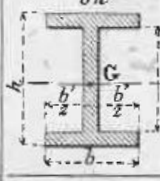
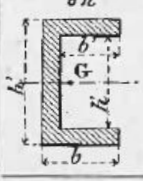




Forme	Rectangulaire pleine	Carré	Croixiforme	Equerre
Surface	$S = b \times h$	$S = a^2$	$S = hb + b'h'$	$S = bh' + b'(h-h')$
Module	$M_s = \frac{b \times h^3}{6}$	$M_s = \frac{a^3}{6}$	$M_s = \frac{bh^3 + b'h'^3}{6h}$	
Croquis				
Forme	Simple té	Rectangulaire creuse	Double té	en U
Surface	$S = bh' + b(h-h')$	$S = bh - b'h'$	$S = bh - b'h'$	$S = bh - b'h'$
Module		$M_s = \frac{bh^3 - b'h'^3}{6h}$	$M_s = \frac{bh^3 - b'h'^3}{6h}$	$M_s = \frac{bh^3 - b'h'^3}{6h}$
Croquis				
Forme	Circulaire pleine	Circulaire creuse	Elliptique pleine	Elliptique creuse
Surface	$S = \pi r^2$	$S = \pi (r^2 - r'^2)$	$S = \pi a b$	$S = \pi (a b - a' b')$
Module	$M_s = \frac{\pi r^4}{4}$	$M_s = \frac{\pi (r^4 - r'^4)}{4}$	$M_s = \frac{\pi a^3 b}{4}$	$M_s = \frac{\pi (b a^3 - b' a'^3)}{4 a}$
Croquis				

Tableau 4. Moment quadratique et moment quadratique polaire de sections usuelles [8]

## 7 Estimation des contraintes

### 7.1 Traction – Compression

En supposant un champ de contraintes uniforme sur la section, alors en tout point de S,

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{S}$$

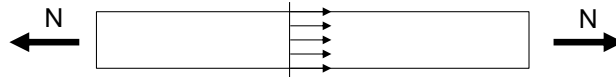


Figure 22. Traction. Profil des contraintes

#### 7.1.1 Charge excentrée : notion de noyau central

Soit une section de surface S soumise à un effort normal N.

L'effort N n'est pas appliqué au centre de la section (Figure 23), mais en un point A différent de G.

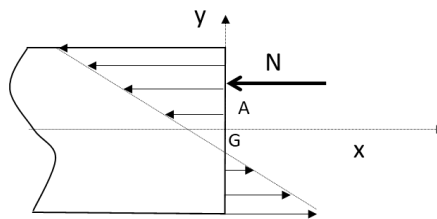


Figure 23. Allure des contraintes générées par un effort normal excentré appliqué en A

On voit que l'effort normal va induire un profil linéaire de contraintes tel que ci-dessous.

En effet, l'effort N appliqué en A est équivalent à un effort N appliquée en G + un moment fléchissant  $M_f$  en G. Le moment fléchissant  $M_f$  a pour expression :

$$\vec{M}_G(\vec{N}) = \vec{M}_A(\vec{N}) + \vec{GA} \wedge \vec{N} = \vec{GA} \wedge \vec{N} = AG \cdot N \cdot \vec{z}$$

$$M_{fz} = AG \cdot N$$

L'état de contraintes induit par l'effort N en A est donc identique à l'état de contraintes obtenu en appliquant N et  $M_f$  en G :

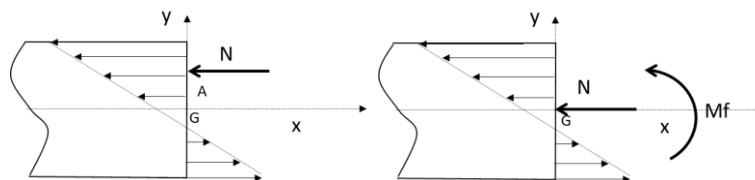


Figure 24. Allure des contraintes générées par un effort normal excentré appliqué en A. Les contraintes sont identiques à celles générées par un effort et un moment en G

On peut alors se poser la question :

Dans quelle zone de la section l'effort doit-il rester pour que les contraintes induites soient seulement de compression (si  $N < 0$ ) ou de traction (si  $N > 0$ ) ?

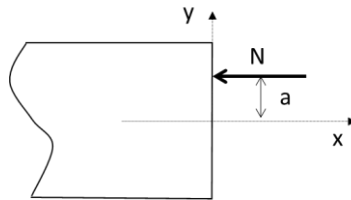
C'est une question pertinente par exemple pour un poteau fait d'un matériau montrant une faible résistance en traction (béton). On souhaiterait en effet que l'ensemble de la section reste en compression.

Le point d'application de la charge doit rester dans une partie de la section appelée **noyau central**.

Le noyau central est une partie de la section  $S$ . En tout point du noyau central, un effort normal appliqué en ce point induit des contraintes normales de signe constant sur l'ensemble de la section.

Exemple : calcul de noyau central pour une surface circulaire

Soit une surface circulaire de rayon  $R$  soumise à un effort  $N$  excentré à la distance  $a$  de l'axe neutre (centre géométrique de la section).



Les contraintes normales ont pour expression, en tout point d'ordonnée  $y$

$$\sigma = \frac{N}{S} - \frac{M_f \cdot y}{I_z}$$

Avec

$$M_f = a \cdot N$$

La contrainte maximale doit rester nulle pour que l'ensemble de la section soit en compression donc la valeur de  $a$  qui définit la limite du noyau central vérifie :

$$\frac{N}{S} - \frac{a \cdot N \cdot y}{I_z} = 0$$

$$\frac{1}{\pi R^2} - \frac{a \cdot R}{\frac{\pi R^4}{4}} = 0$$

$$a = \frac{R}{4}$$

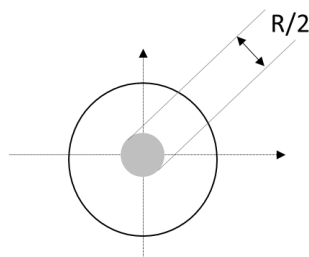


Figure 25. Noyau central d'une section circulaire

On montre ci-dessous des exemples de noyau central (surface grisée) pour diverses sections.

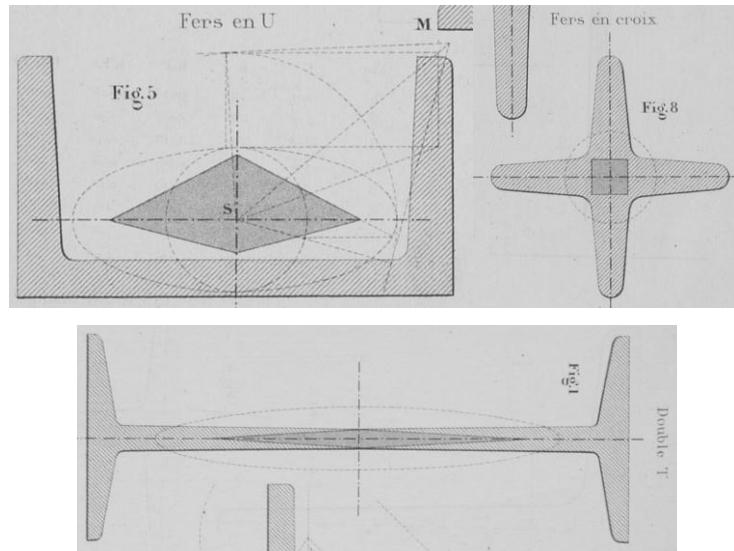


Figure 26. Ellipses centrales et noyaux de divers profils [9]

## 7.2 Cisaillement

### 7.2.1 Contrainte de cisaillement

#### 7.2.1.1 Formule simplifiée

Soit la section  $S$  soumise à l'effort tranchant  $T$  suivant l'axe  $y$ . En supposant un champ de contraintes uniforme sur la section (Figure 27), alors en tout point de  $S$ ,

$$\tau_{xy} = \frac{T}{S}$$

$$\tau_{xz} = 0$$

$\tau_{xy}$  est la contrainte de cisaillement dans la section  $S$ , suivant la direction  $y$ .

$\tau_{xz}$  est la contrainte de cisaillement dans la section  $S$ , suivant la direction  $z$ .

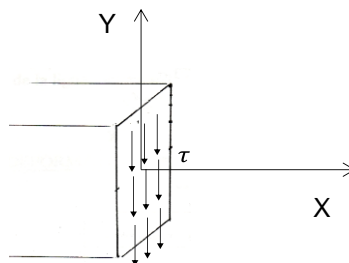


Figure 27. Hypothèse d'un champ de contrainte de cisaillement uniforme sur la section

Le champ de contraintes de cisaillement n'est pas réellement uniforme. On peut prendre cela en compte par la notion de section réduite :

$$\tau_{xy} = \frac{T}{S(1 + \eta)}$$

Section rectangulaire :  $\eta = -1/6$  ; Section circulaire :  $\eta = -1/10$

### 7.2.1.2 Autre approche

En un point de la surface de la poutre, la contrainte de cisaillement doit être tangente au contour de la section. Soit la courbe BC de longueur  $L(y)$  et située à la distance  $y$  de l'axe neutre  $Gx$  (Figure 28). Supposons que la contrainte de cisaillement est normale à la courbe BC et de valeur constante.

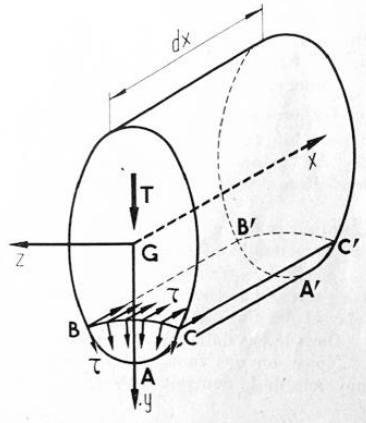


Figure 28. Cisaillement dans une section [10]

Dans la section ABC, l'effort normal est nul.

Dans la section A'B'C', on trouve des contraintes normales dues au moment fléchissant créé par l'effort tranchant T appliqué sur la section ABC. Ce moment noté  $dM$  a pour expression

$$dM = -T \cdot dx$$

Dans la section A'B'C', la résultante des contraintes normales donne :

$$\int_S \sigma dS = \int_S -\frac{T}{I_z} \cdot dx \cdot y \cdot dS = -\frac{T}{I_z} \cdot dx \cdot \int_S y dS = -\frac{T}{I_z} \cdot S_{Gz} \cdot dx$$

Avec  $S_{Gz}$  moment statique de la section ABC **par-rapport à l'axe Gz**.

Le signe - indique que quand  $T > 0$ , la face A'B'C' est en compression et l'effort normal résultant est négatif.

Par ailleurs, l'équilibre de la section jaune ci-dessous implique qu'en tout point de la face BCC'B', on trouve une contrainte tangentielle égale à  $\tau$  et parallèle à  $\vec{x}$ .

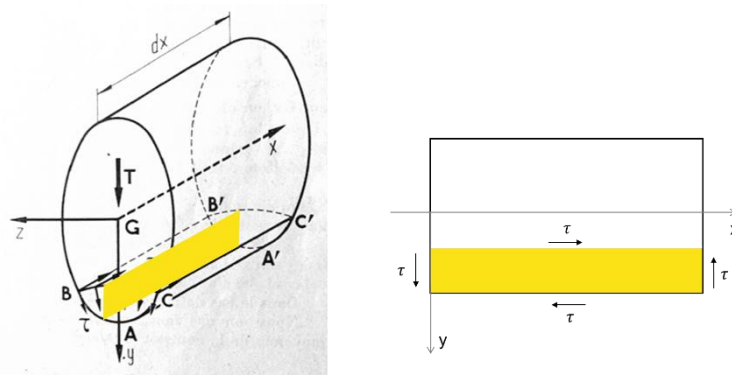


Figure 29

Finalement, le principe fondamental de la statique sur le prisme de section ABC et de longueur dx, projeté sur l'axe  $\vec{x}$ , énonce :

$$\tau \cdot dx \cdot L(y) - \frac{T}{I_z} \cdot S_{Gz} \cdot dx = 0$$

$$\tau = \frac{T \cdot S_{Gz}}{I_z \cdot L(y)}$$

Remarque : dans le cas où l'axe y est vers le haut, on prend le moment statique de la section située **au-dessus** du point considéré. Pour un exemple, voir

<https://metaletech.com/2021/02/01/calcul-des-contraintes-de-cisaillement-dans-une-section/>

### 7.2.2 Déformation angulaire

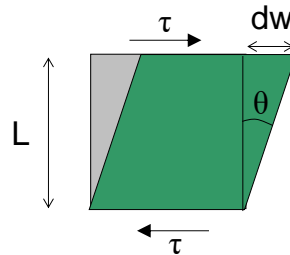


Figure 30. Déformation de cisaillement

Glissement

$$\gamma = \frac{dw}{L} = \tan \theta$$

(Faible déformation :  $\gamma \approx \theta$ )

Loi de comportement :

$$\tau = G \cdot \gamma$$

G : module de cisaillement

Pour un matériau isotrope :

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

## 7.3 Torsion

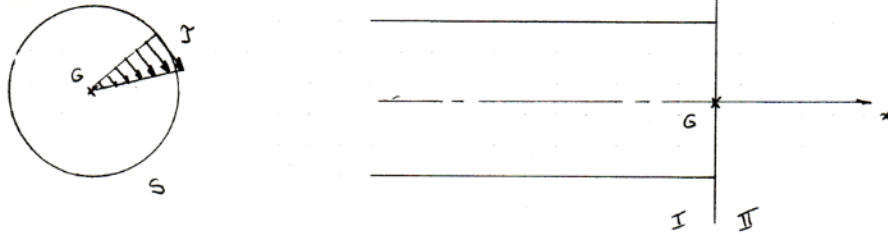


Figure 31. Torsion

Soit une section soumise à  $M_{tx}$  moment de torsion. Ce moment est porté par l'axe x de la poutre.

Contrainte de cisaillement :

$$\tau = \frac{M_{tx} \cdot r}{I_G}$$

Contrainte de cisaillement maximale au sein de la section :

$$\tau_{maxi} = \frac{M_{tx} \cdot r_{maxi}}{I_G}$$

$I_G$  : moment quadratique polaire ( $mm^4$ )

## 7.4 Flexion pure

### 7.4.1 Torseur de cohésion

Soit une poutre d'axe  $\vec{x}$  (Figure 32). Au centre de gravité de la section, en flexion pure, le torseur des efforts internes a pour composantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{pmatrix}_G$$

$M_{fz}$  est appelé moment fléchissant par-rapport à l'axe  $G\vec{z}$ .

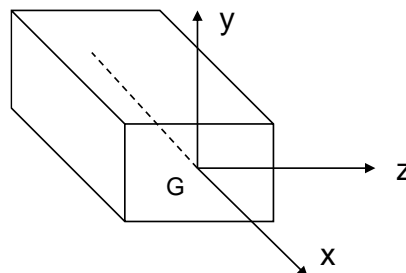


Figure 32

### 7.4.2 Contraintes en flexion pure

La flexion pure fait apparaître des contraintes normales dans la poutre. On observe expérimentalement, en flexion pure, un profil linéaire des contraintes (Figure 33).

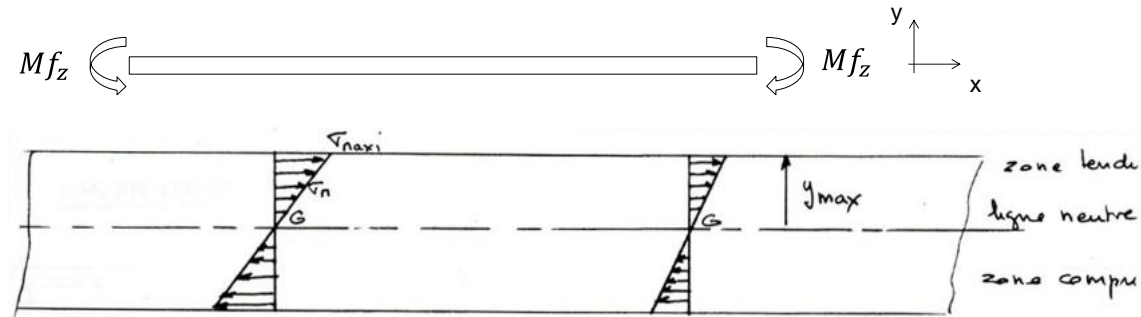


Figure 33. Répartition des contraintes en flexion pure

Soit la section  $\Sigma$  ci-dessous, soumise à un moment fléchissant  $M_f$ .

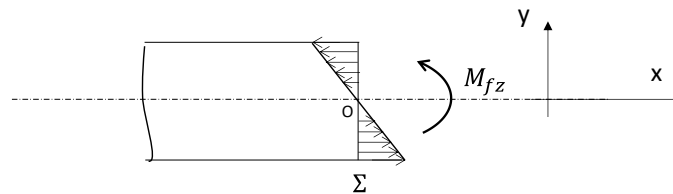


Figure 34. Profil des contraintes dans une section  $\Sigma$  soumise à un moment fléchissant  $M_{fz}$

L'équilibre de la section  $\Sigma$  donne

$$M_{fz} = - \iint_{\Sigma} y \cdot \sigma_{xx} \cdot dS$$

Si on suppose une répartition linéaire des contraintes en fonction de  $y$  alors on peut écrire

$$\sigma_{xx} = A \cdot y$$

Avec  $A$  constante réelle. On a alors

$$M_{fz} = -A \cdot \iint_{\Sigma} y^2 \cdot dS$$

$$A = - \frac{M_{fz}}{\iint_{\Sigma} y^2 \cdot dS} = - \frac{M_{fz}}{I_z}$$

$$\sigma_{xx}(M) = - \frac{M_{fz} \cdot y(M)}{I_{Oz}}$$

$I_{Oz}$  : moment quadratique de la section  $\Sigma$  par-rapport à l'axe  $z$  passant par la ligne neutre, lieu des points où la contrainte normale est nulle.

Or en flexion pure, l'effort normal  $N$  total dans la section est nul (on impose seulement un moment fléchissant). Or

$$N = \int_{M \in \Sigma} \sigma(M) dS = 0$$

Compte-tenu de l'expression précédente,

$$N = \int_{M \in \Sigma} -\frac{M f_z \cdot y_{(M)}}{I_z} dS = 0$$

Donc l'axe Oz est tel que

$$\int_{M \in \Sigma} y_{(M)} dS = 0$$

Le moment statique de la section par-rapport à l'axe Oz, la ligne neutre, est nul. Par conséquent la ligne neutre passe par le centre de gravité de la section.

Finalement, on peut écrire

$$\sigma_{xx}(M) = -\frac{M f_z \cdot y_{(M)}}{I_{Gz}}$$

Avec  $I_{Gz}$  : moment quadratique de la section  $\Sigma$  par-rapport à l'axe Gz, G étant le centre de gravité de la section.

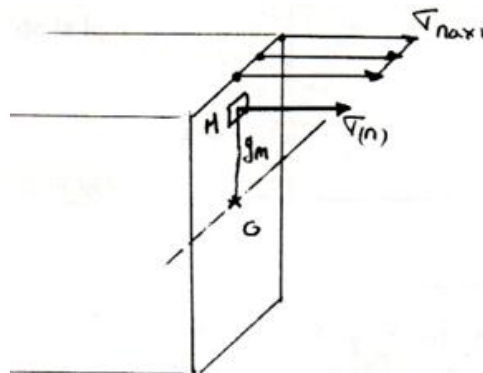


Figure 35. Flexion pure

## 7.5 Principe de superposition

Tant que le matériau reste dans son domaine élastique, et que les déformations restent petites devant les dimensions de la structure, les conséquences (déplacements, contraintes....) de l'action de plusieurs forces peuvent être considérées comme la somme des conséquences de ces actions.

Exemple : flexion simple = cisaillement + flexion pure

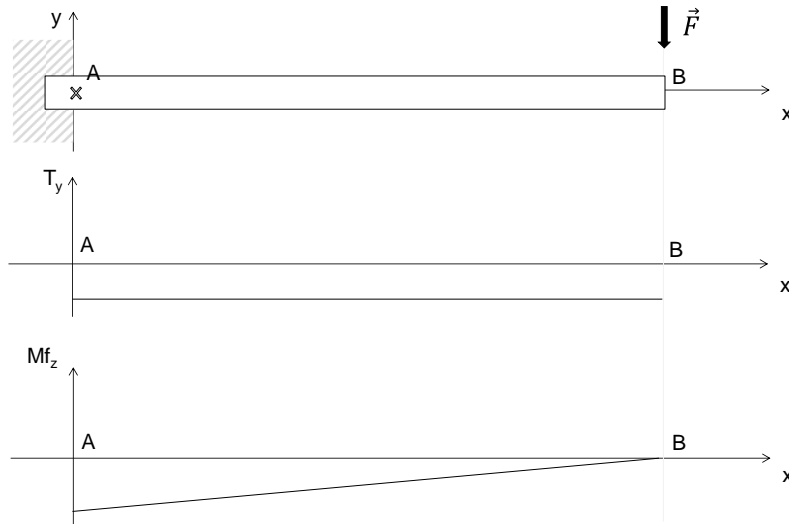


Figure 36. Flexion simple = cisaillement + flexion pure

### 7.5.1 Exemple

Soit une section de surface  $S$ , moment d'inertie  $I_z$  suivant l'axe  $z$ , soumise à un moment fléchissant  $M_f$  et à un effort normal  $N$ .

L'effort normal  $N$  crée des contraintes normales de traction ( $>0$ ) ou de compression ( $<0$ ) d'expression

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

Le moment fléchissant crée des contraintes normales de traction et de compression (profil linéaire de la Figure 35) d'expression :

$$\sigma = -M_f \cdot \frac{y}{I_z}$$

Par superposition, la contrainte totale en un point d'ordonnée  $y$  de la section a pour expression

$$\sigma = \frac{N}{S} - M_f \cdot \frac{y}{I_z}$$

Le profil des contraintes est fourni ci-dessous.

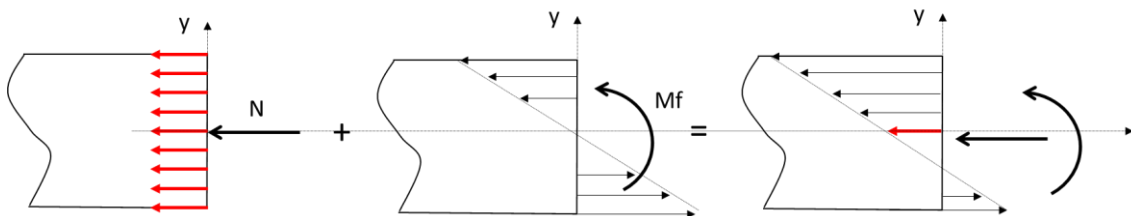


Figure 37. Exemple de profil des contraintes lors d'une superposition d'un effort normal et d'un moment fléchissant

## 7.6 Concentration de contraintes

Une pièce comportant un accident de forme (trou, changement de section,...) montrera une concentration de contraintes proche de cet accident, c'ad une augmentation locale de la contrainte.

Dans la pratique on définit un facteur de concentration de contraintes  $K_t$  tel que :

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nominale}}$$

$K_t$  peut être estimé expérimentalement ou par la simulation numérique. Dans de nombreux cas, des abaques issus de travaux expérimentaux fournissent des valeurs de  $K_t$  pour des géométries « standards ».

Remarque : ne pas confondre  $K_t$  avec le Facteur d'Intensité de Contraintes  $K$  en pointe d'une fissure (voir discipline appelée mécanique de la rupture...).

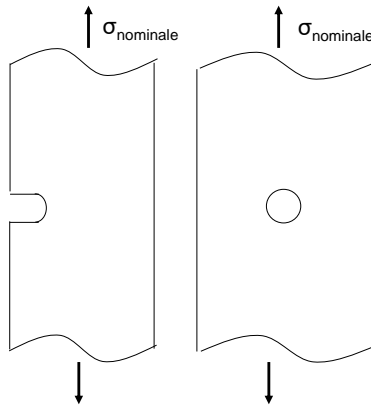


Figure 38. Concentration de contraintes autour d'une entaille (gauche) et d'un trou (droite)

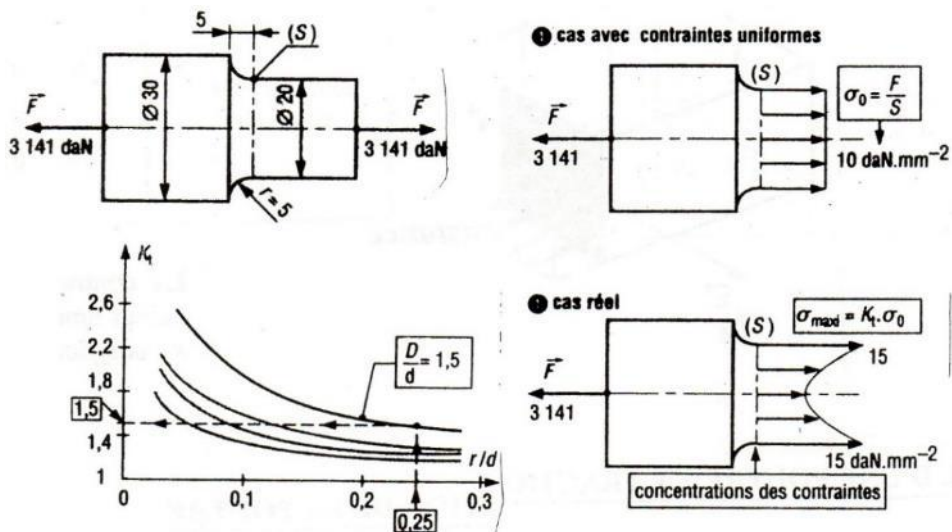


Figure 39. Concentrations de contraintes en traction [7]

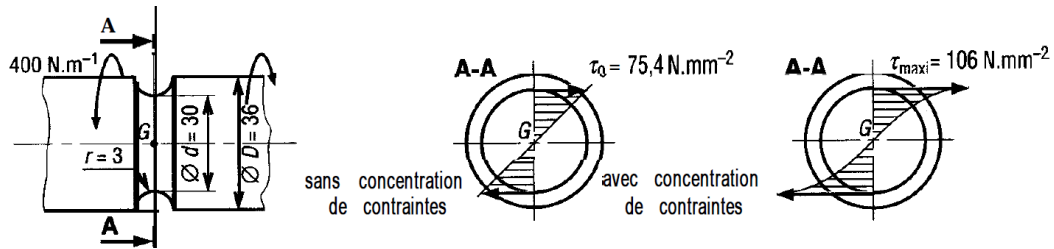


Figure 40. Concentrations de contraintes en torsion [7]

## 7.7 Critères de rupture / dimensionnement

### 7.7.1 Critères de limite élastique

#### 7.7.1.1 Critère de Rankine (ou de la plus grande contrainte principale)

La plus grande contrainte principale doit rester inférieure à la limite d'élasticité  $R_e$ .

$$\sigma_1 < R_e$$

#### 7.7.1.2 Critère de Von Mises

Soient  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  les contraintes principales. Soit la contrainte équivalente de Von Mises définie par :

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Énoncé du critère : en tout point du domaine  $\sigma_{eq}$  doit rester inférieure à la limite d'élasticité en traction pure  $R_e$  :

$$\sigma_{eq} < R_e$$

Détails

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_s + \bar{\sigma}_d$$

Partie sphérique :  $\bar{\sigma}_s = \sigma_s \cdot \bar{I}$  avec  $\sigma_s = \frac{tr \bar{\sigma}}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$

Densité volumique d'énergie de déformation

$$W = \frac{1}{2} \cdot \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_s \cdot \bar{I} + \bar{\sigma}_d) : \bar{\varepsilon}$$

On s'intéresse à la partie déviatrice de  $W$

$$W_d = \frac{1}{2} \cdot \bar{\sigma}_d : \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot (\bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} - \bar{\sigma}_s : \bar{\varepsilon})$$

En introduisant la loi de comportement du solide élastique linéaire isotrope :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} \cdot tr \bar{\sigma} \cdot \bar{I}$$

On obtient

$$W_d = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \nu}{E} \cdot \frac{1}{3} \cdot ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2)$$

Ce critère suppose que le matériau reste dans le domaine élastique tant que la densité volumique de l'énergie déviatrice reste inférieure à la valeur  $W_{de}$  qu'elle prend à l'apparition de la plasticité lors d'un essai de traction pure

$$W_{de} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \sigma_e^2$$

Le critère de Von Mises s'écrit alors :

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot R_e$$

Autre écriture :

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

$$\sigma_{eq} \leq R_e$$

### 7.7.1.3 Critère de Tresca (ou de la contrainte de cisaillement maximale)

La contrainte de cisaillement maximale ( $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ ) doit rester en tout point inférieure à la valeur  $\tau_e = R_e/2$  qu'elle prend lors d'un essai de traction pure :

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_{max} \leq \frac{R_e}{2}$$

### 7.7.1.4 Synthèse

Le critère de Rankine est plutôt utilisé dans le cas des matériaux fragiles (verre, béton, fonte...).

Si, pour les matériaux ductiles, Von Mises est un peu plus précis que Tresca, de nombreuses vérifications expérimentales ont donné des résultats situés sur la frontière entre les deux critères. Tresca, plus simple et souvent utilisé, est plus conservatif : il laisse une marge de sécurité légèrement plus grande. Cependant, beaucoup de logiciels de simulation numérique proposent seulement Von Mises donc ce critère est le plus répandu.

## 7.7.2 Critère sur la flèche maximale

On apporte souvent un critère de flèche maximale aux éléments sollicités en flexion (par exemple la flèche maxi ne doit pas dépasser  $1/500^{\text{ème}}$  de la portée de la poutre).

## 8 Loi de comportement d'une poutre en flexion

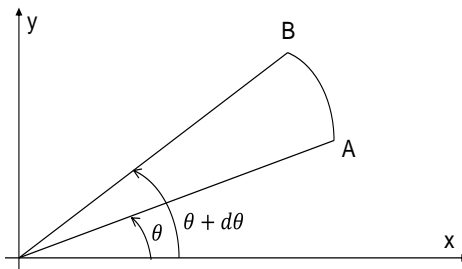
### 8.1 Déformée d'une poutre en flexion

#### 8.1.1 Notions préliminaires : où l'on retourne à la source

Soit un point de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  situé en A.

Quand l'angle  $\theta$  varie de  $d\theta$ , le point se déplace de la distance  $ds$ . Que vaut  $ds$  ?

Soit A le point de départ et B le point d'arrivée du déplacement du point.



En assimilant l'arc  $ds$  à un segment de droite,

$$ds = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$ds = \sqrt{(r \cdot \cos(\theta + d\theta) - r \cdot \cos \theta)^2 + (r \cdot \sin(\theta + d\theta) - r \cdot \sin \theta)^2}$$

$$ds = \sqrt{\left(r \cdot \frac{\cos(\theta + d\theta) - \cos \theta}{d\theta} \cdot d\theta\right)^2 + \left(r \cdot \frac{\sin(\theta + d\theta) - \sin \theta}{d\theta} \cdot d\theta\right)^2}$$

$$ds = \sqrt{(r \cdot (-\sin \theta) \cdot d\theta)^2 + (r \cdot (\cos \theta) \cdot d\theta)^2}$$

$$ds = r \cdot d\theta$$

Soit maintenant la fonction  $y(x)$ . La longueur  $ds$  de la Figure 41 a pour expression  $ds = \rho(x) \cdot d\alpha$  avec  $\rho(x)$  rayon de courbure de la courbe en  $x$ . De plus,

$$\tan \alpha = y'(x)$$

$$\alpha = \text{atan } y'(x)$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = y''(x) \cdot \frac{1}{1 + y'(x)^2}$$

$$d\alpha = \frac{y''(x)}{1 + y'(x)^2} \cdot dx$$

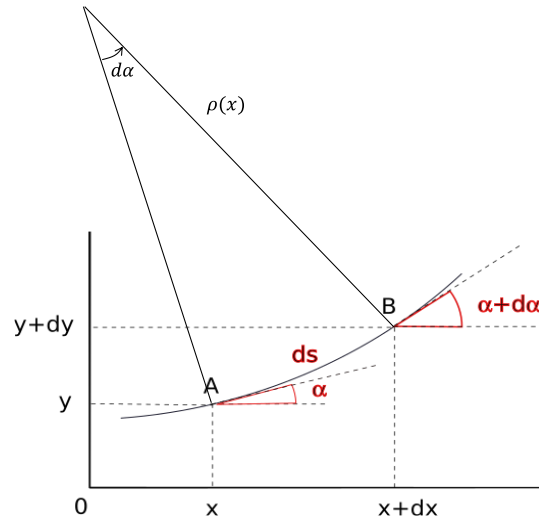


Figure 41. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Courbure\\_d%27un\\_arc#Formulaire](https://fr.wikipedia.org/wiki/Courbure_d%27un_arc#Formulaire)

De plus,

$$ds = \sqrt{y'(x)^2 \cdot dx^2 + dx^2} = dx \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

$$dx \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2} = \rho(x) \cdot d\alpha = \rho(x) \cdot \frac{y''(x)}{1 + y'(x)^2} \cdot dx$$

$$\sqrt{1 + y'(x)^2} = \rho(x) \cdot \frac{y''(x)}{1 + y'(x)^2}$$

Finalement,

$$\rho(x) = \frac{(1 + y'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}{y''(x)}$$

Si  $y'(x)$  est très petit devant 1 (pente de la courbe faible), alors

$$y''(x) = \frac{1}{\rho(x)}$$

### 8.1.2 Déformée d'une poutre en flexion

Soit une poutre d'axe  $\vec{x}$  sollicitée par une force  $\vec{F}$  créant un moment de flexion  $M_{f_z}(x)$  suivant l'axe z. Soit un élément de poutre, d'abscisse x et de longueur dx (Figure 42).

Dans cet élément de poutre on considère la fibre AB située à la distance  $y(x)$  de la fibre neutre. Dans la configuration non déformée, AB a la même longueur que la fibre neutre donc  $AB=dx$ .

La déformation  $\varepsilon_{xx}(x)$  de la fibre AB est donnée par

$$\varepsilon_{xx}(x) = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(\rho(x) - y(x)) \cdot d\theta(x) - dx}{dx}$$

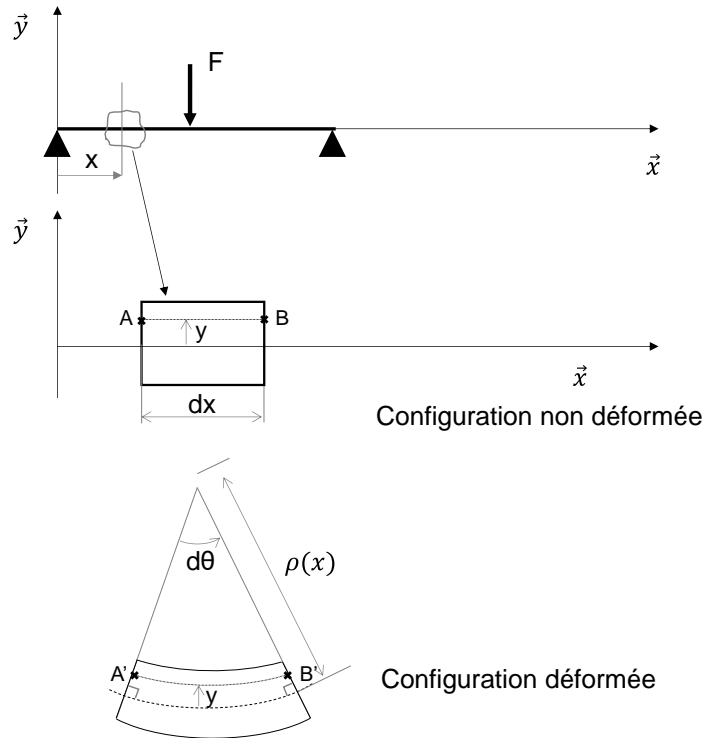


Figure 42. Loi de comportement d'une poutre en flexion

Or par définition la fibre neutre ne subit pas de déformation donc  $dx = \rho(x) \cdot d\theta(x)$  et

$$\varepsilon_{xx}(x) = \frac{(\rho(x) - y(x)) \cdot d\theta(x) - \rho(x) \cdot d\theta(x)}{\rho(x) \cdot d\theta(x)} = -\frac{y(x)}{\rho(x)}$$

La loi de Hooke en traction uniaxiale indique :

$$\sigma_{xx}(x) = E \cdot \varepsilon_{xx}(x)$$

Donc

$$\sigma_{xx}(x) = -E \cdot \frac{y(x)}{\rho(x)}$$

Par ailleurs l'équilibre de la section nous indique que

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_{fz} \cdot y}{I_z}$$

Donc

$$E \cdot \frac{y(x)}{\rho(x)} = \frac{M_{fz} \cdot y}{I_z}$$

Donc

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M_{fz}}{E \cdot I_z}$$

Or, on a vu que

$$y''(x) = \frac{1}{\rho(x)}$$

Donc

$$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E \cdot I_z}$$

Finalement

$$M_{fz}(x) = E \cdot I_z \cdot y''(x)$$

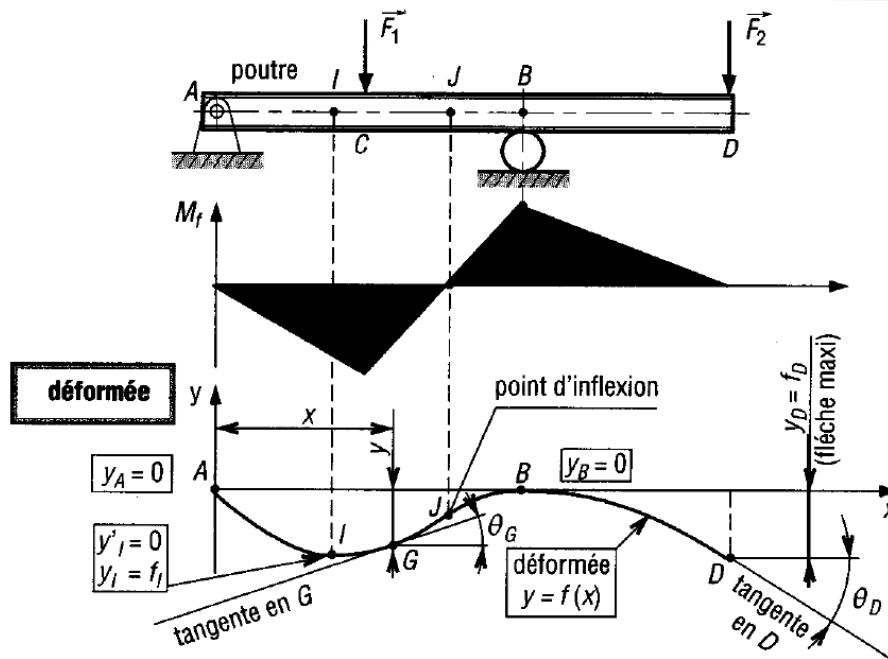


Figure 43. Déformée d'une poutre [7]

## 9 Systèmes hyperstatiques

### 9.1 Résolution d'un problème hyperstatique

Dans un système hyperstatique, les équations issues du PFS ne suffisent pas pour calculer les efforts et moments appliqués.

Pour résoudre un problème hyperstatique, il convient donc de déterminer des équations supplémentaires. Ces équations seront apportées par l'étude des déplacements et des rotations de la structure.

Un point de départ courant est le principe de superposition. Il permet de ramener le problème hyperstatique à une somme de problèmes isostatiques qui chacun peuvent se résoudre avec le PFS.

#### 9.1.1 Exemple 1

Soit une poutre sur 3 appuis (A : pivot, C : ponctuelle, B : ponctuelle), soumise à une charge répartie de densité linéique  $q$ .

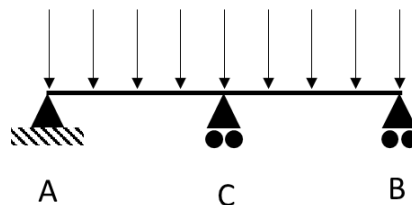
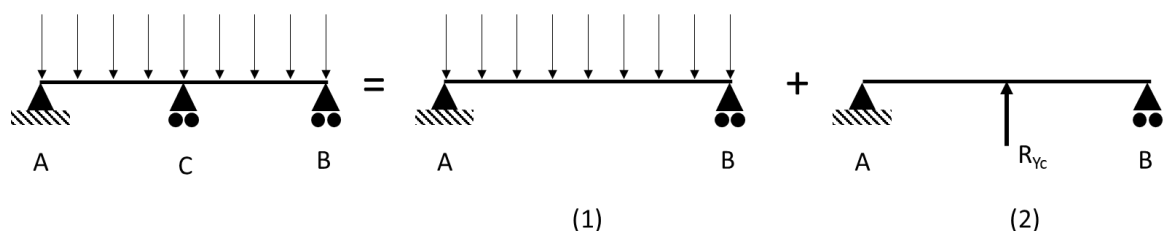


Figure 44. Poutre sur 3 appuis et charge répartie

Ce système est hyperstatique d'ordre 1.

Par superposition on peut écrire :



Soient

$y_{1c}$  : flèche de la poutre dans le cas 1

$y_{2c}$  : flèche de la poutre dans le cas 2

$y_c$  sur le cas réel (cas hyperstatique). On sait que  $y_c = 0$ .

Or par superposition,

$$y_c = y_{1c} + y_{2c} = -\frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I_z} + \frac{R_{Yc} \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I_z}$$

Donc on obtient une équation supplémentaire, liée à une hypothèse sur la déformation de la poutre.

Après résolution,

$$R_C = \frac{5 \cdot q \cdot L}{8}$$

Et par le principe fondamental de la statique :

$$A + B + C = qL$$

En remarquant que la réaction en A est égale à la réaction en B par symétrie, alors

$$R_{YA} = R_{YB} = \frac{3 \cdot q \cdot L}{16}$$

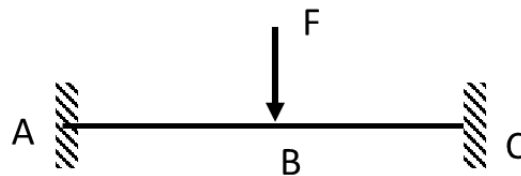
### 9.1.2 Exemple 2

A l'aide des conditions aux limites sur les appuis, on peut obtenir des équations supplémentaires.

Soit une poutre en flexion, alors la déformée est donnée par

$$M_{fz} = E \cdot I_z \cdot y''$$

Soit une poutre de longueur L, module d'Young E, moment quadratique I<sub>z</sub>, encastée à chaque extrémité.



Les inconnues sont au nombre de 6 :  $X_A Y_A M_A X_C Y_C M_C$

Par symétrie,  $Y_A = Y_C = F/2$  et  $M_A = M_C$ .

Le système est hyperstatique d'ordre 1.

Le moment fléchissant entre A et B est donné par (méthode de la coupure) :

$$M_{fz} = -M_A + F \cdot \frac{x}{2}$$

$$E \cdot I_z \cdot y'' = -M_A + F \cdot \frac{x}{2}$$

$$E \cdot I_z \cdot y' = -M_A \cdot x + \frac{F}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + K_1$$

Conditions aux limites :  $y'(0) = 0$  donc  $K_1 = 0$ .

Or par symétrie, on a aussi  $y'(\frac{L}{2}) = 0$  donc

$$-M_A \cdot \frac{L}{2} + \frac{F}{4} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = 0$$

Donc

$$M_A = \frac{F.L}{8}$$

## 9.2 Méthode des déplacements

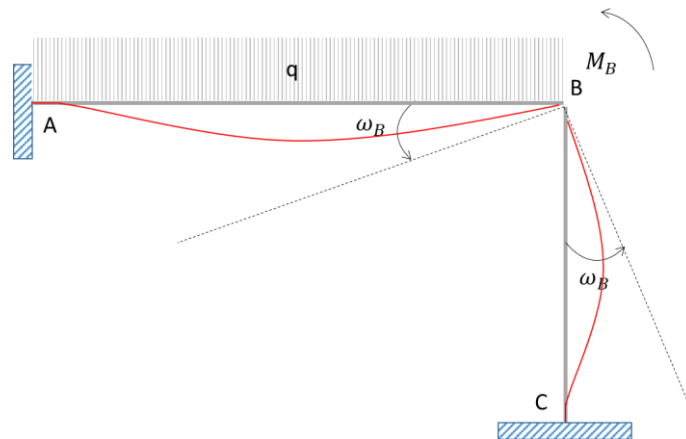
Les inconnues sont les déplacements au niveau des nœuds. Les efforts sont donc déduits une fois les déplacements déterminés.

Lorsque le degré d'hyperstaticité augmente, la méthode des déplacements se montre pertinente car elle fournit rapidement un nombre d'équations important. Sa mise en œuvre est cependant plus délicate.

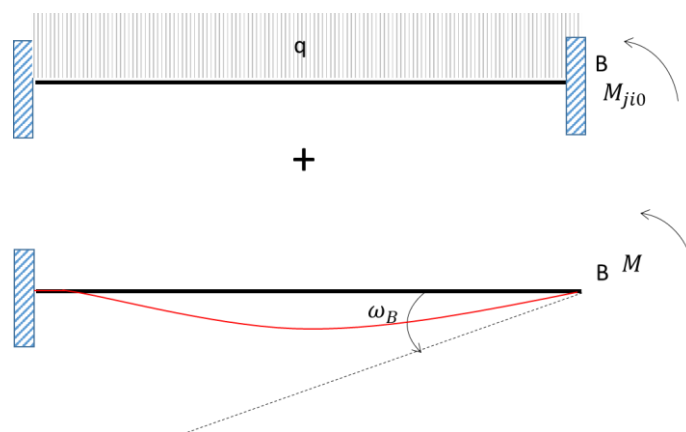
### 9.2.1 Mise en évidence

Soit la structure hyperstatique ci-dessous soumise à une charge linéique  $q$ .

On suppose que le point B ne se déplace pas (longueurs de poutres invariantes), mais on considère sa rotation. Par continuité de l'encastrement, elle est identique côté barre AB et barre BC.



On peut considérer l'état de la barre AB comme la superposition de deux états :



$M_{jio}$  est le moment en B dû aux actions extérieures (ici la charge linéique).

$M$  est le moment qui crée la rotation en B observée sur la structure réelle. C'est l'originalité de la méthode des déplacements : les efforts/moments sont la conséquence des déplacements/rotations qu'on a imposés à la structure.

Soit  $M_{B\_AB}$  le moment en B au bout de la barre AB sur la structure réelle, alors par superposition

$$M_{B\_AB} = M_{jio} + M$$

Calcul des moments  $M_{ij0}$  et  $M$

- Moment  $M_{ij0}$

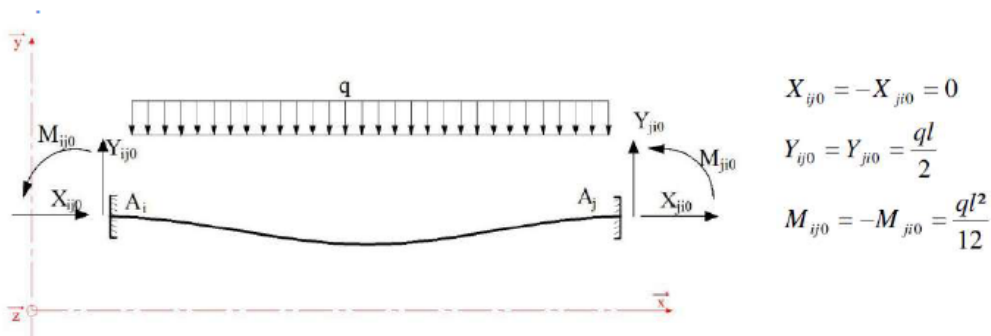


Figure 45. Charge uniformément répartie

Encastrement :  $\omega_{Ai} = 0$  donc par superposition et avec le formulaire Figure 46 on a

$$\frac{M_{ij0}L}{3EI} - \frac{M_{jio}L}{6EI} - \frac{q \cdot L^3}{24EI} = 0$$

Géométrie et chargement	$\Omega_A$	$\Omega_B$	flèche en $x=L/2$
	$-\frac{M_A L}{3EI}$	$\frac{M_B L}{6EI}$	$-\frac{M_A L^2}{16EI}$
	$-\frac{M_B L}{6EI}$	$\frac{M_A L}{3EI}$	$-\frac{M_B L^2}{16EI}$
	$-\frac{qL^3}{24EI}$	$\frac{qL^3}{24EI}$	$-\frac{5qL^4}{384EI}$

Figure 46. Formulaires 3 moments

Avec  $M_{ij0} = -M_{jio}$  on obtient

$$\frac{M_{ij0}L}{3EI} + \frac{M_{ij0}L}{6EI} - \frac{q \cdot L^3}{24EI} = 0$$

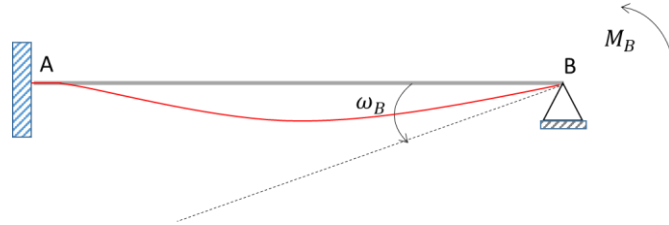
$$\frac{M_{ij0}}{3} + \frac{M_{ij0}}{6} = \frac{q \cdot L^2}{24}$$

$$\frac{2M_{ij0}}{3} + \frac{M_{ij0}}{3} = \frac{q \cdot L^2}{12}$$

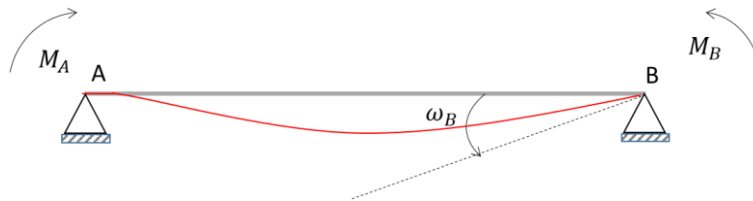
$$M_{ij0} = -\frac{q \cdot L^2}{12} = -M_{ji0}$$

- Moment M

Soit la poutre ci-dessous :



On représente cette poutre par :



Pour déterminer les inconnues de liaison on va considérer la rotation en A :

$$\omega_A = -\frac{M_A L}{3EI} - \frac{ML}{6EI}$$

(voir tableau Figure 46).

Or du fait de l'encastrement,

$$\omega_A = 0$$

Donc

$$M_A = -\frac{M}{2}$$

Somme des moments en A :

$$-M_A + M + Y_B \cdot L = 0$$

Donc

$$Y_B = -\frac{3M}{2L}$$

Moment fléchissant dans la section d'abscisse x :

$$M_f = EIy'' = M + Y_B \cdot (L - x) = M - \frac{3M}{2L} (L - x)$$

La rotation  $\omega(x)$  est obtenue par intégration de  $y''$ .

$$EIy'(x) = EI\omega(x) = Mx - \frac{3M}{2L} \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) + K$$

La rotation en A est nul donc K=0.

Au point B :

$$\omega_B = \omega(L) = \frac{1}{EI} \cdot \left( ML - \frac{3M}{2L} \cdot \left( L^2 - \frac{L^2}{2} \right) \right) = \frac{ML}{4EI}$$

On a donc

$$M = \frac{4EI}{L} \omega_B$$

Finalement on a :

$$M_{B\_AB} = M + M_{ij0} = \frac{4EI}{L} \omega_B + \frac{q \cdot L^2}{12}$$

En opérant le **même raisonnement sur la barre BC** de hauteur H on obtient :

$$M_{B\_BC} = \frac{4EI}{H} \omega_B$$

Or par l'équilibre du nœud B :

$$-M_{B\_AB} - M_{B\_BC} = 0$$

Donc

$$\frac{4EI}{L} \omega_B - \frac{q \cdot L^2}{12} = -\frac{4EI}{H} \omega_B$$

On peut en déduire  $\omega_B$ .

Connaissant  $\omega_B$  on peut maintenant calculer le moment  $M_B$  en B.

## 9.2.2 Généralisation

Pour l'ensemble des déplacements et rotations en A et B et pour l'ensemble des réactions ( $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $M_A$ ,  $X_B$ ,  $Y_B$ ,  $M_B$ ), on obtient la relation ci-dessous :

$$Q = k \cdot d + P$$

Avec k : matrice de rigidité de la poutre

$$k = \begin{pmatrix} \frac{EA_1}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA_1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_1}{L^3} & \frac{6EI_1}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_1}{L^3} & \frac{6EI_1}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_1}{L^2} & \frac{4EI_1}{L} & 0 & -\frac{6EI_1}{L^2} & \frac{2EI_1}{L} \\ -\frac{EA_1}{L} & 0 & 0 & \frac{EA_1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_1}{L^3} & -\frac{6EI_1}{L^2} & 0 & \frac{12EI_1}{L^3} & -\frac{6EI_1}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_1}{L^2} & \frac{2EI_1}{L} & 0 & -\frac{6EI_1}{L^2} & \frac{4EI_1}{L} \end{pmatrix}$$

d : déplacements et rotations aux extrémités de la poutre

$$d = \begin{pmatrix} Ux_{ij} \\ Uy_{ij} \\ w_{ij} \\ Ux_{ji} \\ Uy_{ji} \\ w_{ji} \end{pmatrix}$$

Q : efforts de liaison

$$Q = \begin{pmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ M_{ij} \\ X_{ji} \\ Y_{ji} \\ M_{ji} \end{pmatrix}$$

P : efforts extérieurs appliqués

$$P = \begin{pmatrix} X_{ijo} \\ Y_{ijo} \\ M_{ijo} \\ X_{jio} \\ Y_{jio} \\ M_{jio} \end{pmatrix}$$

Finalement on déterminera les réactions de liaisons avec le système suivant :

$$\begin{pmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ M_{ij} \\ X_{ji} \\ Y_{ji} \\ M_{ji} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ux_{ij} \\ Uy_{ij} \\ w_{ij} \\ Ux_{ji} \\ Uy_{ji} \\ w_{ji} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{ijo} \\ Y_{ijo} \\ M_{ijo} \\ X_{jio} \\ Y_{jio} \\ M_{jio} \end{pmatrix}$$

A : section de la poutre ; E : module d'élasticité de la poutre ; I : moment quadratique ; L : longueur de la poutre

### 9.2.3 Termes de la Matrice de raideur

Quelques termes sont démontrés ci-dessous

Terme  $k_{11}$  ( $\frac{EA}{L}$ )

Soit une poutre de longueur  $L$ , section  $A$ , module  $E$ , soumise à un effort  $X$ , montrant l'allongement  $u$ . Loi de Hooke :

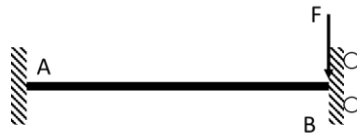
$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{X}{A} = E \cdot \frac{u}{L}$$

$$X = E \cdot \frac{A}{L} \cdot u$$

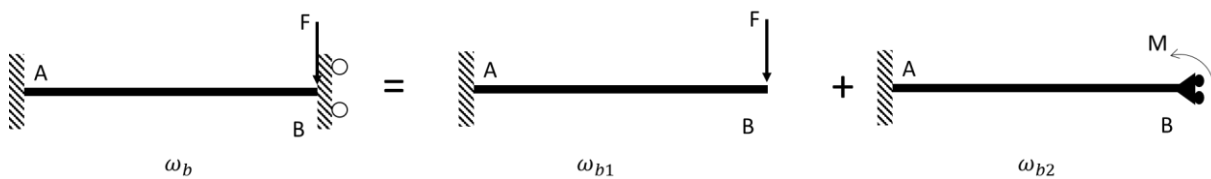
Terme  $k_{22}$  ( $\frac{12EI}{L^3}$ )

Soit la poutre ci-dessous.

Elle est encadrée en A. En B, elle subit un moment d'encastrement et une réaction en X. Elle est libre en y au point B. Cette poutre est soumise à une force F, en B, suivant -y.



Par superposition on peut écrire :



Or  $\omega_b = 0$  du fait de l'encastrement donc

$$\omega_{b1} + \omega_{b2} = 0$$

Calculons ces deux rotations.

- Calcul de  $\omega_{b1}$

Pour une poutre console soumise à une force F au bout la flèche  $y(x)$  a pour expression :

$$y(x) = \frac{F}{6EI} \cdot x^2 \cdot (3L - x)$$

Donc

$$y'(x) = \frac{F}{6EI} \cdot 2x \cdot (3L - x) - \frac{F}{6EI} \cdot x^2$$

Donc

$$y'(L) = \frac{FL^2}{2EI}$$

- Calcul de  $\omega_{b2}$

Moment fléchissant :

$$M_f = M$$

Donc

$$y''(x) = \frac{M}{EI}$$

Donc

$$y'(x) = \frac{M}{EI}x + Cste$$

La rotation en A est nulle donc cste=0 donc

$$y'(L) = \frac{M}{EI}L$$

On reprend :

$$\omega_{b1} + \omega_{b2} = 0$$

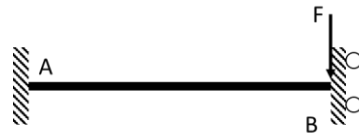
On a alors

$$\frac{FL^2}{2EI} + \frac{ML}{EI} = 0$$

Donc

$$M = \frac{FL}{2}$$

On peut maintenant écrire le moment fléchissant dans la structure ci-dessous :



$$M_f = -F(L - x) + M = -F(L - x) + \frac{FL}{2} = F \left( x - \frac{L}{2} \right)$$

Par intégration on obtient :

$$y(x) = -\frac{F}{EI} \cdot \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 L}{4} \right)$$

Ainsi

$$y(L) = \frac{FL^3}{12EI}$$

On peut écrire cette relation comme ci-dessous :

$$F = \frac{12EI}{L^3} y(L)$$

On retrouve le terme  $\frac{12EI}{L^3}$  de la matrice de rigidité.

## 9.2.4 Termes du vecteur P

### 9.2.4.1 Charge ponctuelle appliquée dans la section à mi-travée

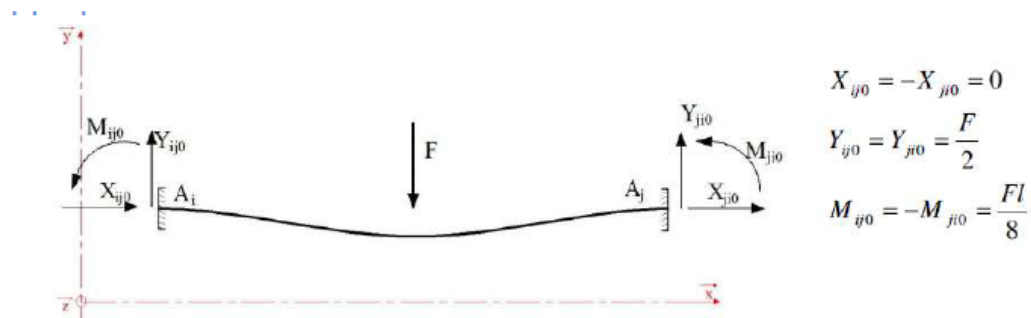


Figure 47. Charge ponctuelle appliquée dans la section à mi-travée

Absence de rotation en Ai :

$$-\frac{-M_{ij0}L}{3EI} - \frac{-M_{ij0}L}{6EI} - \frac{F \cdot L^2}{16EI} = 0$$

Donc

$$M_{ij0} = \frac{FL}{8}$$

Géométrie et chargement	$\Omega_A$	$\Omega_B$	flèche en $x=L/2$
	$-\frac{M_A L}{3EI}$	$\frac{M_A L}{6EI}$	$-\frac{M_A L^2}{16EI}$
	$-\frac{M_B L}{6EI}$	$\frac{M_B L}{3EI}$	$-\frac{M_B L^2}{16EI}$
	$-\frac{PL^2}{16EI}$	$\frac{PL^2}{16EI}$	$-\frac{PL^3}{48EI}$

Figure 48. Formulaires 3 moments

## 9.2.5 Démarche

1/ Définir les degrés de liberté de la structure

- Si un point est encastéré, pas de ddl en ce point.
- Avec l'hypothèse des longueurs de poutres invariantes, certains déplacements sont nuls.

2/ Pour chaque barre :

Ecrire la loi de comportement de la barre ci-dessous en calculant P et le vecteur u en fonction du problème.

$$\begin{pmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ M_{ij} \\ X_{ji} \\ Y_{ji} \\ M_{ji} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{xij} \\ U_{yij} \\ w_{ij} \\ U_{xji} \\ U_{yji} \\ w_{ji} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{ijo} \\ Y_{ijo} \\ M_{ijo} \\ X_{jio} \\ Y_{jio} \\ M_{jio} \end{pmatrix}$$

3/ Ecrire l'équilibre des nœuds pour calculer les ddl (déplacements, rotations)

4/ Reprendre la loi de comportement de chaque poutre, avec les ddl connus, pour calculer les inconnues de liaison

5/ Le système hyperstatique est résolu (inconnues de liaison toutes déterminées). On peut passer aux efforts internes et aux contraintes, flèches, flambement.....

# 10 Poutres continues

## 10.1 Théorème des trois moments

Les poutres continues sont des poutres reposant sur plus de deux appuis. Elles sont donc hyperstatiques et nécessitent des équations supplémentaires pour être résolues.

Une méthode courante pour la résolution des poutres continues est le théorème des trois moments, ou théorème de Clapeyron (du nom de Émile Clapeyron (1799-1864)). Le théorème des trois moments fournit des équations reliant les moments fléchissant au droit de chaque appui, par des considérations sur les rotations au droit de chaque appui.

### Énoncé

Soit une poutre continue de n travées sur n+1 appuis. Alors sur l'appui i :

$$M_{i-1} \frac{L_i}{6EI_i} + 2M_i \left( \frac{L_i}{6EI_i} + \frac{L_{i+1}}{6EI_{i+1}} \right) + M_{i+1} \frac{L_{i+1}}{6EI_{i+1}} = \Omega_{i,d}^0 - \Omega_{i,g}^0$$

Avec

- $M_i$  : moment fléchissant sur l'appui i
- $L_i$  : longueur de la travée i
- $I_i$  : moment d'inertie dans la travée i
- $\Omega_{i,d}^0$  : rotation à droite de l'appui i, dans le cas de la travée isostatique i+1
- $\Omega_{i,g}^0$  : rotation à gauche de l'appui i, dans le cas de la travée isostatique i

Les termes  $\Omega_{i,d}^0$  et  $\Omega_{i,g}^0$  prendront plus de sens lors de la lecture de la démonstration du théorème.

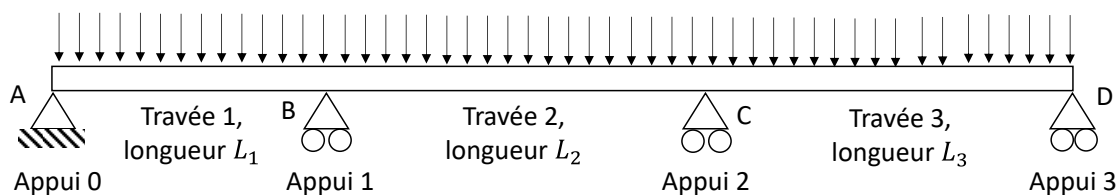
### Hypothèses

Dans la démonstration du théorème, on verra que l'on suppose que :

- L'ensemble de la poutre a le même module d'Young E
- L'inertie I dans une travée est constante : pas de changement d'inertie au sein d'une travée
- Bien sûr, on suppose que l'on peut appliquer le principe de superposition.

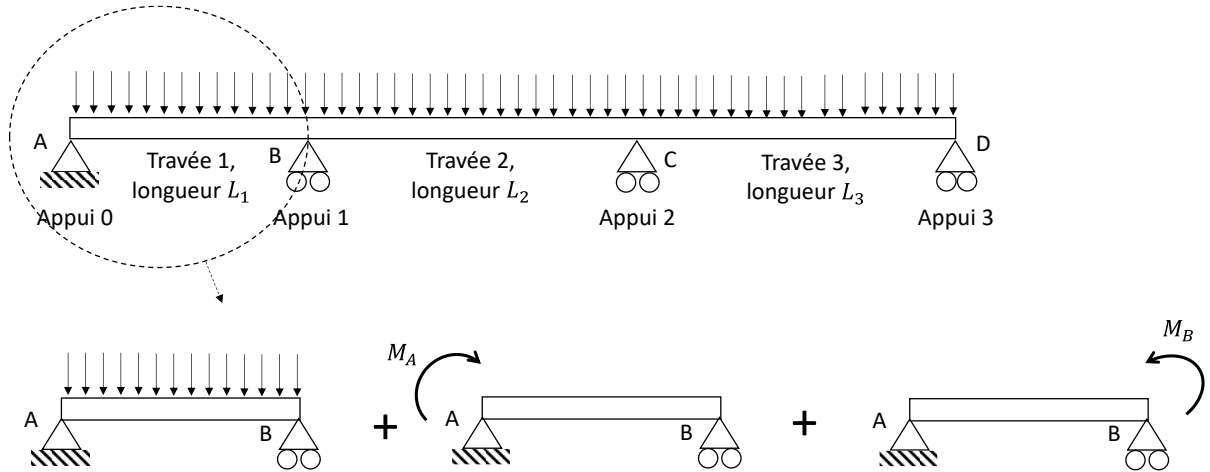
### Démonstration

Soit la poutre continue ci-dessous. Elle repose sur 4 appuis A, B, C et D. Elle est constituée de 3 travées. Une travée est une portion de poutre comprise entre deux appuis. Pour appliquer le théorème, nous allons numéroter les appuis, de 0 à 3 et les travées de 1 à 3.



Ce problème est hyperstatique, il ne peut être résolu avec seulement le principe fondamental de la statique. Des équations supplémentaires sont nécessaires. Ces équations supplémentaires seront apportées par l'étude des rotations en B et C et permettront de calculer les moments  $M_B$  et  $M_C$  dans la poutre, aux appuis B et C.

Appliquons le principe de superposition pour décomposer la travée  $L_1$  en plusieurs cas isostatiques :



La travée 2 est ainsi « remplacée » par un moment  $M_B$  appliqué sur l'appui B.

On a placé un moment  $M_A$  en A pour démontrer la formule (dans le cas d'un appui de rive au bord de la poutre,  $M_A=0$ ).

Soient les rotations :

Cas				
Rotation	$\omega_{B_1}$	$\Omega_g^0$	$\omega_{B^*}$	$\omega_{B^{**}}$

Par superposition

$$\omega_{B_1} = \Omega_g^0 + \omega_{B^*} + \omega_{B^{**}}$$

Or les rotations  $\Omega_g^0$ ,  $\omega_{B^*}$  et  $\omega_{B^{**}}$  sont bien connues et accessibles dans des formulaires :

Géométrie et chargement	$\Omega_A$	$\Omega_B$	flèche en $x=L/2$
	$-\frac{M_A L}{3EI}$	$\frac{M_A L}{6EI}$	$-\frac{M_A L^2}{16EI}$
	$-\frac{M_B L}{6EI}$	$\frac{M_B L}{3EI}$	$-\frac{M_B L^2}{16EI}$
	$-\frac{Pab(L+b)}{6EIL}$	$\frac{Pab(L+a)}{6EIL}$	
	$-\frac{PL^2}{16EI}$	$\frac{PL^2}{16EI}$	$-\frac{PL^3}{48EI}$
	$-\frac{qL^3}{24EI}$	$\frac{qL^3}{24EI}$	$-\frac{5qL^4}{384EI}$
	$-\frac{qa^2(2L-a)^2}{24EIL}$	$\frac{qa^2(2L-a)^2}{24EIL}$	

Ainsi

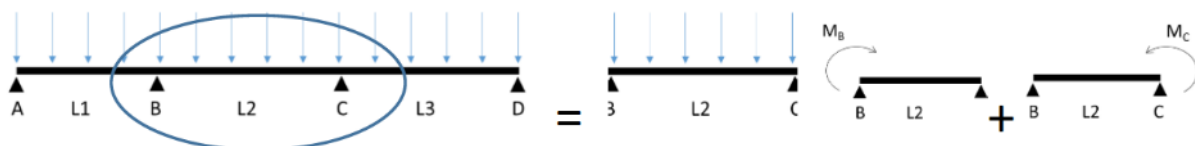
$$\omega_{B^*} = \frac{M_A L_1}{6EI_1}$$

$$\omega_{B^{**}} = \frac{M_B L_1}{3EI_1}$$

Finalement,

$$\omega_{B_1} = \Omega_g^0 + \frac{M_A L_1}{6EI_1} + \frac{M_B L_1}{3EI_1}$$

Appliquons maintenant le même raisonnement pour la travée 2 :



Les travées 1 et 3 sont « remplacées » par les moments  $M_B$  et  $M_C$ .

$$\omega_{B_2} = \Omega_d^0 - \frac{M_B L_2}{3EI_2} - \frac{M_C L_2}{6EI_2}$$

Or en B, la rotation côté travée 1 et la rotation côté travée 2 sont les mêmes pour assurer la continuité géométrique de la poutre :

$$\omega_{B_1} = \omega_{B_2}$$

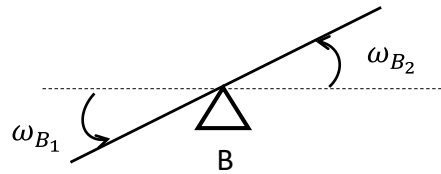


Figure 49. Poutres continues. Représentation de la continuité de la rotation, aux appuis de la poutre

On a finalement

$$\Omega_g^0 + \frac{M_A L_1}{6EI_1} + \frac{M_B L_1}{3EI_1} = \Omega_d^0 - \frac{M_B L_2}{3EI_2} - \frac{M_C L_2}{6EI_2}$$

Soit encore

$$\frac{M_A L_1}{6EI_1} + \frac{M_B L_1}{3EI_1} + \frac{M_B L_2}{3EI_2} + \frac{M_C L_2}{6EI_2} = \Omega_d^0 - \Omega_g^0$$

$$M_A \frac{L_1}{6EI_1} + 2M_B \left( \frac{L_1}{6EI_1} + \frac{L_2}{6EI_2} \right) + M_C \frac{L_2}{6EI_2} = \Omega_d^0 - \Omega_g^0$$

On retrouve, appliquée à l'appui 1 (appui B) la formule :

$$M_{i-1} \frac{L_i}{6EI_i} + 2M_i \left( \frac{L_i}{6EI_i} + \frac{L_{i+1}}{6EI_{i+1}} \right) + M_{i+1} \frac{L_{i+1}}{6EI_{i+1}} = \Omega_{i,d}^0 - \Omega_{i,g}^0$$

### 10.1.1 Correction complète de la travée étudiée

En poursuivant l'exemple,  $M_A=0$ . Puis on peut écrire la formule des 3 moments en C pour obtenir une nouvelle équation avec  $M_B$  et  $M_C$  et créer un système de 2 équations à 2 inconnues,  $M_B$  et  $M_C$ .

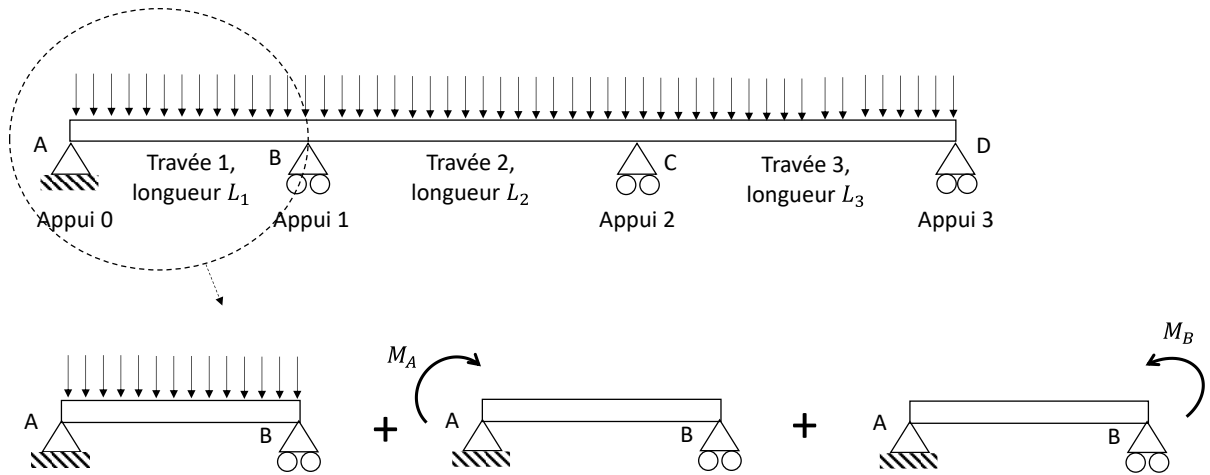
## 10.2 Moment fléchissant

Soit la formule donnant le moment fléchissant dans la travée  $i$  :

$$M(x) = M_0(x) + M_{i-1} \cdot \left( 1 - \frac{x}{L_i} \right) + M_i \cdot \left( \frac{x}{L_i} \right)$$

### 10.2.1 Démonstration

Reprenons la travée 1 de l'exemple précédent.



Le moment fléchissant dans la travée 1 est par superposition la somme des moments fléchissant dans chaque cas de la figure ci-dessus.

Pour chaque cas, le moment fléchissant est donné ci-dessous

Cas	Moment fléchissant
	$M(x)$
	$M_0(x)$
	PFS : $Y_A + Y_B = 0$ $-M_A + Y_B \cdot L_1 = 0$ Donc $Y_B = \frac{M_A}{L_1}$ Donc $M(x) = Y_B \cdot (L_1 - x) = M_A \cdot \left(1 - \frac{x}{L_1}\right)$
	PFS : $Y_B = -\frac{M_B}{L}$ Donc : $M(x) = M_B + Y_B \cdot (L_1 - x) = M_B \cdot \frac{x}{L_1}$

Par principe de superposition on obtient,

$$M(x) = M_0(x) + M_A \cdot \left(1 - \frac{x}{L_1}\right) + M_B \cdot \frac{x}{L_1}$$

On retrouve la formule à démontrer.

### 10.3 Effort tranchant

Soit la formule de l'effort tranchant dans la travée i :

$$V(x) = V_0(x) + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_i}$$

#### Démonstration

On sait que

$$V(x) = -\frac{dM(x)}{dx}$$

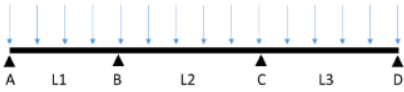
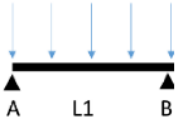
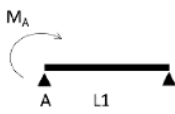
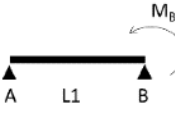
Donc par dérivation de la formule

$$M(x) = M_0(x) + M_{i-1} \cdot \left(1 - \frac{x}{L_i}\right) + M_i \cdot \frac{x}{L_i}$$

On a bien

$$V(x) = V_0(x) + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_i}$$

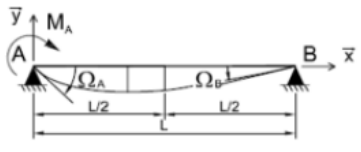
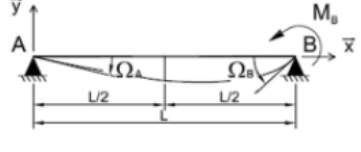
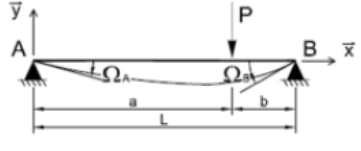
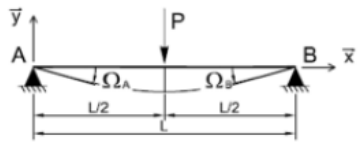
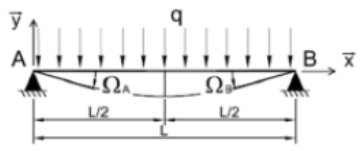
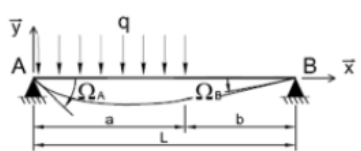
Remarque : on retrouve aussi l'effort tranchant par superposition. Ainsi sur l'exemple de la fiche :

Cas	V(x)
	$V(x)$
	$V_0(x)$
	$V(x) = Y_B = \frac{M_A}{L_1}$
	$V(x) = Y_B = -\frac{M_B}{L_1}$

Donc

$$V(x) = V_0(x) + \frac{M_A}{L_1} - \frac{M_B}{L_1} = V_0(x) + \frac{M_A - M_B}{L_1}$$

### 10.4 Formulaire

Géométrie et chargement	$\Omega_A$	$\Omega_B$	flèche en $x=L/2$
	$-\frac{M_A L}{3EI}$	$\frac{M_B L}{6EI}$	$-\frac{M_A L^2}{16EI}$
	$-\frac{M_B L}{6EI}$	$\frac{M_B L}{3EI}$	$-\frac{M_B L^2}{16EI}$
	$-\frac{Pab(L+b)}{6EIL}$	$\frac{Pab(L+a)}{6EIL}$	
	$-\frac{PL^2}{16EI}$	$\frac{PL^2}{16EI}$	$-\frac{PL^3}{48EI}$
	$-\frac{qL^3}{24EI}$	$\frac{qL^3}{24EI}$	$-\frac{5qL^4}{384EI}$
	$-\frac{qa^2(2L-a)^2}{24EIL}$	$\frac{qa^2(2L^2-a^2)}{24EIL}$	

### 10.5 Poutres continues par statique graphique

Les poutres continues furent également traitées à une époque par statique graphique [11].

La méthode graphique apporte dans ce cas peu de simplification par-rapport au théorème des trois moments et on ne développera pas ce point dans ce document.

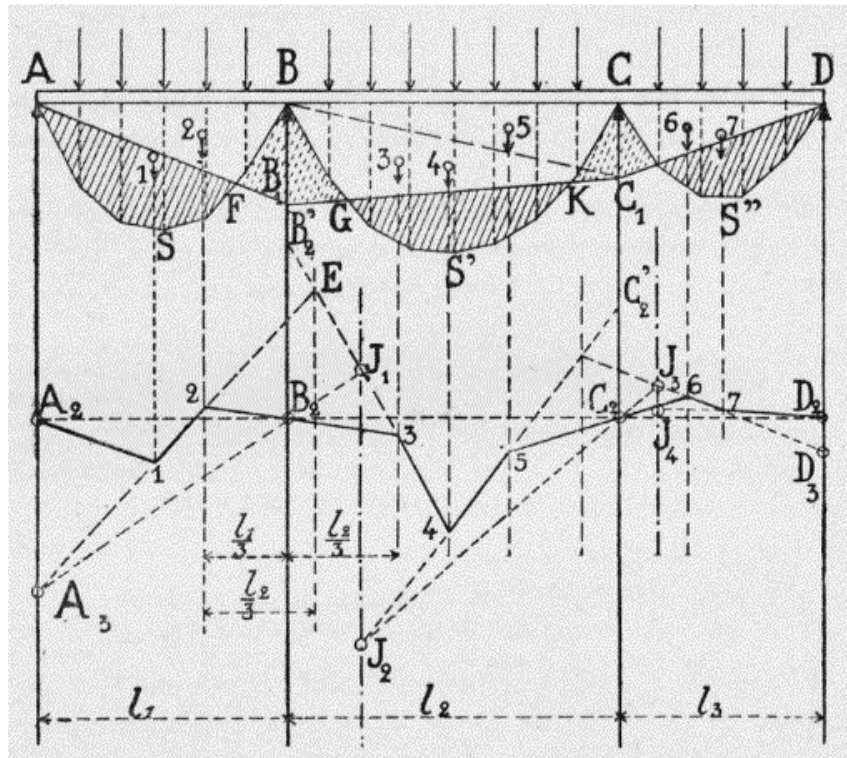


Figure 50. Poutre continue, moment fléchissant. Source BNF. [11, p. 422]

# 11 Méthodes énergétiques

## 11.1 Energie de déformation

### 11.1.1 Travail d'une force

Soit une force  $\vec{F}$  appliquée à un système. Pour un déplacement fini s'effectuant entre deux positions  $M_1$  et  $M_2$ , le travail  $W$  de la force  $\vec{F}$  a pour expression

$$W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Si la force  $\vec{F}$  est constante lors du déplacement, on peut écrire

$$W = \vec{F} \cdot \int_{M_1}^{M_2} \vec{dr}$$

Si le déplacement  $u = M_2 - M_1$  s'effectue dans la même direction que la force  $\vec{F}$ , alors on a simplement

$$W = F \cdot u$$

$W$  représente bien l'aire sous la courbe  $F \cdot u$ .

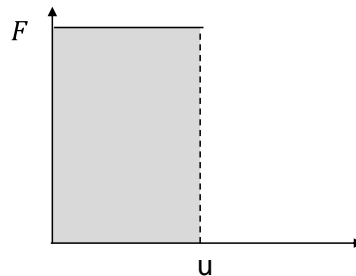


Figure 51. Travail d'une force constante

### 11.1.2 Travail d'une force appliquée progressivement

Le travail fourni n'a pas la même expression si la force est appliquée **progressivement**.

Considérons une force  $F$  et le déplacement  $u$  induit par cette force. Pour  $F=0$ , le déplacement est nul. Lorsque la force  $F$  augmente, le déplacement augmente. Finalement, lorsque  $F$  atteint  $F_{max}$ , le déplacement final obtenu est  $u$  (Figure 52).

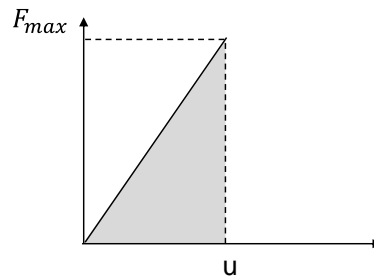


Figure 52. Travail d'une force appliquée progressivement

On peut écrire :

$$F(x) = F_{max} \cdot \frac{x}{u}$$

Par définition le travail élémentaire de cette force pour un déplacement  $dx$  a pour expression :

$$dW = F(x)dx = F_{max} \cdot \frac{x}{u} \cdot dx$$

Le travail total appliqué a donc pour expression :

$$W = \int_0^{L_f} F_{max} \cdot \frac{x}{u} \cdot dx = \frac{F_{max}}{u} \cdot [x]_0^u = \frac{F_{max}}{u} \cdot \frac{u^2}{2}$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot F_{max} \cdot u$$

On retrouve toujours l'aire sous la courbe F-u.

### 11.1.3 Energie de déformation d'une poutre (énergie potentielle élastique)

#### 11.1.3.1 Energie de déformation en traction

On postule que l'énergie de déformation est le travail des forces extérieures appliquées au solide.

Un petit élément de section  $dS$ , longueur  $dl$ , soumis à une contrainte  $\sigma$  subit le travail :

$$dW = \frac{1}{2} \cdot \sigma dS dx$$

$\sigma dS$  est l'effort  $F$  subi et  $dx$  est le déplacement induit par  $F$ .

Or

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{dx}{dl}$$

Donc

$$dx = \frac{\sigma}{E} \cdot dl = \frac{F}{ES} dl$$

Par conséquent l'énergie de déformation du petit élément de section  $dS$ , longueur  $dl$  a pour expression :

$$dW = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{S} \cdot dS \cdot \frac{F}{ES} dl$$

On intègre sur toute la section  $S$  :

$$dW_{section} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F^2}{ES} dl$$

Sur l'ensemble de la poutre :

$$W = \int_{poutre} dW_{section} = \frac{1}{2} \int_{poutre} \frac{F^2}{ES} dl$$

Autre démarche : partant de l'énergie de déformation par unité de volume

L'énergie de déformation *par unité de volume* a pour expression

$$dW_{volumique} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$$

Donc en traction

$$dW = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{ES^2}$$

Sur un élément de volume  $S \cdot dl$  on obtient :

$$dW = \frac{1}{2} \cdot \frac{F^2}{ES^2} \cdot S dl = \frac{1}{2} \cdot \frac{F^2}{ES} dl$$

Sur toute la poutre, l'énergie de déformation a pour expression

$$W = \frac{1}{2} \int_{poutre} \frac{F^2}{ES} dx$$

### 11.1.3.2 Energie de déformation en flexion

Un petit élément de section  $dS$ , longueur  $dl$ , subit la contrainte  $\sigma$  et donc l'effort  $\sigma \cdot dS$

$$dW = \frac{1}{2} \cdot \sigma dS \cdot dx$$

Or loi de Hooke :

$$dx = \frac{\sigma}{E} \cdot dl$$

Donc

$$dW = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{E} \cdot dl \cdot dS$$

Or

$$\sigma = M_f \cdot \frac{y}{I_z}$$

Donc

$$dW = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_f^2 \cdot y^2}{E \cdot I_z^2} dl \cdot dS$$

Sur toute la section  $dS=dydz$

$$dW_{section} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_f^2}{E \cdot I_z^2} \cdot \int_S y^2 dydz \cdot dl$$

Or

$$I_z = \int_S y^2 dydz$$

Donc

$$dW_{section} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_f^2}{E \cdot I_z} dl$$

Sur toute la longueur de la poutre :

$$W = \int_{longueur} dW_{section} = \frac{1}{2} \cdot \int_{longueur} \frac{M_f^2}{E \cdot I_z} dl$$

### 11.1.3.3 Cas général

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_{longueur} \left( \frac{M_f^2}{E \cdot I_z} + \frac{F^2}{ES} + \frac{V^2}{GS_r} \right) dl$$

$\frac{V^2}{GS_r}$  : terme dû à l'effort tranchant

Remarque importante : on néglige généralement pour les poutres en flexion les termes dus à l'effort normal et l'effort tranchant, devant le terme du au moment fléchissant.

## 11.2 Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti

### 11.2.1 Enoncé

Soit un corps élastique soumis successivement à deux systèmes de forces  $S$  et  $S'$  chacun assurant l'équilibre. Le travail effectué par le système  $S$  sous l'effet des déplacements produits par le système  $S'$  est égal au travail effectué par le système  $S'$  sous l'effet des déplacements produits par  $S$ .

### 11.2.2 Démonstration

On considère le corps élastique au repos. On applique tout d'abord le système de forces S. Le travail effectué par les forces F du système S est  $W_S$ . On applique ensuite le système de forces S'. Le travail effectué par les forces F' du système S' est  $W_{S'}$ . Or les points d'applications des forces F vont se déplacer sous l'action des forces F', donc les forces F vont appliquer un travail.

Soit  $u'$  le déplacement du point d'application de la force F pendant l'application des forces F', le travail de la force F est alors  $F \cdot u'$ . Le travail total des forces F lors de l'application des forces F' sera  $\sum F \cdot u'$ .

Le travail total appliqué au solide, lors de l'application du système S puis du système S' est donc :

$$W_S + W_{S'} + \sum F \cdot u'$$

En appliquant d'abord le système de forces S' puis le système de forces S, le travail total appliqué au système est :

$$W_{S'} + W_S + \sum F' \cdot u$$

A l'état élastique, le travail des forces ne dépend que de l'état initial et de l'état final donc les travaux appliqués sont identiques donc :

$$\sum F \cdot u' = \sum F' \cdot u$$

### 11.2.3 Exemple

Soit la poutre AB ci-dessous.

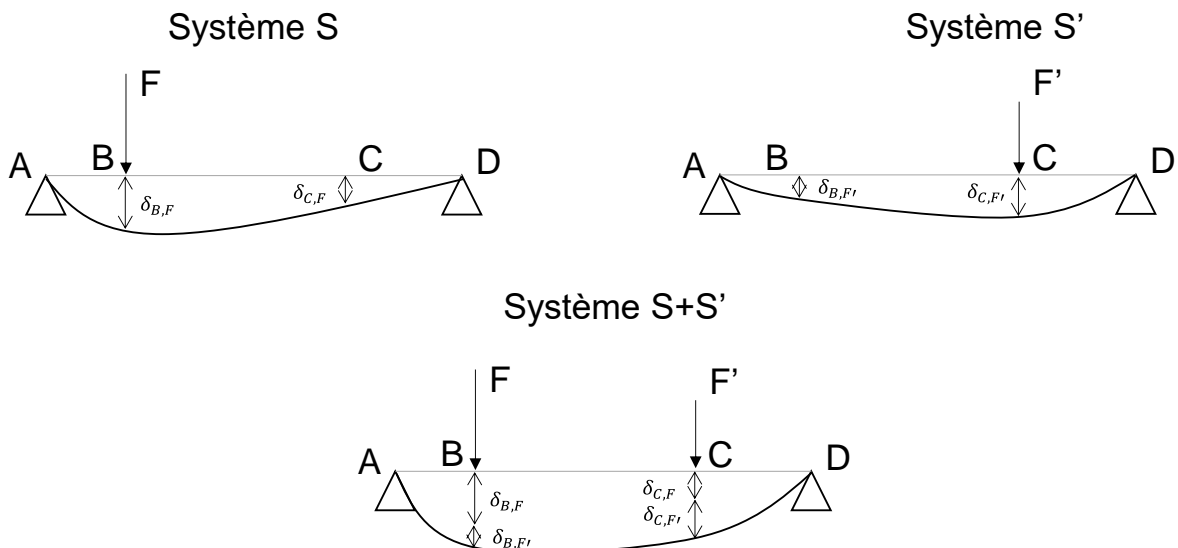


Figure 53. Illustration du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti

Si on applique d'abord la force F en B puis la force F' en C, le travail total est :

$$\frac{1}{2} \cdot F \cdot \delta_{B,F} + \frac{1}{2} \cdot F' \cdot \delta_{C,F'} + F \cdot \delta_{B,F'}$$

Si on applique d'abord la force  $F'$  en C puis la force  $F$  en B, le travail total est :

$$\frac{1}{2} \cdot F' \cdot \delta_{C,F'} + \frac{1}{2} \cdot F \cdot \delta_{B,F} + F' \cdot \delta_{C,F}$$

L'égalité des deux travaux donne :

$$F \cdot \delta_{B,F'} = F' \cdot \delta_{C,F}$$

### 11.2.4 Notion de ligne d'influence

Si l'on reprend la poutre de la Figure 53 et que l'on applique une force de 1N en B, alors la flèche en C due à la force unitaire en B est égale à la flèche en B due à une force unitaire en C :

$$\delta_{B,F'=1N} = \delta_{C,F=1N}$$

On voit alors que la déformée de la poutre sous l'action d'une force unitaire en B donne en chaque point la flèche que l'on obtiendrait en B sous l'action d'une force unitaire appliquée en ce point.

Cette déformée est appelée ligne d'influence de la flèche en B.

## 11.3 Théorème de Castigliano

### 11.3.1 Enoncé

La dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à une force appliquée est égale au déplacement (en valeur algébrique) du point d'application de celle-ci, projetée sur la ligne d'action.

$$\frac{\partial W}{\partial F_i} = u_i$$

### 11.3.2 Démonstration

a) **Les dérivées du travail de déformation.** — Considérons un ouvrage élastique (fig. 263) soumis à des charges  $P$ . Nous supposons que la loi de superposition des effets des forces est applicable.

Sous l'action des charges, l'ouvrage subit des déformations élastiques ; les charges  $P$  effectuent un *travail de déformation*  $A$ , tel que :

$$A = F(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n).$$

(1) A. CASTIGLIANO : *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Turin, 1879. Voir aussi la nouvelle édition « *Selecta* » a cura de G. COLONETTI, Turin, 1935, qui contient notamment la thèse de doctorat de Castigliano (1873) ; celle-ci doit être considérée comme les prémices de la *Théorie de l'équilibre*.

Si l'une des charges extérieures  $P$ , par exemple  $P_n$ , s'accroît de la petite quantité  $dP_n$ , le travail de déformation devient :

$$A + \frac{\delta A}{\delta P_n} \cdot dP_n.$$

Comme on a supposé que la loi de superposition était applicable, la valeur du travail de déformation est indépendante de l'ordre dans lequel les charges  $P$  sont appliquées à l'ouvrage. Supposons que le petit accroissement  $dP_n$  de charge agisse d'abord seul, les déformations correspondantes sont également petites et le travail de déformation produit peut être négligé comme produit d'infiniment petits. Si l'on fait intervenir les charges  $P$ , elles produisent un travail  $A$  ; d'autre part la petite charge  $dP_n$  effectue également un travail de déformation  $dP_n \cdot \eta_n$  lorsque le point d'application de la charge  $dP_n$  se déplace de  $\eta_n$  dans la direction de  $dP_n$ , sous l'action de la charge  $P$ . De l'égalité du travail de déformation produit dans les deux cas, avec des ordres de succession différents dans l'application des charges, on tire :

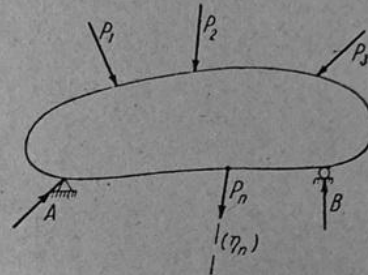


FIG. 263.

$$A + \frac{\delta A}{\delta P_n} \cdot dP_n = A + dP_n \cdot \eta_n$$

ou :

$$\eta_n = \frac{\delta A}{\delta P_n}; \tag{164 a}$$

La dérivée partielle du travail de déformation  $A$  par rapport à la charge  $P$  où  $A$  est exprimé en fonction des charges  $P$ , fournit le déplacement  $\eta_n$  du point d'application de  $P_n$  dans la direction de cette charge.

Les expressions « charge » et « déplacement » ont d'ailleurs un sens très général ; l'équation (164 a) s'applique en effet encore si l'on remplace la charge  $P_n$  par un moment  $M_n$  et le déplacement  $\eta_n$  par une rotation  $\tau_n$  telle que :

$$\tau_n = \frac{\delta A}{\delta M_n}. \tag{164 b}$$

Figure 54. Démonstration du théorème de Castigliano, issue de [12]

Considérons une poutre statiquement déterminée liée à des appuis fixes. Les réactions d'appui sont déterminées par les équations de la statique.

La poutre est soumise aux forces  $P$  du système  $S$ . Appliquons le théorème de Maxwell en prenant un système  $S'$  constitué par des forces  $dP$  (différentielle de  $P$ ), c'est-à-dire correspondant à des petites variations des forces  $P$  dans leur direction.

Par suite :

$$\Sigma P dv = \Sigma v dP$$

Mais la variation du travail des forces  $P$  ou énergie de déformation quand on déplace leurs points d'application de  $dv$  dans leurs directions est :

$$dW = \Sigma P dv.$$

Par suite :

$$dW = \Sigma v dP.$$

On peut encore obtenir cette relation en différentiant la relation :

$$W = \frac{1}{2} \Sigma P v$$

$$dW = \frac{1}{2} \Sigma P dv + \frac{1}{2} \Sigma v dP = \Sigma P dv.$$

On obtient ainsi :

$$v = \frac{\partial W}{\partial P}$$

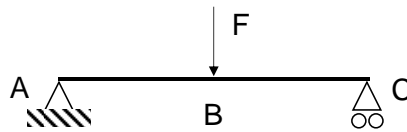
les variables  $P$  étant indépendantes et constituées par les forces extérieures directement appliquées.

*Le déplacement d'une force dans sa direction (ou la rotation du bras de levier d'un couple) est égal à la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à cette force (ou à ce couple).*

Figure 55. Démonstration du théorème de Castigliano, issue de [10]

### 11.3.3 Exemple : Flèche d'une poutre sur deux appuis, effort ponctuel au centre

Soit une poutre de longueur  $L$ , sur deux appuis, soumise à un effort ponctuel  $F$  en son centre, au point B. Calculer le déplacement  $u$  du point B. Le module  $E$  et le module  $I$  sont constants sur la poutre.



$$u = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx$$

Entre 0 et  $L/2$ ,

$$M = F \cdot \frac{x}{2}$$

Entre  $L/2$  et  $L$

$$M = \frac{F}{2} \cdot (L - x)$$

$$u = \frac{1}{EI} \cdot \frac{\partial}{\partial F} \left( \int_0^{L/2} F^2 \cdot \frac{x^2}{4} dx + \int_0^L \frac{F^2}{4} \cdot (L - x)^2 dx \right) = \frac{F \cdot L^3}{48EI}$$

## 11.4 Théorème de Ménabréa

### 11.4.1 Enoncé

Dans un système hyperstatique externe, les inconnues sont les réactions d'appui, et on a

$$\frac{\partial W}{\partial R_A} = u_A = 0$$

Si A est un appui fixe. On peut donc en déduire facilement  $R_A$ .

## 11.5 Théorème de la charge unitaire

Le théorème de Castigliano permet de calculer un déplacement seulement là où un effort est appliqué.

Une extension de Castigliano est le théorème de la charge unitaire, il permet de calculer le déplacement d'un point même si aucun effort n'y est appliqué.

### 11.5.1 Enoncé

Soit une poutre de module E, de moment quadratique I, soumise à au moment de flexion  $M_i$ .

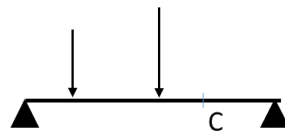
Le déplacement au point j est donné par :

$$\Delta_{ij} = \int_{structure} \frac{M_i M_j}{EI} dx$$

Avec  $M_j$  moment dû à une force unitaire appliquée au point j, dans la direction où l'on veut calculer le déplacement.

### 11.5.2 Démonstration

Soit par exemple la poutre ci-dessous.



On veut calculer le déplacement vertical du point C. Le théorème de Castigliano ne permet pas de calculer ce déplacement car aucune force n'est appliquée en C.

Appliquons donc une force F en C, force égale à 0. On peut alors écrire, par superposition :

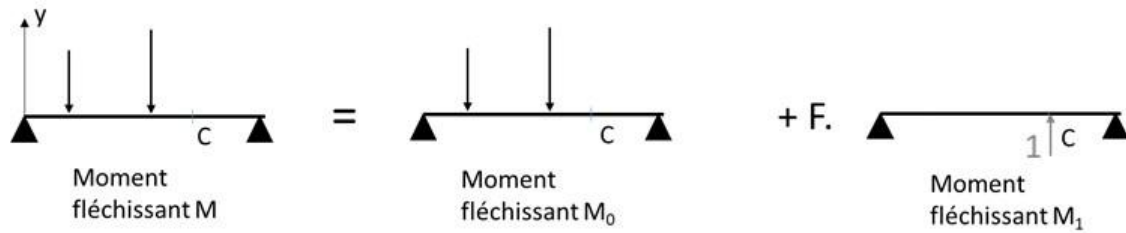


Figure 56. Calcul du déplacement vertical en C avec le théorème de la charge unitaire

- $M$  est le moment fléchissant total
- $M_0$  est le moment fléchissant sur la structure avec le cas de charge réel
- $M_1$  est le moment fléchissant pour une force unitaire placée en C dans la direction verticale.

Par superposition,

$$M = M_0 + F \cdot M_1$$

L'énergie de déformation a pour expression, en négligeant les termes en traction et cisaillement :

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_{structure} \frac{M^2}{EI} ds$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{structure} \frac{(M_0 + F \cdot M_1)^2}{EI} ds$$

Soit  $\Delta_C$  le déplacement au point d'application de  $F$ . Par le théorème de Castigliano on a :

$$\Delta_C = \frac{\partial W}{\partial F} = \int_{structure} (M_0 + F \cdot M_1) \cdot \frac{M_1}{EI} ds$$

Or comme  $F = 0$  on a

$$\Delta_C = \int_{structure} \frac{M_0 M_1}{EI} dx$$

### 11.5.3 Remarque importante

La force unitaire sera placée dans le sens positif par-rapport au repère. Dans le calcul des intégrales, on spécifiera bien le signe des moments. Cela donnera directement le signe du déplacement, dans la direction d'application de la force. Par exemple, en Figure 56, la force sera orientée vers le haut ( $y$  positif). Si le déplacement obtenu est négatif, le déplacement est en  $-y$ .

### 11.5.4 Annexe : tableau des intégrales de Mohr

Tableau des intégrales de Mohr

Tableau tel que :  $\int_0^L M_i(x) \cdot M_j(x) \cdot dx$

$M_i(x)$	$M_j(x)$						
		$L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{2} L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{2} L \cdot M_i (M_j + M'_j)$	$\frac{2}{3} L \cdot M_i M_j$	$\frac{2}{3} L \cdot M_i M_j$	$\frac{2}{3} L \cdot M_i M_j$
		$\frac{1}{2} L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{3} L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{6} L \cdot M_i (2 \cdot M_j + M'_j)$	$\frac{1}{3} L \cdot M_i M_j$	$\frac{5}{12} L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{4} L \cdot M_i M_j$
		$\frac{1}{2} L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{6} L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{6} L \cdot M_i (M_j + 2 \cdot M'_j)$	$\frac{1}{3} L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{4} L \cdot M_i M_j$	$\frac{5}{12} L \cdot M_i M_j$
		$\frac{1}{2} L \cdot M_i (M_i + M'_i)$	$\frac{1}{6} L \cdot M_j (2M_i + M'_i)$	$\frac{1}{6} L \cdot (2 \cdot M_i \cdot M_j + M_i \cdot M'_j + M'_i \cdot M_j + 2 \cdot M'_i \cdot M'_j)$	$\frac{1}{3} L \cdot M_j (M_i + M'_i)$	$\frac{1}{12} L \cdot M_j \cdot (5 \cdot M_i + 3 \cdot M'_i)$	$\frac{1}{12} L \cdot M_j \cdot (3 \cdot M_i + 5 \cdot M'_i)$
		$\frac{1}{2} L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{6} L \cdot M_i M_j \left(1 + \frac{x'}{L}\right)$	$\frac{1}{6} L \cdot M_i \left[ M_j \left(1 + \frac{x'}{L}\right) + M'_j \left(1 + \frac{x}{L}\right) \right]$	$\frac{1}{3} L \cdot M_i M_j \cdot \left(1 + \frac{x \cdot x'}{L^2}\right)$	$\frac{1}{12} L \cdot M_i M_j \cdot \left(3 + \frac{3x'}{L} - \frac{x'^2}{L^2}\right)$	$\frac{1}{12} L \cdot M_i M_j \cdot \left(3 + \frac{3x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)$
		$\frac{1}{2} L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{4} L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{6} L \cdot M_i (M_j + M'_j)$	$\frac{5}{12} L \cdot M_i M_j$	$\frac{17}{48} L \cdot M_i M_j$	$\frac{17}{48} L \cdot M_i M_j$

### 11.5.5 Méthode des forces avec moment unitaire

On a plutôt l'habitude, avec la méthode des forces, de déterminer des réactions d'appui. Mais on peut aussi s'en servir pour déterminer des moments d'encastrement.

Dans le cas d'un moment d'encastrement, on ne calcule pas un déplacement mais une rotation  $\omega$ .

Mais la formule est la même que pour un déplacement :

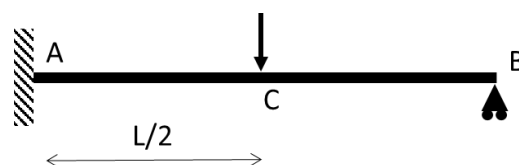
$$\omega = \int_{structure} \frac{M_0 \cdot M_1}{EI} ds$$

$M_0$  : moment sur structure isostatique associée avec cas de charge réel

$M_1$  : moment sur structure isostatique associée avec moment unitaire là où on veut calculer la rotation

#### Exemple

Soit la structure ci-dessous



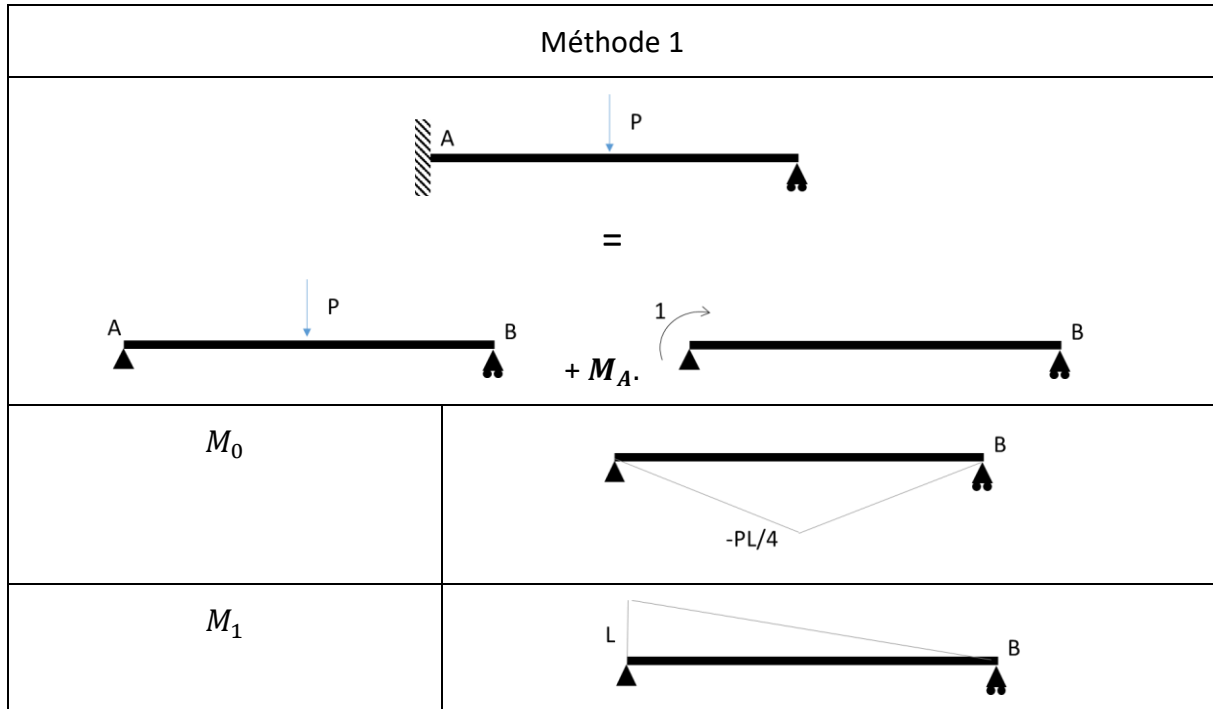
Il y a plusieurs façons de la résoudre avec la méthode des forces.

On donne ci-dessous deux méthodes où dans un cas l'inconnue que l'on détermine est  $M_A$  et dans l'autre, l'inconnue que l'on détermine est  $Y_B$ .

Pour comparer les deux méthodes on retrouve dans les deux cas

$$M_A = \frac{3PL}{16}$$

$$Y_B = \frac{5P}{16}$$



$$\omega_0 = \int_{\text{structure isostatique associée}} \frac{M_0 \cdot M_1}{EI} ds$$

$$\omega_1 = \int_{\text{structure isostatique associée}} \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} ds \quad \omega_0 + M_A \cdot \omega_1 = 0$$

Donc

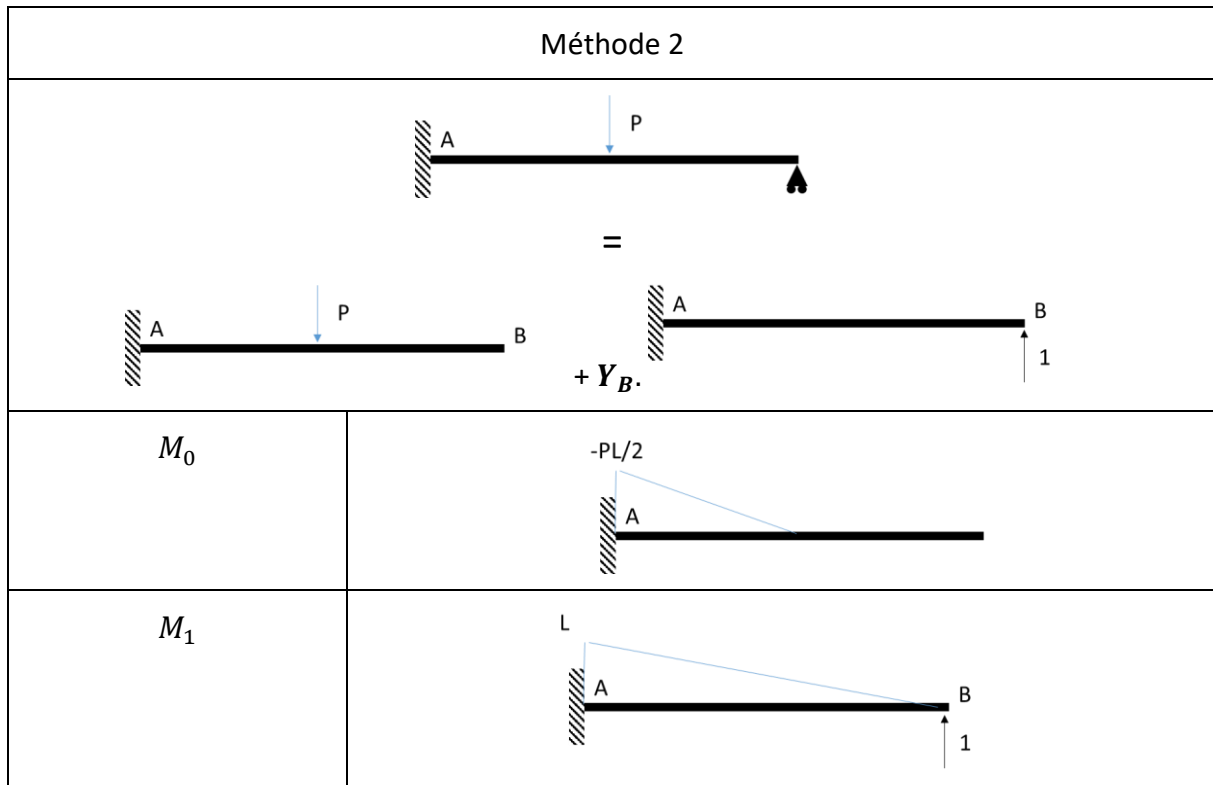
$$M_A = -\frac{\omega_0}{\omega_1}$$

Finalement

$$M_A = \frac{3PL}{16}$$

Avec le PFS, on retrouve

$$Y_B = \frac{5P}{16}$$



$$\delta_0 = \int_{\text{structure isostatique associée}} \frac{M_0 \cdot M_1}{EI} ds$$

$$\delta_1 = \int_{\text{structure isostatique associée}} \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} ds$$

$$\delta_0 + Y_B \cdot \delta_1 = 0$$

Donc

$$Y_B = -\frac{\delta_0}{\delta_1}$$

Finalement

$$Y_B = \frac{5PL}{16}$$

Avec le PFS, on retrouve

$$M_A = \frac{3PL}{16}$$

## 12 Flambement

### 12.1 Introduction

On appelle flambement le phénomène de flexion d'une structure soumise à un effort de compression. La flexion se produit dans une direction perpendiculaire à l'axe de compression.

Ce phénomène est **non linéaire** : la flexion apparaît subitement pour une valeur critique de l'effort de compression. Lors du flambement, les forces ne sont plus proportionnelles aux déformations.

Ce phénomène est **instable** car la flèche en flexion peut augmenter alors même qu'on n'augmente plus l'effort  $F$ .

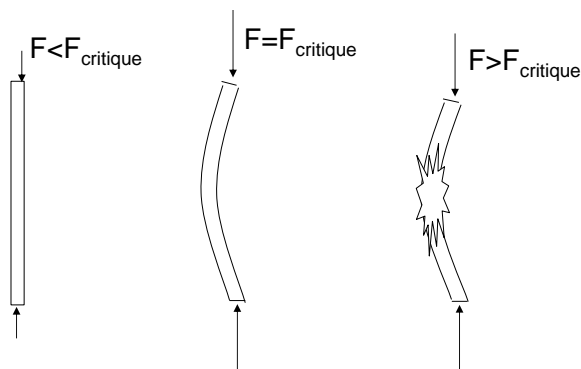


Figure 57. Le phénomène de flambement

La charge critique de flambement  $F_{critique}$  est donnée par

$$F_{critique} = k \times \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{L^2}$$

$k$  est un coefficient sans dimension dépendant des conditions aux limites (appuis à chaque extrémité de la poutre, voir Figure 58).

$I_z$  : moment quadratique de la section : quantifie la résistance de la section en flexion (propriété géométrique) ;  $L$  : longueur de la poutre.

$E$  : module d'Young de la poutre.

L'expression de la charge critique de flambement montre l'influence des propriétés du matériau ( $E$ ), mais aussi de la géométrie de la pièce :  $I_z$  et  $L$ .

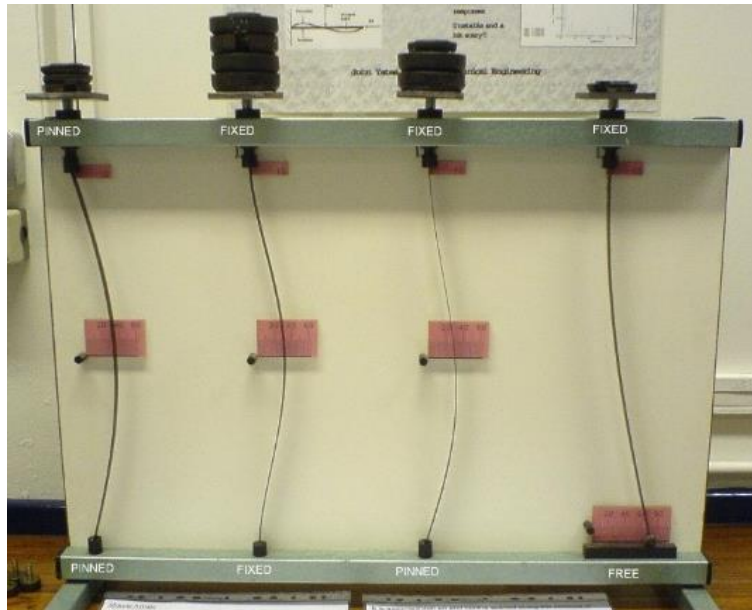


Figure 58. Charge critique : influence des conditions aux limites (Grahams Child, CC BY-SA 3.0, Wikimedia Commons)

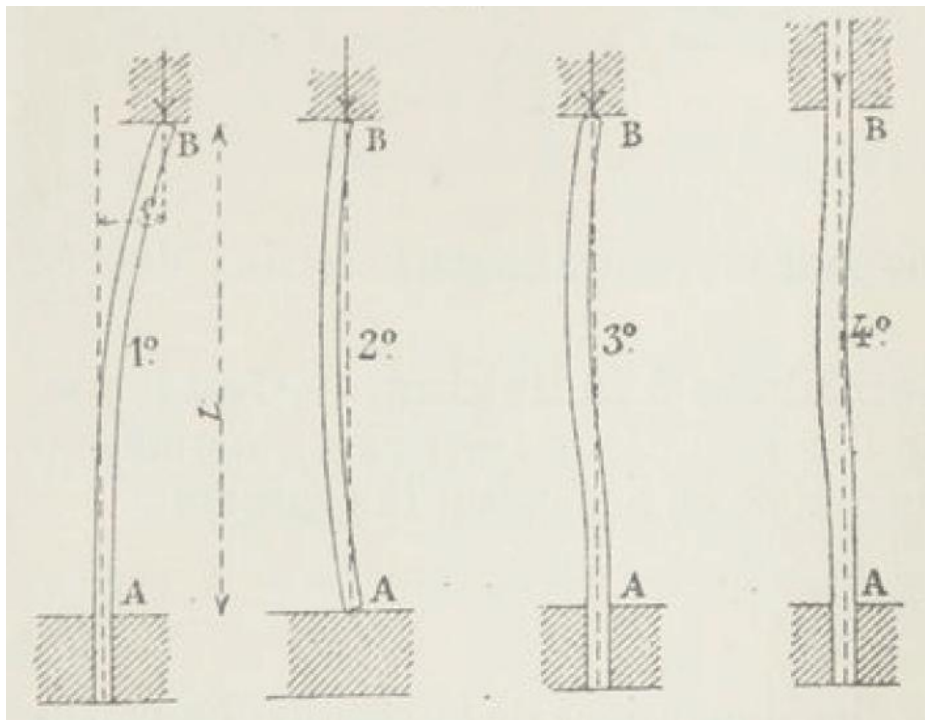


Figure 59. Charge critique : influence des conditions aux limites [13]

## 12.2 Modélisation du phénomène

Contrairement à l'ensemble des calculs présentés dans ce document, il est nécessaire de se placer dans la configuration déformée pour modéliser le flambement. Cela permet de faire apparaître un moment fléchissant  $M_f$  dû à la charge  $\vec{F}$  (Figure 60).

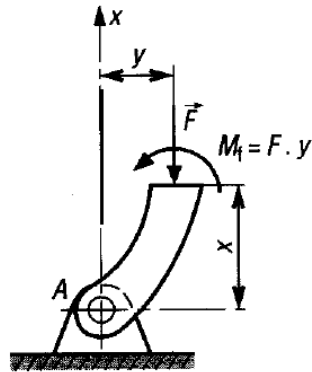


Figure 60. Calcul de la charge critique de flambage : on se place dans la configuration déformée pour déterminer le moment dû à l'effort de compression [7]

### 12.2.1 Schémas des cas 1-2-3 avec les différentes conditions d'appui

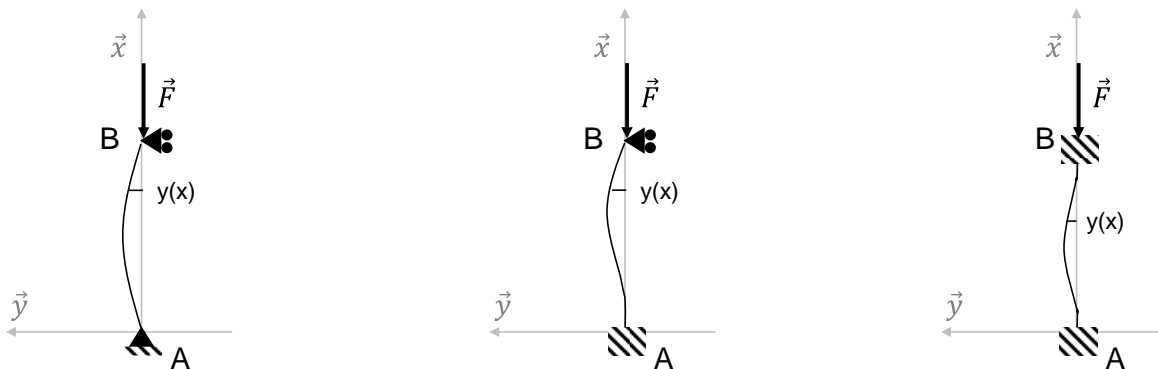


Figure 61. Gauche : cas 1 poutre appuyée sur ses 2 extrémités. Milieu : cas 2 Cas 2 : poutre appui en B – encastrement en A. Droite : cas 3. Cas 3 : poutre encastrement - encastrement

### 12.2.2 Cas 1 : poutre appuyée sur ses 2 extrémités

PFS :  $X_A = P ; Y_A + Y_B = 0$

$$M_f(x) = E \cdot I_z \cdot y''(x)$$

$$M_f(x) = -F \cdot y(x)$$

$$E \cdot I_z \cdot y'' + F \cdot y = 0$$

$$y'' + k^2 \cdot y = 0$$

Avec  $k^2 = \frac{F}{E \cdot I_z}$

$$y(x) = A \cdot \cos(kx) + B \cdot \sin(kx)$$

Conditions aux limites :  $y(0)=0 ; y(L)=0$

Donc

$$\begin{cases} A \cdot \cos(0) + B \cdot \sin(0) = 0 \\ A \cdot \cos(kL) + B \cdot \sin(kL) = 0 \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(kL) & \sin(kL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si  $\det \neq 0$  :  $A=B=0$  pas de déplacement

$$\det \neq 0 \Leftrightarrow \sin kL \neq 0 \Leftrightarrow kL \neq \pi \Leftrightarrow k^2 \neq \frac{\pi^2}{L^2} \Leftrightarrow P \neq \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{L^2}$$

Si  $\det=0$  : infinité de solutions avec B quelconque

$$\sin kL = 0 \Leftrightarrow kL = n\pi \Leftrightarrow F_{cr} = n \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{L^2}$$

Pour  $n=1$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{L^2}$$

### 12.2.3 Cas 2 : poutre appui en B – encastrement en A

PFS :  $X_A = P$  ;  $Y_A + Y_B = 0$  ;  $M_A + Y_B \cdot L = 0$

$$M_f(x) = E \cdot I_z \cdot y''(x)$$

$$M_f(x) = -F \cdot y(x) + R_{yB}(L - x)$$

$$y'' + k^2 \cdot y = \frac{R_{yB}}{E \cdot I_z} (L - x)$$

Avec  $k^2 = \frac{F}{E \cdot I_z}$

$$y = A \cdot \cos(kx) + B \cdot \sin(kx) + \frac{R_{yB}}{F} \cdot (L - x)$$

Conditions aux limites :  $y(0)=0$  ;  $y(L)=0$  ;  $y'(0)=0$

$$A + \frac{R_{yB}}{F} \cdot L = 0$$

$$A \cdot \cos(kL) + B \cdot \sin(kL) = 0$$

$$B \cdot k - \frac{R_{yB}}{F} = 0$$

$$F_{cr} \approx 2,04 \times \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{L^2}$$

### 12.2.4 Cas 3 : poutre encastrement - encastrement

PFS :  $R_{xA}=P$  ;  $R_{yA}+R_{yB}=0$  ;  $M_A+M_B+R_{yb} \cdot L=0$  et par symétrie :  $M_A+M_B=0$

$$M_f(x) = E \cdot I_z \cdot y''(x)$$

$$M_f(x) = -F \cdot y(x) + M_B$$

$$y'' + k^2 \cdot y = \frac{M_B}{E \cdot I_z}$$

Avec  $k^2 = \frac{F}{E \cdot I_z}$

$$y = A \cdot \cos(kx) + B \cdot \sin(kx) + \frac{M_B}{k^2 \cdot E \cdot I_z}$$

Conditions aux limites :  $y(0)=0$  ;  $y(L)=0$  ;  $y'(0)=0$

Donc

$$A + \frac{M_B}{k^2 \cdot E \cdot I_z} = 0$$

$$A \cdot \cos(kL) + B \cdot \sin(kL) + \frac{M_B}{k^2 \cdot E \cdot I_z} = 0$$

$$B \cdot k = 0$$

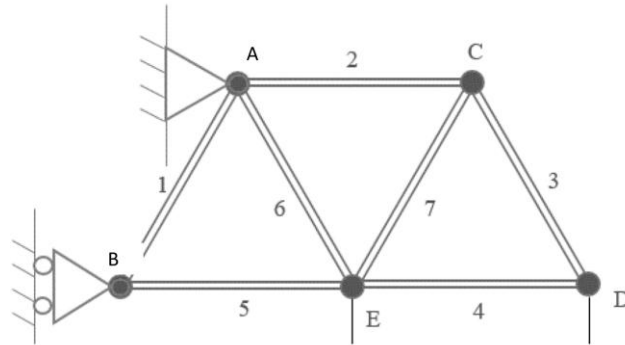
3 équations et 3 inconnues : A, B,  $M_B$

$$F_{cr} = 4 \times \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{L^2}$$

## 13 Fiches méthodes

### 13.1 Pour ne plus vous tromper dans les bras de levier et les signes des moments

#### 13.1.1 Exemple 1 : treillis



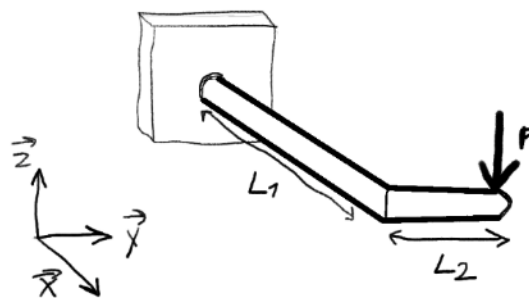
Les barres ont une longueur  $L$ . Le moment en B dû à la réaction d'appui en A est donné par

$$\vec{M}_B(\vec{R}_A) = \vec{M}_A(\vec{R}_A) + \vec{BA} \wedge \vec{R}_A$$

La liaison en A ne crée pas de moment en A (pivot) :  $\vec{M}_A(\vec{R}_A) = \vec{0}$  donc

$$\vec{M}_B(\vec{R}_A) = \vec{BA} \wedge \vec{R}_A = \begin{pmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}L \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_{Ay} \cdot \frac{L}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}L \cdot R_{Ax} \end{pmatrix} = \left( R_{Ay} \cdot \frac{L}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}L \cdot R_{Ax} \right) \vec{z}$$

#### 13.1.2 Exemple 2 : encastrement mur point B, application force F en A.



Moment en B dû à la force en A

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}) + \vec{BA} \wedge \vec{F}$$

Or le moment en A dû à la force en A est nul :  $\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{0}$  donc

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{BA} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F \cdot L2 \\ F \cdot L1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 14 Rappels : Propriétés mécaniques des matériaux

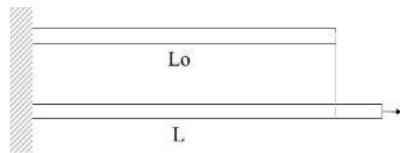
### 14.1 Matériau homogène / hétérogène et Matériau isotrope / anisotrope

Un matériau homogène est un matériau qui a les mêmes propriétés en tout point.

Un matériau isotrope a les mêmes propriétés dans toutes les directions de l'espace.

### 14.2 Déformation

Soit une pièce de longueur initiale  $L_0$ . Sous l'action d'un effort ou d'un déplacement, la pièce prend une longueur  $L$ .



L'allongement  $\Delta l$  (mm) de la pièce est

$$\Delta L = L - L_0$$

La déformation conventionnelle  $\varepsilon$  de la pièce est

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Une déformation est dite « **élastique** » si elle est **réversible**. Lorsque l'effort/déplacement n'est plus appliqué, la pièce reprend ses dimensions initiales.

Une déformation **irréversible** est dite **plastique**. Lorsque l'effort/déplacement n'est plus appliqué, la pièce ne reprend pas ses dimensions initiales.

### 14.3 Comportement en traction

#### 14.3.1 Comportements typiques de traction

On peut décrire le comportement en traction de la plupart des matériaux à l'aide d'un des trois comportements donnés ci-dessous.

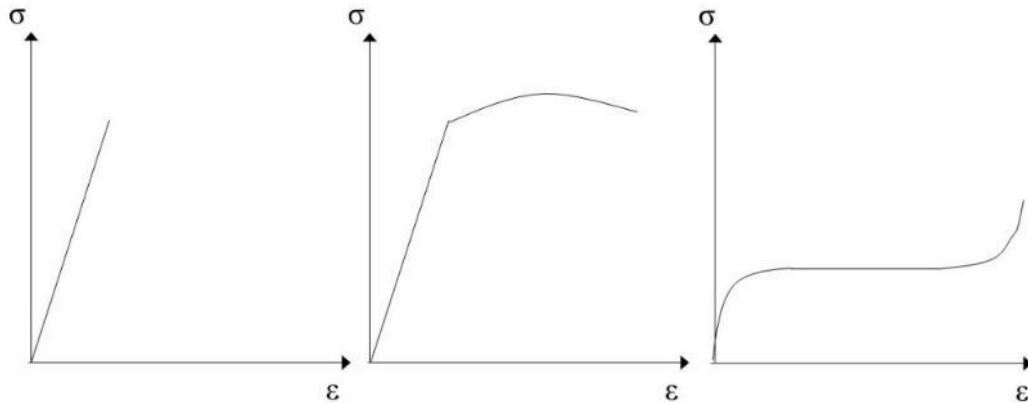


Figure 62. Gauche : linéaire élastique fragile. Milieu : linéaire élastique ductile. Droite : élastique non linéaire

#### 14.3.1.1 Linéaire élastique fragile

En début de traction, la déformation est élastique : réversible. Il y a relation linéaire entre la contrainte et la déformation. On parle de comportement linéaire élastique.

La rupture intervient ensuite sans déformation plastique notable : on parle de comportement fragile.

Ces matériaux sont sensibles au phénomène de concentration de contraintes, donc ils sont très sensibles à la présence de défauts (porosités, fissures internes).

#### 14.3.1.2 Linéaire élastique ductile

Le comportement est linéaire élastique en début de traction.

Il y a ensuite apparition d'une déformation plastique notable avant rupture (partie non linéaire de la courbe). On parle de comportement ductile.

#### 14.3.1.3 Elastique non linéaire

Sur une grande gamme de déformation, la déformation est élastique mais il n'y a pas relation linéaire entre la contrainte et la déformation.

### 14.3.2 La courbe de traction

Soit une éprouvette de section initiale  $S_0$  et de longueur initiale  $L_0$ . La courbe de traction conventionnelle trace la contrainte conventionnelle (aussi appelée nominale)

$$\sigma_n = \frac{F}{S_0}$$

en fonction de la déformation conventionnelle (aussi appelée nominale)

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta L}{L_0}$$

On trouve sur cette courbe :

- Le module d'Young  $E$ , pente de la partie linéaire élastique.

- La limite d'élasticité  $R_e$  du matériau, contrainte au-delà de laquelle la déformation devient plastique

La résistance à la rupture  $R_m = F_{max}/S_0$ , contrainte qui correspond à l'effort maximal mesuré lors de l'essai (donc en début de striction)

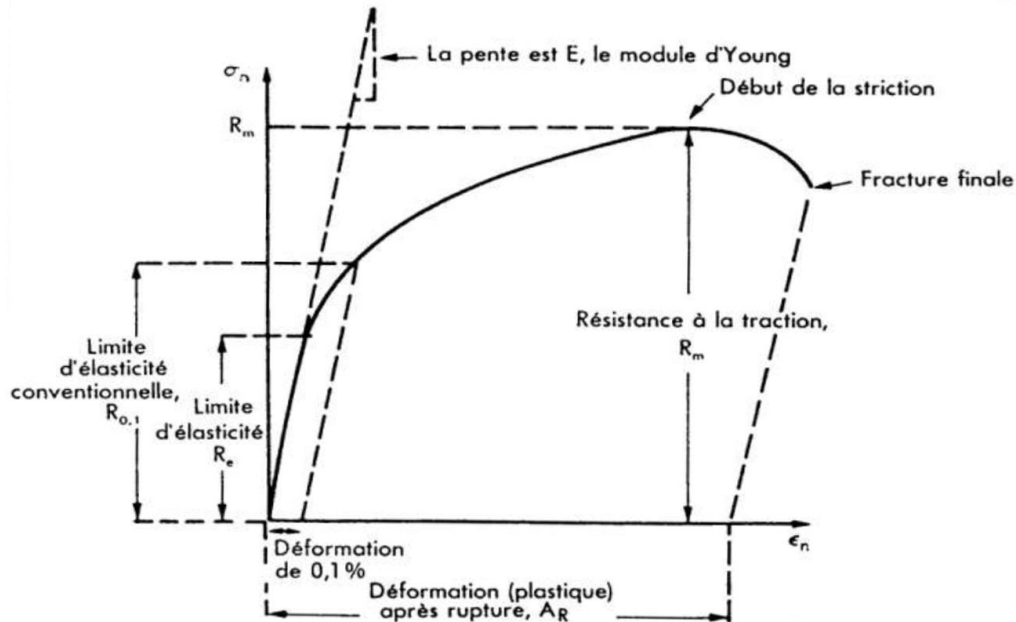


Figure 63. Courbe de traction pour un matériau linéaire élastique ductile

#### 14.3.2.1 Domaine élastique linéaire

La relation entre contrainte et déformation est décrite par la loi de Hooke en traction **uniaxiale** :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

E (en MPa) : module d'Young du matériau.

E dépend notamment de la nature des liaisons dans le solide :

Covalente	~ 10 <sup>6</sup> MPa
Métallique	30-200 000 MPa
Ionique	30-70 000 MPa
Pont hydrogène	8 000 MPa
Van der Waals	2 000 MPa

#### 14.3.2.2 Effet Poisson

Pour une traction suivant l'axe longitudinal L, il se produit une contraction dans l'axe transversal t (conservation du volume). On parle d'effet Poisson. On définit alors le coefficient de Poisson  $\nu$  tel que :

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l}$$

Remarque :  $0 \leq \nu \leq 0.5$

Loi de Hooke généralisée (loi de comportement du solide élastique linéaire)

Elle généralise la loi de Hooke au cas multiaxial. Car l'effet Poisson induit un couplage entre contraintes et déformations dans toutes les directions.

Une contrainte $\sigma_i$ entraîne les déformations :	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$
$\sigma_1$	$\frac{\sigma_1}{E}$	$-\nu \cdot \frac{\sigma_1}{E}$	$-\nu \cdot \frac{\sigma_1}{E}$
$\sigma_2$	$-\nu \cdot \frac{\sigma_2}{E}$	$\frac{\sigma_2}{E}$	$-\nu \cdot \frac{\sigma_2}{E}$
$\sigma_3$	$-\nu \cdot \frac{\sigma_3}{E}$	$-\nu \cdot \frac{\sigma_3}{E}$	$\frac{\sigma_3}{E}$

Finalement, la loi de Hooke généralisée énonce

$$\varepsilon_1 = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_3 - \frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

14.3.2.3 Limite d'élasticité  $R_e$

Pour une contrainte seuil, appelée limite d'élasticité  $R_e$ , la déformation cesse d'être élastique : une déformation plastique, donc irréversible, apparaît.

La transition élastique – plastique est parfois difficile à situer sur la courbe de traction. On définit donc souvent la limite d'élasticité par convention (Figure 64).

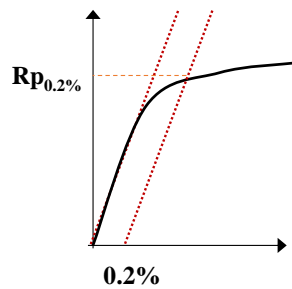


Figure 64. Limite d'élasticité  $R_{p0.2\%}$

## 15 Références Bibliographiques

- [1] « Annales des mines. Revue mensuelle des industries extractives », nov. 1971, [En ligne]. Disponible sur: [Source gallica.bnf.fr](http://gallica.bnf.fr) / MINES ParisTech
- [2] J. Résal, *Résistance des matériaux : cours de l'École des ponts et chaussées*. 1898. [En ligne]. Disponible sur: [gallica.bnf.fr](http://gallica.bnf.fr)
- [3] Menan, François, Saanouni, Amara, et Raso, « Optimisation en fatigue d'un moteur thermique à chambre circulaire », *La Forge*, n° 47, janv. 2012.
- [4] Maltrud, Gressel, Lawrjaniec, Menan, Lieurade, et Jubin, « CLASSIFICATION OF SEVERAL WELDED JOINTS FOR LOAD CARRYING ATTACHMENTS ACCORDING TO THEIR FATIGUE STRENGTH », présenté à International Institute of Welding, 2010.
- [5] T. Bouche, « Polycopié de mécanique PTSI-PT - Centre Charles de Foucauld - Angers ». 2001.
- [6] J. Résal, *Constructions métalliques, élasticité et résistance des matériaux, fonte, fer et acier.*, Source [gallica.bnf.fr](http://gallica.bnf.fr) / BnF. 1892.
- [7] J.-L. Fanchon, *Guide de Mécanique*. Nathan, 1998.
- [8] E. Gouard et G. Hiernaux, *Cours élémentaire de mécanique industrielle. Principes généraux, applications, exercices pratiques*, 2<sup>e</sup> éd., vol. 1. Paris: DUNOD et PINAT, 1914.
- [9] K. Culmann, *Traité de statique graphique* ». Traduit de la 2<sup>ème</sup> édition allemande. 1880. [En ligne]. Disponible sur: [gallica.bnf.fr](http://gallica.bnf.fr)
- [10] P. Dellus, *Résistance des Matériaux*. Technique & Vulgarisation, 1956.
- [11] M. Koechlin, *Applications de la statique graphique*, 2<sup>e</sup> éd. 1898. [En ligne]. Disponible sur: [gallica.bnf.fr](http://gallica.bnf.fr)
- [12] F. Stussi, *Statique Appliquée et Résistance des Matériaux*, vol. 1. DUNOD, 1949.
- [13] J. Buchetti, *Manuel des constructions métalliques et mécaniques*. 1888. [En ligne]. Disponible sur: <http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb301722737>
- [14] Chillon, *Résistance des matériaux Tome 1*, vol. 1. Paris: DUNOD, 1961.
- [15] Y. Brémont et P. Réocreux, *Mécanique du solide indéformable: statique cours et exercices résolus classes préparatoires aux grandes écoles, MPSI, PTSI, PSI, PSI\*, MP, MP\*, PT, PT\*, premier cycle universitaire*. in *Mécanique*, no. 2. Paris: Ellipses, 1996.
- [16] L. Buthaud, « Polycopié de mécanique des solides ISAE-ENSMA ». ISAE ENSMA, 2002.
- [17] D. Gamby, « Polycopié de Résistance des Matériaux ». ISAE-ENSMA, 2002.
- [18] *Comprendre simplement la résistance des matériaux: la structure, principes et enjeux pour la conception*, 3<sup>e</sup> édition. Antony [France]: Éditions Le Moniteur, 2019.
- [19] P.-O. Martin, « Formulaire résistance des matériaux - Poutres ». CTICM, 2021.
- [20] E. Callandreau, *Problèmes de résistance des matériaux avec leurs solutions*. Albin Michel, 1944. [En ligne]. Disponible sur: [Source gallica.bnf.fr](http://gallica.bnf.fr) / Bibliothèque nationale de France

- [21] A. Castigliano, *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. in *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*, no. vol. 1 à 2. A. F. Negro, 1879. [En ligne]. Disponible sur: <https://books.google.fr/books?id=d0EArvXp34gC>

ECAM Lyon - RdM - Serge VIALA

EPSAA - construction A3 Guillaume NICOLAS - 2019-2020

Sylvain Ebode et Marc Leyral [www.construire-l-architecture.com](http://www.construire-l-architecture.com)