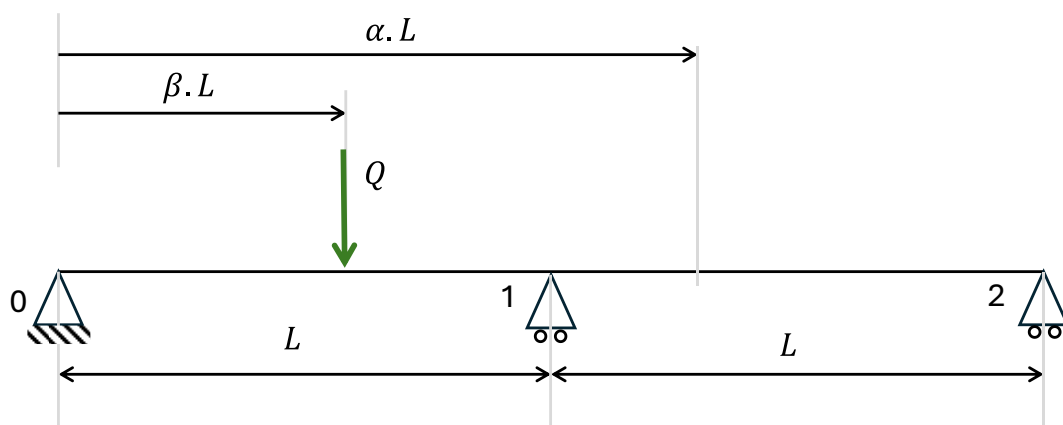


Résistance des Matériaux

—
Exercice : ligne d'influence d'une charge mobile sur une poutre continue à deux travées



Frédéric Menan

<https://lesdocsduprof.com/>

fmenan@cesi.fr

Janvier 2026

Introduction

On propose de mettre en évidence les lignes d'influence pour le moment sur l'appui central et pour le moment en travée, pour une poutre continue à deux travées.

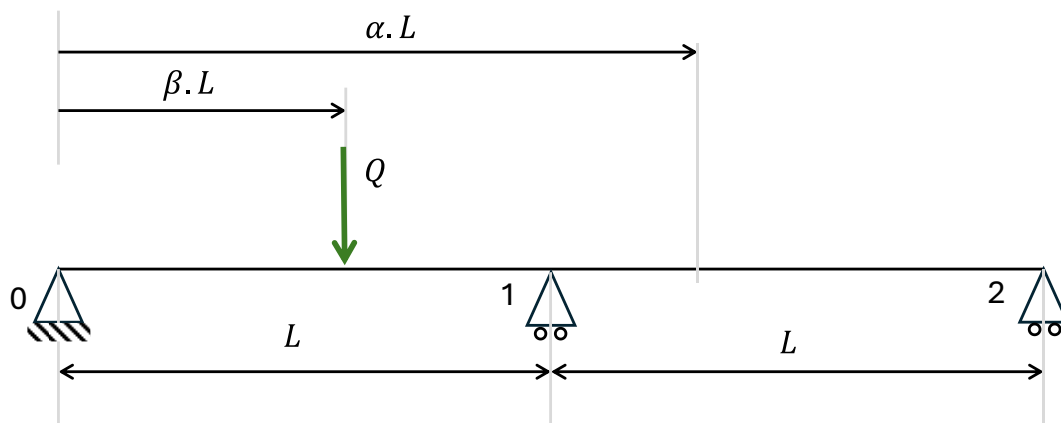
Cet exercice s'inspire de la ressource du CTICM (Palacios, 2025) : « Lignes d'influence d'une charge mobile sur une poutre sur 3 appuis - Romain Palacios, chef de projets recherche, CTICM – Mai 2025 ». <https://metaletech.com/2025/04/28/lignes-dinfluence-dune-charge-mobile-sur-une-poutre-sur-3-appuis/>

Questions

Soit une poutre continue de deux travées de longueur identique L .

Le module d'Young E et le moment quadratique I sont constants sur toute la poutre.

La poutre est soumise à une charge ponctuelle Q , appliquée à la distance $\beta \cdot L$ de l'appui de gauche, avec $0 \leq \beta \leq 2$.



Partie 1. Ligne d'influence pour le moment sur l'appui 1

1. Déterminer l'expression du moment M_1 sur l'appui central en fonction de Q , β et L .
2. Soit la fonction $\mu_1(\beta)$ telle que $M_1 = QL \cdot \mu_1(\beta)$. Déterminer l'expression de μ_1 et tracer μ_1 en fonction de β .
3. Déterminer la valeur de β correspondant au maximum du moment M_1

Partie 2. Ligne d'influence pour le moment en travée

On se place dans la section x telle que $x = \alpha \cdot L$.

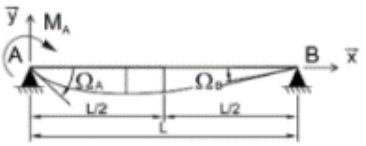
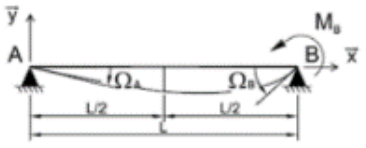
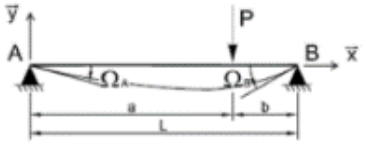
Seul varie le point d'application de la charge, point d'abscisse $\beta \cdot L$ avec $0 \leq \beta \leq 2$.

1. Déterminer l'expression du moment fléchissant M en travée en fonction de Q , β et L .
2. Soit la fonction $\mu_2(\beta)$ telle que $M = QL \cdot \mu_2(\beta)$. Déterminer l'expression de $\mu_2(\beta)$ et tracer μ_2 en fonction de β .
3. Déterminer la valeur de β correspondant au maximum du moment M

Partie 3. Synthèse

1. Conclure sur les deux positions d'une surcharge ponctuelle en travée 1, pour le moment sur appui central et le moment en travée.

Formulaire

Géométrie et chargement	Ω_A	Ω_B	flèche en $x=L/2$
	$-\frac{M_A L}{3EI}$	$\frac{M_B L}{6EI}$	$-\frac{M_A L^2}{16EI}$
	$-\frac{M_B L}{6EI}$	$\frac{M_B L}{3EI}$	$-\frac{M_B L^2}{16EI}$
	$-\frac{Pab(L+b)}{6EIL}$	$\frac{Pab(L+a)}{6EIL}$	

Correction

Partie 1. Ligne d'influence pour le moment sur l'appui 1

1/

- Pour $0 \leq \beta \leq 1$ (charge sur la travée 1)

Théorème des trois moments sur l'appui central

$$M_0 \cdot L + 2M_1 \cdot 2L + M_2 \cdot L = 6EI \cdot (\Omega_d - \Omega_g)$$

$$M_0 = 0 ; M_2 = 0 ; \Omega_g = \frac{Q \cdot \beta L \cdot (L - \beta L) \cdot (L + \beta L)}{6EIL} ; \Omega_d = 0$$

$$M_1 = -\frac{6EI}{4L} \cdot \frac{Q \cdot \beta L \cdot (L - \beta L) \cdot (L + \beta L)}{6EIL}$$

Finalement,

$$M_1 = 0,25 \times Q \cdot \beta \cdot L \cdot (\beta^2 - 1)$$

- Pour $1 \leq \beta \leq 2$ (charge sur la travée 2)

Théorème des trois moments sur l'appui central

$$M_0 \cdot L + 2M_1 \cdot 2L + M_2 \cdot L = 6EI \cdot (\Omega_d - \Omega_g)$$

$$M_0 = 0 ; M_2 = 0 ; \Omega_g = 0 ; \Omega_d = -\frac{-Q \cdot (L - \beta L) \cdot (2L - \beta L) \cdot (L + 2L - \beta L)}{6EIL}$$

Finalement,

$$M_1 = 0,25 \times QL \cdot (2 - \beta) \cdot (3 - 4\beta + \beta^2)$$

2/ On a

$$\begin{cases} \mu_1(\beta) = 0,25 \cdot \beta \cdot (\beta^2 - 1) & 0 \leq \beta \leq 1 \\ \mu_1(\beta) = 0,25 \cdot (2 - \beta) \cdot (3 - 4\beta + \beta^2) & 1 \leq \beta \leq 2 \end{cases}$$

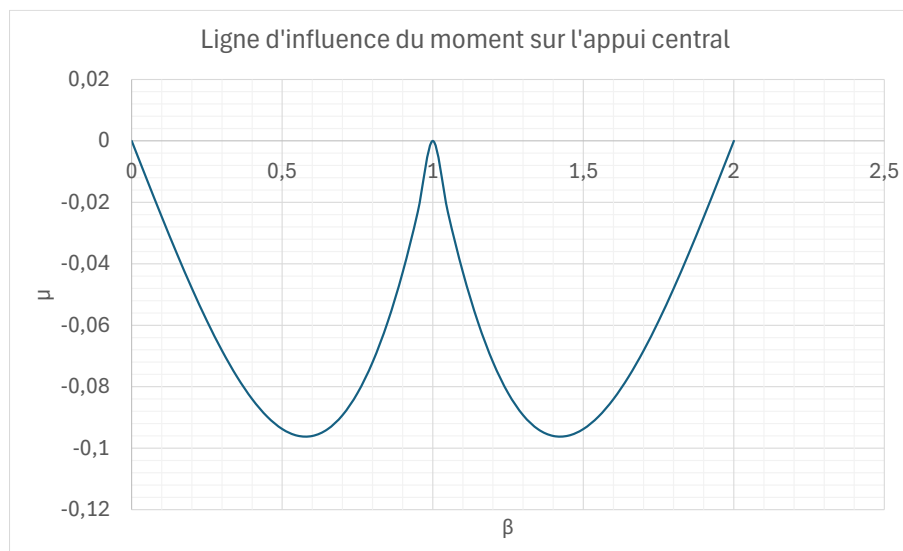


Figure 1. Ligne d'influence du moment sur l'appui central

3/ Valeur de β correspondant au maximum du moment M_1

Pour $0 \leq \beta \leq 1$

$$\frac{d\mu_1}{d\beta} = 0,25 \cdot (\beta^2 - 1) + 0,25 \cdot \beta \cdot 2\beta = 0,75\beta^2 - 0,25$$

$$\frac{d\mu_1}{d\beta} = 0 \Leftrightarrow \beta = \sqrt{\frac{0,25}{0,75}} \approx 0,577$$

Pour $1 \leq \beta \leq 2$

$$\mu_1(\beta) = 0,25 \cdot (2 - \beta) \cdot (3 - 4\beta + \beta^2)$$

$$\frac{d\mu_1}{d\beta} = -0,25 \cdot (3 - 4\beta + \beta^2) + 0,25 \cdot (2 - \beta) \cdot (-4 + 2\beta)$$

$$\frac{d\mu_1}{d\beta} = 0 \Leftrightarrow \beta = 1,423$$

Remarque : par symétrie on pouvait deviner que le moment sur appui max est pour $\beta = 0,577$ en partant de l'appui de droite, donc 1,423 en partant de l'appui de gauche.

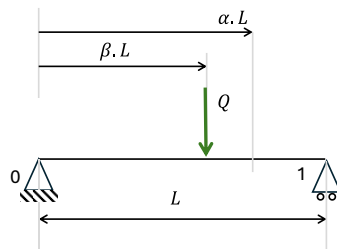
Partie 2. Ligne d'influence pour le moment sur travée

1/ En travée 1

- Pour $0 \leq \beta \leq \alpha$

$$M(\alpha \cdot L) = m_0(\alpha \cdot L) + M_1 \cdot \frac{\alpha \cdot L}{L}$$

Calcul de $m_0(x)$: c'est le moment fléchissant pour une charge ponctuelle située à la distance $\beta \cdot L$ de l'appui 0, dans une section à droite du point d'application de la charge.



PFS

$$Y_0 + Y_1 - Q = 0$$

$$Y_1 \cdot L - Q \cdot \beta \cdot L = 0 \Rightarrow Y_1 = Q \cdot \beta$$

Donc

$$m_0(x) = Q \cdot \beta \cdot (L - \alpha \cdot L)$$

Donc pour $x = \alpha \cdot L$

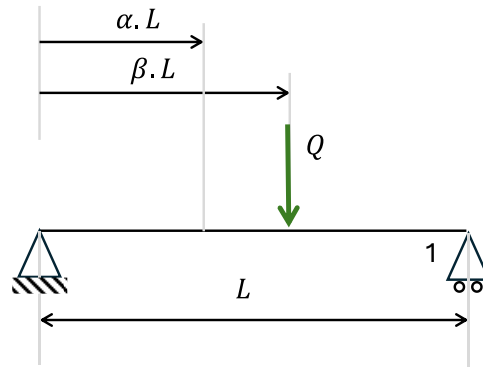
$$M = Q \cdot \beta \cdot (L - \alpha \cdot L) + M_1 \cdot \alpha$$

$$M = Q \cdot \beta \cdot L \cdot (1 - \alpha) + \mu_1 \cdot Q \cdot L \cdot \alpha = Q \cdot L \cdot (\beta \cdot (1 - \alpha) + 0,25 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot (\beta^2 - 1))$$

- Pour $\alpha \leq \beta \leq 1$

$$M(\alpha \cdot L) = m_0(\alpha \cdot L) + M_1 \cdot \frac{\alpha \cdot L}{L}$$

Calcul de $m_0(x)$: c'est le moment fléchissant pour une charge ponctuelle située à la distance $\beta \cdot L$ de l'appui 0, dans une section à gauche du point d'application de la charge.



On a toujours $Y_1 = Q \cdot \beta$

$$m_0(x) = Q \cdot \beta \cdot (L - \alpha \cdot L) - Q \cdot (\beta \cdot L - \alpha \cdot L) = Q \cdot L \cdot (\beta - \beta \cdot \alpha - \beta + \alpha) = Q \cdot L \cdot \alpha \cdot (1 - \beta)$$

Donc

$$M = Q \cdot \alpha \cdot L \cdot (1 - \beta) + \mu_1 \cdot Q \cdot L \cdot \alpha = Q \cdot L \cdot (\alpha \cdot (1 - \beta) + \mu_1 \cdot \alpha)$$

$$M = Q \cdot L \cdot (\alpha \cdot (1 - \beta) + 0,25 \cdot \beta \cdot (\beta^2 - 1) \cdot \alpha)$$

- Pour $1 \leq \beta \leq 2$

$$M = m_0(x) + M_1 \cdot \frac{x}{L} = M_1 \cdot \frac{x}{L}$$

On est toujours dans la travée 1, c'est la charge qui est passée dans la travée 2. La travée 1 n'est plus chargée donc $m_0(x) = 0$.

$$M = QL \cdot \mu_1 \cdot \alpha = QL \cdot \alpha \cdot 0,25 \cdot (2 - \beta) \cdot (3 - 4\beta + \beta^2)$$

Finalement

$$\mu_2(\alpha; \beta) = \begin{cases} \beta \cdot (1 - \alpha) + 0,25 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot (\beta^2 - 1) & \text{pour } 0 \leq \beta \leq \alpha \\ \alpha \cdot (1 - \beta) + 0,25 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot (\beta^2 - 1) & \text{pour } \alpha \leq \beta \leq 1 \\ \alpha \cdot 0,25 \cdot (2 - \beta) \cdot (3 - 4\beta + \beta^2) & \text{pour } 1 \leq \beta \leq 2 \end{cases}$$

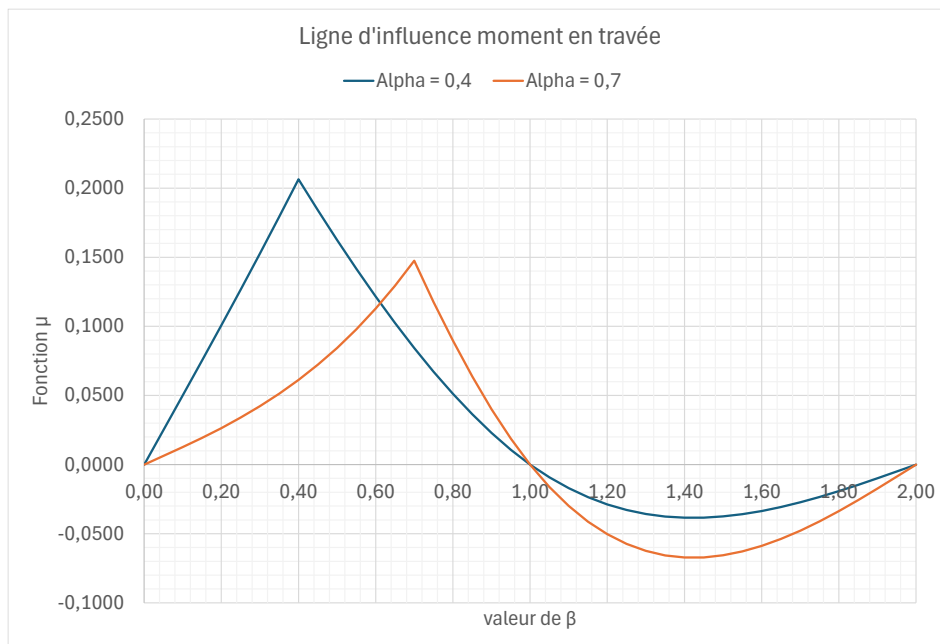


Figure 2. Ligne d'influence du moment dans la travée 1. Exemple pour deux valeurs de α

3/ Valeur de β correspondant au maximum du moment M

Le moment fléchissant dû à la charge ponctuelle Q est maximal au point d'application de la force Q , donc pour $\alpha = \beta$.

Ainsi, dans la travée 1,

$$M_{max} = Q \cdot L \cdot [\beta \cdot (1 - \beta) + 0,25 \cdot \beta^2 \cdot (\beta^2 - 1)]$$

Ce moment est tracé en vert ci-dessous.

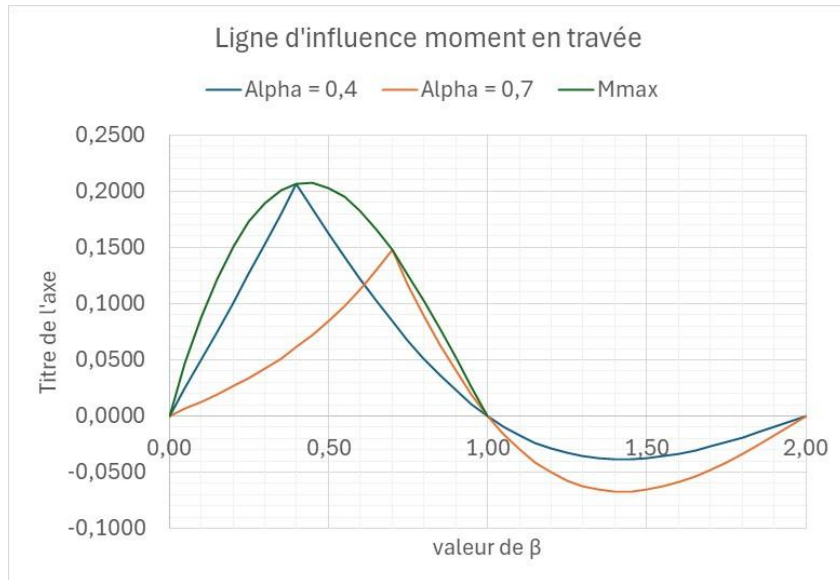


Figure 3. En vert, moment en travée lorsque la charge ponctuelle Q est appliquée dans la section étudiée (Moment maximal en travée)

Ce moment atteint sa valeur maximale pour β tel que

$$\frac{dM_{max}}{d\beta} = Q \cdot L \cdot [(1 - \beta) - \beta^2 + 0,5 \cdot \beta \cdot (\beta^2 - 1) + 0,5 \cdot \beta^3] = 0$$

$$\frac{dM_{max}}{d\beta} = 0 \Leftrightarrow 1 - \beta - \beta^2 + 0,5 \cdot \beta^3 - 0,5\beta + 0,5 \cdot \beta^3 = \beta^3 - \beta^2 - 1,5 \cdot \beta + 1 = 0$$

La seule racine possible de cette équation est 0,432 car β doit être compris entre 0 et 1 (effort dans la travée 1).

Partie 3. Conclusion

Finalement

- Le moment max sur l'appui central est atteint quand $\beta = 0,577$.
- Le moment max en travée est atteint quand $\beta = 0,432$.

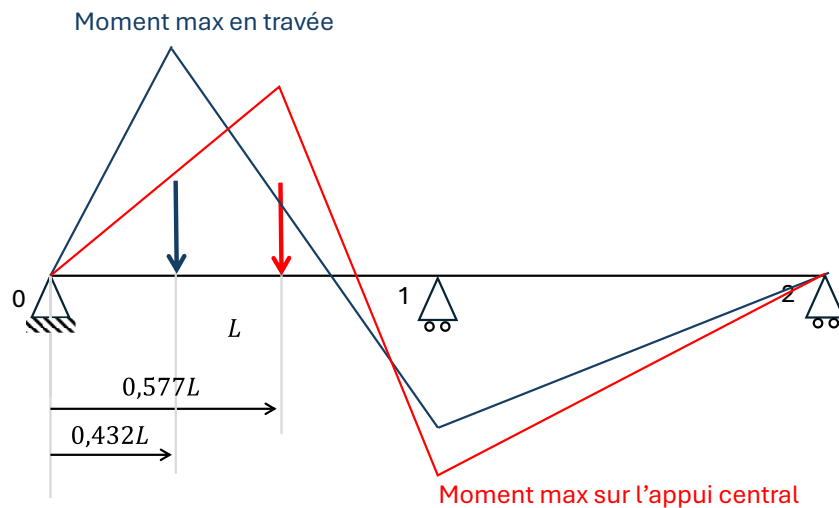


Figure 4. Cas donnant le moment maximal sur appui et le moment maximal en travée (Palacios, 2025)

Références Bibliographiques

Palacios, R. (2025) « Lignes d'influence d'une charge mobile sur une poutre sur 3 appuis - CTICM – Mai 2025 ». Disponible sur: <https://metaletech.com/2025/04/28/lignes-dinfluence-dune-charge-mobile-sur-une-poutre-sur-3-appuis/>.

Couverture : image générée par IA