Mathématiques

-

Suites et séries numériques

Frédéric Menan

fmenan@cesi.fr

12/2025

Table des matières

1 Suites

1.1 Suites de nombres : définition

Une suite de réels est une application de ℕ (ou d'une partie de ℕ) dans ℝ.

$$u\begin{pmatrix}\mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \to U_n\end{pmatrix}$$

On notera : $(U_0, U_1, \ldots\ldots, U_n, \ldots\ldots)$ ou plus simplement (U_n).

n est appelé indice ou rang du terme U_n.

1.2 Représentation graphique d'une suite

1.2.1.1 Suite définie par Un=f(n) : suite définie explicitement

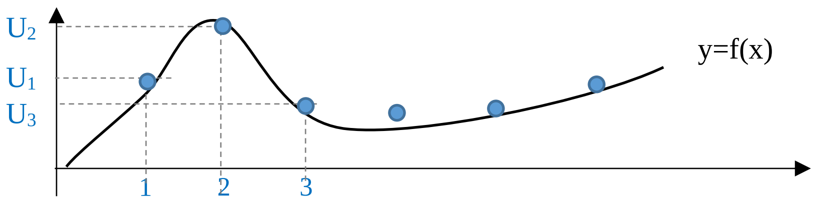


Figure 1. Représentation graphique d'une suite définie par Un=f(n)

1.2.1.2 Suite définie par U_{n+1}=f(Un) : suite récurrente

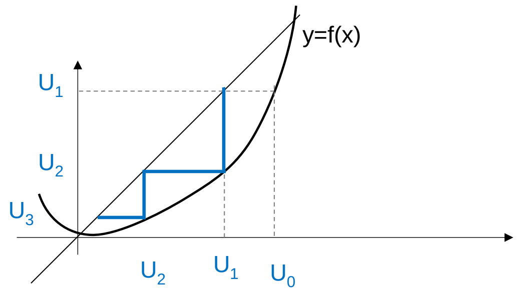


Figure 2. Représentation graphique d'une suite récurrente

1.3 Sens de variation d'une suite

1.3.1 Définitions

Soit (U_n) une suite réelle.

- (U_n) est croissante si et seulement si pour tout entier n, $U_n \leq U_{n+1}$
- (U_n) est strictement croissante si et seulement si pour tout entier n, $U_n < U_{n+1}$
- (U_n) est décroissante si et seulement si pour tout entier n, $U_n \geq U_{n+1}$
- (U_n) est strictement décroissante si et seulement si pour tout entier n, $U_n > U_{n+1}$
- (U_n) est dite monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante
- (U_n) est strictement monotone si et seulement si elle est strictement croissante ou strictement décroissante

1.3.2 Etude du sens de variation d'une suite

Soit (U_n) une suite réelle. Il existe plusieurs méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite :

Méthode 1 : On étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$ pour chaque entier n.

Méthode 2 : Si la suite (U_n) est strictement positive et définie par des produits, on peut comparer U_{n+1}/U_n à 1 pour tout entier n.

Exemple : $U_n \ = \ 2^n.n!$

Méthode 3 : Si la suite est définie explicitement, on peut étudier les variations de la fonction f. Si $U_n = f(n)$, alors :

- Si la fonction f est croissante alors la suite (U_n) est croissante.
- Si la fonction f est décroissante alors la suite (U_n) est décroissante.

Exemple

$U_n \ = \ 1/n$. La fonction f(x) = 1/x fonction décroissante donc (U_n) est décroissante.

Remarque

La réciproque de ce théorème est fausse ! La suite (U_n) peut être croissante sans que la fonction f le soit. Par exemple, la fonction f(x) = x/2 + sin(2πx)/2π. Sa dérivée est 1/2 + cos(2πx). La fonction f n'est pas monotone car sa dérivée est positive sur les intervalles]k-5/12 ; k+5/12[et <0 sur les intervalles]k+5/12 ; k+7/12[. Et pourtant, la suite Un = f(n) est strictement croissante car elle donne Un=n/2.

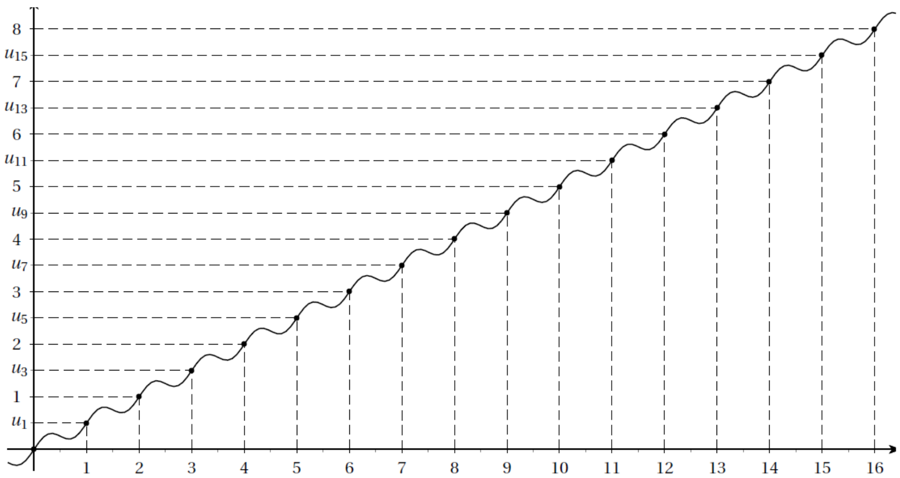


Figure 3. Suite croissante définie explicitement, sans que le fonction soit croissante [1]

1.3.3 Etude du sens de variation d'une suite récurrente

Soit (U_n) une suite définie par $U_{n+1} = f(U_n)$.

Le sens de variation de la suite et sa limite peuvent se déduire de la représentation graphique de la suite.

1.4 Suite majorée / minorée / bornée

Soit (U_n) une suite réelle.

- (U_n) est majorée ssi ∃ réel M tel que ∀ n ϵ ℕ, Un ≤ M
- (U_n) est minorée ssi ∃ réel m tel que ∀ n ϵ ℕ, m ≤ Un
- (U_n) est bornée ssi (Un) est minorée et majorée
- Une suite (U_n) est dite stationnaire si elle est constante à partir d'un certain indice.

1.5 Limite d'une suite

1.5.1 Définitions

Soit (U_n) une suite réelle.

(U_n) admet une limite finie réelle L signifie : $\forall$ ε > 0, $\exists$ n_0 de ℕ tel que $\forall$ n ≥ n_0, $|u_n - L| \leq \varepsilon$

(U_n) admet une limite L = +∞ signifie : $\forall$ A réel, $\exists$ n_0 de ℕ tel que $\forall$ n ≥ n_0, Un ≥ A

Dans tous les cas, on note : $L = \lim\limits_{n \to \infty} Un$.

Si la suite (U_n) admet une limite finie alors on dit qu'elle converge.

Si la suite (U_n) a une limite infinie ou n'a pas de limite, on dit qu'elle diverge.

<u>Exemple</u>

Soit la suite définie, pour n ϵ ℕ*, par

$$U_n = 2 + \frac{1}{n}$$

Alors

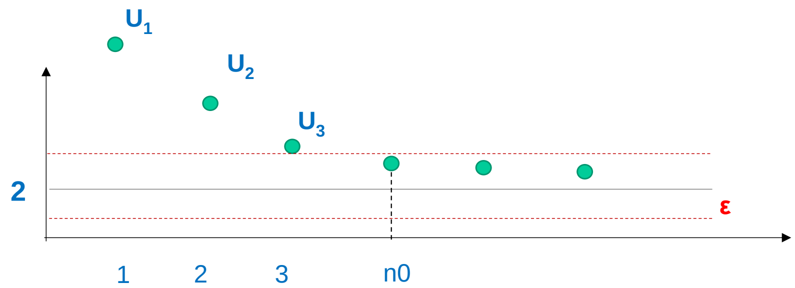
$$U_n - 2 = \frac{1}{n}$$

Soit ε>0 et réel. Pour que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$, il suffit que $\frac{1}{\varepsilon} \leq n$.

En choisissant $n_0 = E(1/\varepsilon) + 1$ on a $\forall$ n ≥ n_0, $0 \leq U_n - 2 \leq \varepsilon$.

Donc $\forall$ ε > 0, $\exists$ $n_0 = E(1/\varepsilon) + 1$ tel que $\forall$ n ≥ n_0, $|u_n - 2| \leq \varepsilon$, donc $\lim\limits_{n \to \infty} Un = 2$

Remarque : E(x) est la partie entière de x



1.5.2 Propositions (admises)

- Soit (U_n) une suite de n entiers réels et L un réel, alors lim (Un) = L ⇔ lim (Un-L)=0
- Soit (U_n) une suite de n entiers réels de limite L, alors cette limite est unique
- Toute suite (U_n) de réels convergente est bornée
- Soit (U_n) une suite de limite L, et L > 0, alors $\exists$ n_0 de ℕ tel que pour tout n ≥ n_0, $U_n > 0$
- Si une suite (U_n)à termes positifs converge vers L, alors L ≥ 0
- Si $lim\ (U_n) = L$, alors $lim\ |U_n| = |L|$
- Le produit d'une suite convergente vers 0 par une suite bornée est une suite de limite 0 ⇔ si Wn = Un.Vn avec lim Un=0 et Vn bornée, alors lim Wn=0
- Toute suite (U_n) croissante et majorée converge et lim (Un) = sup {Un | n ϵ ℕ }
- Toute suite (U_n) décroissante et minorée converge et lim (Un) = inf {Un | n ϵ ℕ }
- Toute suite (U_n) croissante et non majorée tend vers +∞
- Toute suite (U_n) décroissante et non minorée tend vers +∞

1.5.3 Suites de limite infinie

Définition

La suite (U_n) tend vers $+\infty$ si, $\forall$ A ϵ $\mathbb{R}$, $\exists\, n_0$ tel que $\forall\, n \geq n_0, U_n \geq A$

Théorème d'encadrement 1

Soient (U_n), (V_n) et (W_n) des suites telles que

1/ $lim\ (U_n) = L$ et $lim\ (V_n) = L$

2/ $\exists n_o \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $U_n \leq W_n \leq V_n$

Alors $lim\ (W_n) = L$

Théorème d'encadrement 2

Soient (U_n), (V_n) des suites telles que

1/ $lim\ (U_n) = +\infty$

2/ $\exists n_o \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, U_n \leq V_n$

Alors $lim\ (V_n) = +\infty$

1.5.4 Théorème du point fixe

Soit la fonction f définie et continue sur un intervalle I et à valeurs dans I. Soit (U_n) la suite définie par un réel U_0 de I et telle que pour tout entier n, $U_{n+1} = f(U_n)$. Soit L $\in$ I. Si (U_n) converge vers L, alors L est une solution de l'équation $f(x) = x$.

1.6 Suites adjacentes

1.6.1 Définition

Les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes si et seulement si l'une est décroissante, l'autre croissante et si $U_n - V_n$ tend vers 0.

1.6.2 Proposition

Deux suites adjacentes convergent vers une même limite L.

Remarque

Pour tout entier naturel n,

$$U_n \leq L \leq V_n \text{ ou } V_n \leq L \leq U_n$$

1.7 Suites arithmétiques

(U_n) est dite arithmétique si et seulement s'il existe un réel r tel que $\forall$ n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n + r$

(U_n) est une suite arithmétique si et seulement si la suite $(U_{n+1} - U_n)$ est constante.

- Expression de Un en fonction de n :

$$U_n = U_0 + n.r$$

$\forall\, n \geq p$:

$$U_n = U_p + (n - p).r$$

- Sommes de termes consécutifs

Pour p ≤ n

$$U_p + \cdots + U_n = (n-p+1).\frac{U_p + U_n}{2}$$

1.8 Suites géométriques

(V_n) est dite géométrique si et seulement s'il existe un réel q tel que ∀ n de ℕ, $V_{n+1} \ = \ q.V_n$

(V_n) est une suite géométrique si et seulement si la suite (V_{n+1}/V_n) est constante.

- Expression de V_n en fonction de n

$$V_n = q^n V_0$$
$$V_n = q^{n-p}.V_p$$

- Sommes de termes consécutifs (si q ≠ 1)

$$V_p + V_{p+1} + \cdots + V_n = V_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$
$$V_0 + V_1 + \cdots + V_n = V_0.\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

1.9 Suites arithmético-géométriques

Une suite arithmético-géométrique est de la forme

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = b.u_n + c \end{cases}$$

Avec a, b c constantes réelles.

1.10 Relations de comparaison

Ces relations doivent aider à déterminer la convergence de suites diverses en se rapportant, par relation de comparaison, à des suites connues.

1.10.1 Suite dominée par une autre

Une suite (Un) est dominée par une suite (Vn) si :

$$\exists\ A>0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} : \forall\ n \geq n_0,\ |Un| \leq A.|Vn|$$

On écrit alors (Un) = O(Vn).

<u>Exemple</u>

$U_n = 1$ et $V_n = n$. Pour A=1 et n_0=1, ∀ n ≥ n_0 |Un| ≤ A.|Vn|

<u>Proposition</u>

Si (Un) = O(Vn) et que lim (Vn)=0, alors lim(Un)=0

1.10.2 Suite négligeable devant une autre

Une suite (U_n) est négligeable devant (Vn) si :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} : \forall\ n \geq n_0,\ |Un| \leq \varepsilon.|Vn|$$

On écrit alors $(U_n) = o(V_n)$.

Exemple

$Un=1/n^3$ et $Vn=1/n$. (Un) = o(Vn)

1.10.3 Propositions

Soient (Un), (U'n) et (Wn) suites négligeables devant respectivement (Vn), (V'n) et (Vn), alors

- (Un)+(Wn)=o(Vn)
- $\forall\lambda\epsilon IR$, ($\lambda$Un)=o(Vn)
- (UnU'n)=o(VnV'n)
- Si (1/Un) et (1/Vn) sont définies, alors (1/Vn)=o(1/Un)
- Si (1/Vn) existe, alors (Un)=o(Vn) ⇔ lim(Un/Vn)=0

1.10.4 Suites équivalentes

Deux suites (Un) et (Vn) sont équivalentes ssi il existe une suite (φ_n) et un rang n tels que :

φ_n tend vers 1 quand $n\rightarrow+\infty$

$\forall n\geq N$, $Un = \varphi_n.Vn$

On écrit alors (Un) ~ (Vn)

On définit deux suites équivalentes de la sorte : (Un-Vn)=o(Vn)

Propositions

- Si Un=Vn+αn, avec αn=o(Vn) alors (Un) ~ (Vn)
- Si (Un) ~ (Vn) et que (U'n) ~ (V'n), alors (Un)(U'n) ~ (Vn)(V'n)
- Si (Un) ~ (Vn) alors (1/Un) ~ (1/Vn)
- Si (Un) ~ (Vn) et que (U'n) ~ (V'n), alors on n'a pas nécessairement (Un+U'n) ~ (Vn+V'n)
- Si (Un) ~ (Vn) alors lim(Un/Vn)=1
- Si lim(Un/Vn)=1 alors (Un) ~ (Vn)
- Si (Un) ~ (Vn) et que lim Un=L, alors lim Vn=L

Exemples

- $Un=1/n+1/n^2$; $Vn=1/n+1/n^3$; U'n=-1/n ; V'n=-1/n

(Un) ~ (Vn) et (U'n) ~ (V'n) mais (Un+U'n) ~ (Vn+V'n)

En effet, $Un+U'n=1/n^2$ et $Vn+V'n=1/n^3$

Lim (Un+U'n) / (Vn+V'n) ≠ 1 donc (Un+U'n) et (Vn+V'n) ne sont pas des suites équivalentes

- sin 1/n ~ 1/n
- tan 1/n ~ 1/n
- ln(1+1/n) ~ 1/n
- $a_0 + a_1.n + \ldots + a_p.n^p \sim a_p.n^p$ si $a_p \neq 0$

Exemple d'exploitation des suites équivalentes

Soit

$$Un = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n.\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$Un \sim \frac{\frac{1}{n}}{n.\frac{1}{n}}$$

$$Un \sim \frac{1}{n}$$

donc lim(Un)=0.

1.10.5 Comparaison de suites de référence

∀α réel,

Si 0<a<1, alors $a^n=o(n^\alpha)$

Si a>1, alors $n^\alpha=o(a^n)$

Si α>0, $(\ln n)^\beta=o(n^\alpha)$

Si α<0, $n^\alpha=o(\ln n)^\beta$

$a^n=o(n\,!)$

1.11 Suites complexes

1.11.1 Définition

Une suite complexe est une application

$$\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{C} \\ n \to z_n \end{cases}$$

1.11.2 Limite et convergence d'une suite complexe

Pour définir la convergence d'une suite complexe, on doit introduire la notion de voisinage. Soit z de ℂ. On dit que V de ℂ est un voisinage de z ssi il existe ε>0 tel que l'ensemble des complexes z' tels que $|z-z'| \leq \varepsilon$ soit inclus dans V.

On peut alors définir la limite d'une suite complexe. Soit Zn une suite complexe et l ϵ ℂ. On dit que l est la limite de Zn et on note $l = \lim_{n\to\infty} Zn$ ssi pour tout voisinage V de l, il existe un entier positif Nv tel que pour tout n≥Nv, Zn ϵ V

2 Séries numériques

2.1 Définitions

Soit (Un) une suite à termes réels ou complexes. On pose, pour n ϵ ℕ :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$$

La suite (Sn) est appelée série de terme général (Un). La série est notée ΣU_n.

Le terme S_n est appelé somme partielle de rang n.

On dit que la série ΣU_n est convergente (divergente) si et seulement si la suite (Sn) est convergente (divergente). Si ΣU_n converge, on pose

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

S est appelée somme de la série.

On pose, pour n entier naturel, $R_n = S - S_n$. R_n est appelé reste d'ordre n.

Exemple

ΣU_n avec

$$U_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

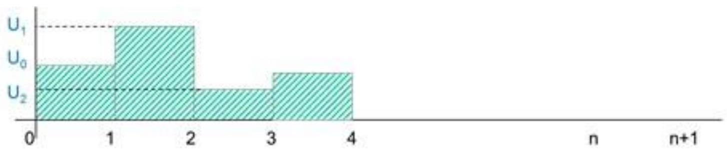
$$S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

On écrira :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

2.2 Interprétation géométrique



$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

S_n : aire de la surface hachurée

2.3 Propriétés des séries

Propriété

Si une série ΣU_n converge, alors $lim\ U_n = 0$

Démonstration

On a $U_n = S_n - S_{n-1}$. Si ΣU_n converge, alors $lim\ S_n = S$ et $lim\ S_{n-1} = S$ donc $lim\ U_n = Lim\ (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$

Remarque

La réciproque est fausse ! Si $lim\ U_n = 0$, on n'a pas forcément convergence de la série ΣU_n.

Exemple

La série harmonique Σ1/n vue auparavant.

Propriété

Si ΣU_n et ΣV_n sont deux séries convergentes alors pour tout réel λ, $\Sigma\ \lambda . U_n + V_n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda U_n + V_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} U_n + \sum_{n=0}^{\infty} V_n$$

Démonstration : admise

Propriété

Une suite (U_n) est convergente si et seulement si la série $\Sigma(U_{n+1} - U_n)$ est convergente

Démonstration

On pose $V_n = U_{n+1} - U_n$. Pour n entier, on calcule

$$S_n = \sum_{n=0}^{N} V_n = V_0 + \cdots + V_n = (U_1 - U_0) + (U_2 - U_1) + \cdots + (U_{n+1} - Un) = U_{n+1} - U_0$$

2.4 Séries géométriques

Elles sont de la forme $\sum U_n$ avec $U_n = z^n$ avec z complexe.

$$S_n = 1 + z + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Cas 1 : si z = 1, alors $S_n = n + 1$. La série Σz^n est divergente et

$$\lim_{n \to \infty} S_n = +\infty$$

Cas 2 : si $|z| < 1$, $|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \to 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$. Σz^n est convergente et

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1 - z}$$

Cas 3 : si $|z| > 1$, $|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \to +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} z^{n+1} = +\infty$, et Σz^n est divergente

Cas 4 : si $|z| = 1$ et $z \neq 1$, alors la série (z^n) n'a pas de limite et Σz^n est divergente

En effet en raisonnant par l'absurde, si

$$L = \lim_{n\to\infty} z^n = \lim_{n\to\infty} z^{n+1} = \lim_{n\to\infty} z.z^n = z. \lim_{n\to\infty} z^n = z.L$$

donc L.(1-z)=0. Or z≠1 donc L=0. Ceci est impossible car pour tout n, $|z^n| = 1 = |z|^n$

$|z^n|$ n'a pas de limite et Σz^n diverge.

En résumé, Σz^n est convergente si et seulement si $|z|<1$, et alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

2.5 La série harmonique : Σ1/n

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n.\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Si $lim\ S_n = S$ existe, alors $\lim S_{2n} - S_n = S - S = 0$. Ceci est impossible compte tenu du résultat précédent donc la série harmonique est divergente.

2.6 Etude des séries à termes réels positifs

2.6.1 Théorème de comparaison

Soient ΣU_n et ΣV_n deux séries à termes réels tels que pour tout n, $0 \leq U_n \leq V_n$, alors

Si la série ΣV_n est convergente alors la série ΣU_n l'est aussi et $\sum_{n=0}^{\infty} Un \leq \sum_{n=0}^{\infty} Vn$

Si la série ΣU_n est divergente alors la série ΣV_n l'est aussi

<u>Exemple</u>

$$\sum \frac{1}{1+2^n}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$0 \leq \frac{1}{1+2^n} \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\sum \frac{1}{1+2^n}$ est convergente car $\sum \frac{1}{2^n}$ est convergente.

De plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^n} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

2.6.2 Théorème

Soient ΣU_n et ΣV_n deux séries à termes positifs telles que (Un)~(Vn) si n→∞, alors ΣU_n et ΣV_n sont de même nature (càd convergente ou divergente).

2.6.3 Comparaison à une série géométrique

<u>Théorème</u>

Soient ΣU_n une série à termes strictement positifs, a un réel et $n_0 \in \mathbb{N}$. $\forall n \geq n_0$

Si

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq a < 1$$

Alors ΣU_n est convergente.

Si

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq a > 1$$

Alors ΣU_n est divergente.

Démonstration

On suppose pour $n \geq n_0$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq a < 1$$

Donc

$$U_{n+1} \leq a.U_n$$

$$U_{n_0+1} \leq a.U_{n_0}$$

$$U_{n_0+2} \leq a.U_{n_0+1} \leq a^2.U_{n_0}$$

Et pour tout $p \geq 1$

$$U_{n_0+p} \leq a^p.U_{n_0}$$

Soit $n \geq n_0 + 1$, on pose $p = n - n_0$, alors

$$0 < U_n \leq a^{n-n_0}.U_{n_0} = \frac{U_{n_0}}{a^{n_0}}.a^n = C.a^n$$

Avec C réel positif.

$\Sigma C.a^n$ est une série géométrique convergente car $a \in [0,1[$, donc ΣU_n convergente.

2.6.4 Comparaison d'une série à une intégrale

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$ à valeurs réelles positives, décroissante et telle que

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$$

Soit une série $\sum U_n$ de terme général (U_n) défini par la formule,

$$U_n = f(n)$$

Pour que la série converge, il faut et il suffit que l'intégrale de f sur $[0,+\infty[$ soit convergente.

Démonstration

Si f est décroissante, alors pour tout entier naturel n et pour tout point t de $[n, n+1]$ on a

$$U_{n+1} \leq f(t) \leq U_n$$

Passons à l'intégrale

$$\int_n^{n+1} U_{n+1}dt \leq \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \int_n^{n+1} U_n dt$$

$$U_{n+1} \leq \int_{n}^{n+1} f(t)dt \leq U_n$$

Sur la figure ci-dessous, les termes U_{n+1} et U_n sont représentés respectivement par les aires des rectangles MNPQ et MNP'Q'. L'aire du trapèze curviligne MNPQ', égale l'intégrale de $f(t)$ entre n et n+1, est encadrée par les aires de ces deux rectangles.

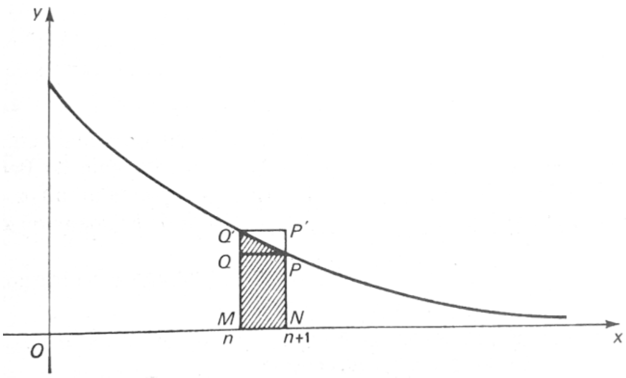


Figure 4. Comparaison d'une série à une intégrale [2]

On a donc

$$S_{n+1} - U_0 \leq \int_{0}^{n+1} f(t)dt \leq S_n$$

Si la série $\sum U_n$ converge, S_n est majorée et l'intégrale est convergente.

Si l'intégrale est convergente, S_{n+1} est majorée et la série $\sum U_n$ est convergente.

<u>Remarque</u>

Le théorème précédent s'étend aussitôt au cas où la fonction f est définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ où $a \geq 0$

2.6.5 Règle de Cauchy

Soit (U_n) une suite de nombres réels positifs telle que $\sqrt[n]{U_n}$ admette une limite k.

Si $k < 1$, ΣU_n converge.

Si $k > 1$, ΣU_n diverge.

<u>Démonstration</u>

Soit $k < 1$ et $k < r < 1$. Il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $\sqrt[n]{U_n} \leq r$.

Par conséquent, la suite (U_n) est dominée par (r^n) et comme $r < 1$, la série géométrique de terme général (r^n) converge, donc la série $\sum(U_n)$ converge.

Soit $k > 1$. Il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $U_n > 1$, donc $lim\, U_n \neq 0$ et la série $\sum(U_n)$ diverge.

<u>Remarque</u>

Si $k = 1$, on ne peut pas directement conclure.

2.6.6 Séries de Riemann

Les séries de Riemann sont de la forme

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Une série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha}}$ converge si et seulement si α > 1. Sinon elle diverge.

Démonstration

Soit la série $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$.

Si $\alpha \leq 0$, le terme $\frac{1}{n^{\alpha}}$ ne tend pas vers 0 donc la série diverge.

Si $\alpha > 0$, il suffit de comparer à l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ avec $f(t) = \frac{1}{t^{\alpha}}$.

$$\int_1^X \frac{1}{t^{\alpha}}.dt = \left[\frac{1}{-\alpha+1}.t^{-\alpha+1}\right]_1^X = \frac{1}{1-\alpha}.(X^{1-\alpha}-1)$$

Si $\alpha > 1$, $\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}.(X^{1-\alpha}-1) = \frac{-1}{1-\alpha}$. L'intégrale converge donc la série converge.

Si $\alpha < 1$, $\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha}.(X^{1-\alpha}-1) = +\infty$. L'intégrale diverge donc la série diverge.

Si $\alpha = 1$ on retrouve la série harmonique, dont on sait qu'elle diverge.

2.6.7 Règle de d'Alembert

Soit ΣU_n une série à termes strictement positifs telle que la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

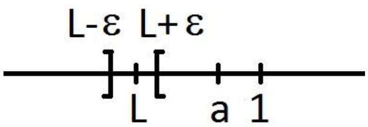
existe et soit égale à L réel positif, alors :

Si L < 1, ΣU_n converge

Si L > 1, ΣU_n diverge

Démonstration

- 1er cas : L<1



Soit a ϵ]L ; 1[

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 :\ \forall\, n\ \geq\ n_0, L-\varepsilon < \frac{U_{n+1}}{U_n} < L+\varepsilon$$

On prend ε tel que $L+\varepsilon < a$, alors n ≥ n_0 implique $\frac{U_{n+1}}{U_n} < a < 1$

$\sum U_n$ converge

- 2ème cas : L>1

Soit a ϵ]1 ; L[

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 :\ \forall\, n\ \geq\ n0, L-\varepsilon\ <\ \frac{U_{n+1}}{U_n}\ <\ L+\varepsilon$$

On prend ε tel que $L-\varepsilon\ >\ a$, alors $n\ \geq\ n_0$ implique $U_{n+1}/U_n\ >\ a$

$\sum U_n$ diverge

Remarque

La règle de d'Alembert est bien utile pour déterminer la convergence d'une série dont le terme général comporte des factorielles, car elles se simplifient dans le calcul de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

2.7 Séries absolument convergentes

Définition

Une série réelle ou complexe ΣU_n est absolument convergente si et seulement si $\Sigma \left| U_n \right|$ est convergente.

Exemple

$\sum e^{i\theta}.\frac{1}{n^2}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. $\left|e^{i\theta}.\frac{1}{n^2}\right| = \left|\frac{1}{n^2}\right|$ donc $\sum e^{i\theta}.\frac{1}{n^2}$ est absolument convergente.

Théorème

Toute série absolument convergente est convergente et on a

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} U_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |U_n|$$

Démonstration

Si U_n réel, on pose

- $U_n^+ = U_n$ si $U_n > 0$ et 0 si $U_n \leq 0$
- $U_n^- = 0$ si $U_n > 0$ et –Un si $U_n \leq 0$

Par construction, pour tout entier naturel n, $U_n = U_n^+ - U_n^-$ et $|U_n| = U_n^+ + U_n^-$

Donc $0 \leq U_n^+ \leq \left| U_n \right|$ et $0 \leq U_n^- \leq \left| U_n \right|$

Si ΣU_n est absolument convergente, par théorème de comparaison, ΣU_n^+ et ΣU_n^- sont convergentes donc $\Sigma U_n = \Sigma U_n^+ - \Sigma U_n^-$ converge.

Si U_n complexe, on pose $U_n = V_n + i.W_n$ et on suppose que $\Sigma \left| U_n \right|$ est convergente.

$\left| U_n \right| = \sqrt{{V_n}^2 + {W_n}^2}$ donc $\left| V_n \right| \leq \left| U_n \right|$ et $\left| W_n \right| \leq \left| U_n \right|$

$\sum V_n$ et $\sum W_n$ sont donc absolument convergentes par théorème de comparaison.

(V_n) et (W_n) sont des suites réelles donc $\sum V_n$ et $\sum W_n$ sont convergentes, donc $\sum V_n + i.W_n$ converge.

Remarque

La réciproque du théorème est fausse : une série peut être convergente sans être absolument convergente (exemple : la série harmonique alternée $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$)

2.8 Séries alternées

2.8.1 Définition

Une série alternée est une série dont les termes sont réels et alternativement positifs et négatifs.

On peut donc l'écrire sous la forme ci-dessous, avec Un ≥ 0 pour tout n

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}.U_n$$

2.8.2 Proposition

Une série est alternée si et seulement si pour tout n, Un est réel et $U_{n+1}.U_n \leq 0$

Démonstration : admise

2.8.3 Théorème spécial de convergence des séries alternées (TSCSA)

Soit ΣUn une série alternée et on pose pour tout n, Vn=│Un│. On suppose que (Vn) est décroissante et tend vers 0, alors ΣUn est convergente et on peut encadrer la somme $S = \sum_{k=0}^{\infty} Uk$ par deux sommes partielles et S est du signe du premier terme

Démonstration

On suppose que Un = $(-1)^n$.Vn avec Vn=│Un│

Pour tout n, on pose Sn = $\sum_{k=0}^{n} Uk$.

On étudie les suites extraites S_{2p} et S_{2p+1}. On va montrer que S_{2p} et S_{2p+1} sont adjacentes

$S_{2p+2} - S_{2p} = U_{2p+2} + U_{2p+1} = V_{2p+2} - V_{2p+1} \leq 0$ car (Vn) décroissante

$S_{2p+1} - S_{2p-1} = U_{2p+1} + U_{2p} = V_{2p} - V_{2p+1} \geq 0$ donc (S_{2p+1}) croissante

$S_{2p+2} - S_{2p+1} = U_{2p+2} = V_{2p+2} = \longrightarrow 0$ quand p tend vers infini

On a donc bien deux suites adjacentes (rappel : deux suites (Un) et (Vn) sont adjacentes ssi l'une est décroissante et l'autre croissante et leur différence tend vers 0).

Donc d'après les propriétés des suites adjacentes, S_{2p} et S_{2p+1} sont convergentes et ont même limite S, donc S = lim Sn donc ΣUn converge

S est encadrée par deux sommes partielles consécutives :

Pour Un=$(-1)^n$.Vn, $S_{2p+1} \leq S \leq S_{2p}$

Pour Un=$(-1)^{n+1}$.Vn, $S_{2p} \leq S \leq S_{2p+1}$

S = lim Sn = lim S_{2p+1} = lim (Uo + U1 + ... + U_{2p+1}

Si Un = $(-1)^n$.Vn, alors S est du signe de $U_0 \geq 0$

Si Un = $(-1)^{n+1}$.Vn, alors S est du signe de $U_0 \leq 0$

2.8.4 La série harmonique alternée

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

C'est une variante de la série harmonique Σ1/n. La série harmonique Σ1/n ne converge pas mais l'alternance des signes fait que cette série converge.

2.9 Opérations sur les séries

Soit la série $\sum U_n$, à termes réels ou complexes. Si $\sum U_n$ converge, alors la série de terme général $\lambda.U_n$ converge quel que soit λ et on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda U_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} U_n$$

Si les séries de termes généraux (U_n) et (V_n) convergent, alors la série de terme général $(U_n + V_n)$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n + \sum_{n=0}^{\infty} U_n = \sum_{n=0}^{\infty} V_n + U_n$$

3 Suites et séries de fonctions

On considère toujours une suite, mais les termes de cette suite sont des fonctions :

$$\begin{cases} x \text{ réel ou complexe} \\ x \to f_n(x) \text{ avec } n \in IN \end{cases}$$

Les suites et séries de fonctions vont nous servir pour étudier les séries entières car les séries entières sont un type particulier de séries de fonctions

4 Exercices

4.1.1.1 Exercice

Soit (Vn) une suite géométrique de raison q. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n

$$V_0 + V_1 + \cdots + V_n = V_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Correction

Soit (Vn) une suite géométrique de raison q. Montrer pour tout n de IN

$$V_0 + V_1 + \cdots + V_n = V_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Etape 1 : montrer qu'elle est vraie au rang 0

$$V_0 = V_0 . \frac{1-q^{0+1}}{1-q} = V_0$$

Etape 2 : on suppose la proposition vraie au rang n, montrons alors qu'elle est vraie au rang n+1

On admet que

$$V_0 + V_1 + \cdots + V_n = V_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Alors

$$V_0 + V_1 + \cdots + V_{n+1} = V_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + V_{n+1} = V_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + V_0 . q^{n+1}$$

$$V_0 + V_1 + \cdots + V_{n+1} = V_0 . \frac{1-q^{n+1} + (1-q). q^{n+1}}{1-q} = V_0 . \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1-q}$$

4.1.1.2 Exercice : suite géométrique

Déterminer le premier terme V_0 et la raison q de la suite géométrique définie par, pour tout entier naturel n,

$$Vn = 2^{n-3} . 3^{n+2}$$

Correction

Déterminer le premier terme V_0 et la raison q de la suite géométrique définie par, pour tout entier naturel n,

$$Vn = 2^{n-3} . 3^{n+2}$$

$$Vn = 2^{-3} . 3^2 . 2^n . 3^n = \frac{3^2}{2^3} . 6^n = \frac{9}{8} . 6^n$$

$$V_0 = \frac{9}{8}$$

$$q = 6$$

4.1.1.3 Exercice

Extrait du livre « Une révolution de la théorie des nombres. Gauss » 2018. « Par un matin de 1786, Büttner demanda à ses élèves de faire la somme des nombres entiers de 1 à 100. Toute la classe étant susceptible d'effectuer ce calcul, Büttner pensait qu'il allait pouvoir se reposer un bon moment pendant que les enfants s'acquitteraient de cette tâche laborieuse, additionnant les nombres un à un. L'exercice était aussi simple qu'ennuyeux. Un coup classique de la part d'un professeur expérimenté qui souhaite s'accorder une petite pause. Seulement voilà. Au bout de quelques secondes, Gauss, alors âgé de neuf ans, venait déjà remettre son ardoise à Büttner en s'exclamant : « Ligget se ! » (« ça y est » en bas allemand). [...] D'un air mécontent, il regarda l'ardoise, où, à sa grande surprise, sans la moindre trace de calcul préalable, s'affichait la réponse exacte........ »

Quelle est la réponse exacte ?

Figure 5. Johann Friedrich Carl Gauss (1777-1855). Wikipedia

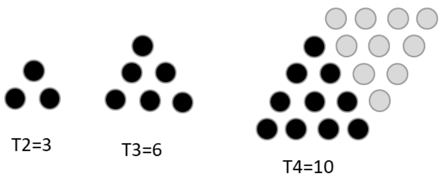
Correction

En additionnant le 1er et le dernier nombre, on obtient 1+100=101. On obtient le même résultat si on additionne le second et l'avant dernier : 2+99. Puisqu'il y a 100 éléments, le nombre de couples est de 50. Ainsi

$$S_{100} = \sum_{i=1}^{100} i = 50 * (100 + 1) = 5050$$

Hypothèse de du Sautoy (2003) : Gauss aurait pu résoudre ça par sa connaissance des nombres triangulaires (notion introduite par Pythagore). Nombre triangulaire : nombre naturel dont les unités peuvent former un triangle équilatéral. On retrouve la somme des termes d'une suite arithmétique

$$U_1 + \cdots + U_n = n.\frac{U_1 + U_n}{2}$$



$$2T_n = n.(n + 1)$$

4.1.1.4 Exercice : le nombre d'or

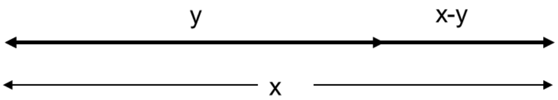
www.canal-u.tv/video/fermat_science/fibonacci_un_mathematicien_voyageur.26367 (3min)

Le nombre d'or φ est un nombre irrationnel présent naturellement ou introduit volontairement dans de nombreux domaines : biologie, architecture, fractales, science des matériaux, démographie, photographie......

Le théatre d'Epidaure Grèce, IV° siècle av JC. 55 gradins sont répartis en une partie de 34 et une partie de 21. humanistementvotre.jimdo.com

Point d'intérêt de la photo (cheval blanc) placé volontairement au centre de la « section d'or »

Soit un segment partagé en deux parties x et y.



On dit que le segment est partagé selon la section d'or si on a :

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x-y}$$

Avec $\frac{x}{y} = \varphi$

1. Montrer que φ est alors solution positive d'une équation du second degré et calculer sa valeur
On nommera φ' la solution négative.

2. Vérifier que φ' = -1/φ

Soit la suite (Un) telle que $U_o = 0$, $U_1 = 1$, et pour tout entier n>0

$$U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$$

Cette suite est appelée suite de Fibonacci (Leonardo Fibonacci, mathématicien italien du XII° siècle)

3. Calculer les 10 premiers termes de la suite
4. On suppose qu'on peut écrire les termes Un de la sorte : $U_n = \alpha.\varphi^n + \beta.\varphi'^n$. Déterminer la valeur des coefficients α et β et en déduire l'expression de Un en fonction de φ
5. Vers quelle valeur tend la suite (Un) quand n tend vers +∞
6. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$

Correction

1/ Montrer que φ est solution positive d'une équation du second degré et calculer sa valeur. On nomme φ' la solution négative.

$$x^2 - xy = y^2$$

donc

$$(x/y)^2 - x/y - 1 = 0$$

Discriminant Δ=5

Donc

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

2/ Vérifier que φ' = -1/φ

On montre aisément que

φ'. φ = -1

3/ Calculer les 10 premiers termes de la suite

1;1;2;3;5;8;13;21;34;55;89

4/Avec U0 on a $\alpha + \beta = 0$

Pour U1 : $\alpha.\varphi + \beta.\varphi' = \alpha.\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta.\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$ donc $\alpha.(1+\sqrt{5}) - \alpha.(1-\sqrt{5}) = 2$ donc α=1/√5 et β=-1/√5

5/ Vers quelle valeur tend la suite (Un) quand n tend vers +∞

$$Un = \frac{1}{\sqrt{5}}.\varphi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}.\varphi'^n = \frac{1}{\sqrt{5}}.\varphi^n + \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{1}{\varphi^n}$$

Donc

$Un = \frac{1}{\sqrt{5}}.\varphi^n$ quand n tend vers l'infini

6/ En déduire $\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \varphi$$

4.1.1.5 Exercice : la traque d'une planète, Gauss, et la méthode des moindres carrés

Exercice inspiré d'un texte du livre [3].

A tout juste vingt-cinq ans, Gauss réussit à déterminer l'orbite de Cérès à l'aide seulement de quelques données et de ses connaissances en mathématiques. Ce haut fait lui valut une brillante réputation dans toute l'Europe.

Le vide entre Mars et Jupiter attirait particulièrement l'attention. Les astronomes s'étaient toujours étonnés qu'il y eut une si grande distance entre ces deux planètes. Mais ils avaient beau scruter cette région, ils n'y avaient jamais rien découvert.

Or le 1er janvier 1801, Piazzi annonça avoir aperçu un objet sidéral qui se déplaçait sur la voûte céleste et semblait tourner autour du soleil, dans la région entre Mars et Jupiter. Piazzi décida d'appeler sa planète Cérès. Piazzi avait passé des nuits entières collé à son objectif. Malheureusement, dans la nuit du 11 février, il fut pris d'une grippe si violente qu'il dut rester alité et ne put travailler pendant plusieurs nuits de suite. Quand enfin il se fut remis et qu'il retourna à son télescope, Cérès n'était plus là. Les observations ne s'étalaient que sur 42 jours, période trop courte pour pouvoir déterminer la trajectoire de Cérès.

Le baron Von Zach se rappela qu'à Brunswick vivait un mathématicien de 24 ans qui selon les dires étudiait non seulement les mathématiques mais les réinventait. Le baron rassembla toutes les informations dont il disposait et les fit parvenir au jeune Gauss.

Gauss ne pose aucune hypothèse de départ, il se contenta d'exploiter les chiffres qu'on lui avait fournis.

Dans l'équipe d'astronomes, le moral était au plus bas. Gauss n'était qu'un mathématicien, il n'avait jamais touché à un télescope de sa vie. Von Zach se résolut enfin à suivre les indications que lui avait fait parvenir le jeune mathématicien. Et, la nuit du 7 décembre 1801, les télescopes de Lilienthal détectèrent un petit point légèrement brillant qui émergeait de l'obscurité, tout près de l'emplacement que Gauss avait déterminé par ses calculs.

Une explosion de joie accueillit cette nouvelle. A partir de rien, Gauss avait accompli ce qu'il est bien convenu d'appeler des merveilles.

Pour parvenir à ce résultat, Gauss eut recours à la méthode dite des moindres carrés, l'une des contributions les plus importantes de sa carrière au domaine des mathématiques.

La méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés développée par Gauss s'inscrit dans le domaine de l'optimisation en mathématiques. Elle a pour but de donner la fonction qui s'ajuste le mieux aux données expérimentales.

Etant donnée une relation entre deux variables qui fait que l'une soit dépendante de l'autre, cette relation est définie par une fonction f de sorte que $f(t_i) = y_i$. Le but est de trouver cette fonction.

Dans le cas de Cérès, on suppose que la variable indépendante est la situation dans le temps, tandis que la variable dépendante est la position dans l'espace.

Soient les paires de données (t_1, y_1), (t_2, y_2), (t_3, y_3) chacune indiquant une situation dans le temps et une position dans l'espace. Déterminer la trajectoire de la planète revient à trouver une fonction $\hat{y}_i = f(t_i)$. Il faut minimiser la différence entre la position réelle du corps céleste, y_i, et sa position estimée $\hat{y}_i$. L'écart entre ces deux valeurs se nomme erreur $e_i = y_i - f(t_i)$.

Pour éviter que les erreurs par excès annulent les erreurs par défaut, on élève les erreurs au carré

$$S_{CR} = \sum_{i=1}^{n} {e_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(t_i))^2$$

S_{CR} : somme des carrés des résidus

La régression linéaire

On dispose de n observations (x_i, y_i) qui associent les valeurs de ces deux variables. Comme il existe des raisons de supposer que l'ajustement est linéaire, la relation qui s'établit entre les variables est une droite :

$$f(x_i) = b_1 + b_2.x_i$$

On réduit les erreurs au minimum, avec $e_i = y_i - (b_1 + b_2.x_i)$. On a alors

$$S_{CR} = \sum_{i=1}^{n} {e_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (b_1 + b_2.x_i)\big)^2$$

Questions

L'objectif est de déterminer b_1 et b_2 qui minimisent S_{CR}.

On rappelle que si a est un extremum local d'une fonction g continue en a, alors en a, g'(a)=0

1/ Montrer que l'on a le système suivant

$$\begin{cases} -2.\sum_{i=1}^{n}\big(y_i-(b_1+b_2.x_i)\big)=0 \\ -2.\sum_{i=1}^{n}(y_i.x_i-(b_1+b_2.x_i).x_i)=0 \end{cases}$$

On définit

$\alpha=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i.x_i$; $\beta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2$; $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$; $\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$

2/ Montrer que le système d'équations de la question 1 devient

$$\begin{cases} \bar{y}=b_1+b_2.\bar{x} \\ \alpha=b_1.\bar{x}+b_2.\beta \end{cases}$$

Si on multiplie par $\bar{x}$ les deux membres de la première équation :

$$\begin{cases} \bar{y}.\bar{x}=(b_1+b_2.\bar{x}).\bar{x} \\ \alpha=b_1.\bar{x}+b_2.\beta \end{cases}$$

puis si l'on soustrait les expressions on obtient :

$$\alpha-\bar{y}.\bar{x}=b_2.(\beta-\bar{x}^2)$$

3/ En déduire les expressions de b_1 et b_2 en fonction de α, β, $\bar{x}$ et $\bar{y}$

Correction

1/ Dériver partiellement Scr par-rapport aux variables b1 et b2

$$S_{CR}=\sum_{i=1}^{n}{e_i}^2=\sum_{i=1}^{n}\big(y_i-(b_1+b_2.x_i)\big)^2$$

Rappel : dérivée de $u^n = n.u'.u^{n-1}$

$$\frac{\partial S_{CR}}{\partial b_1}=\sum_{i=1}^{n}-2.\big(y_i-(b_1+b_2.x_i)\big)=-2.\sum_{i=1}^{n}\big(y_i-(b_1+b_2.x_i)\big)$$

$$\frac{\partial S_{CR}}{\partial b_2}=\sum_{i=1}^{n}2.\big(y_i-(b_1+b_2.x_i)\big)(-x_i)=-2\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i-(b_1+b_2.x_i)x_i)$$

Si b1 et b2 minimisent Scr alors

$$\frac{\partial S_{CR}}{\partial b_1}=0$$

$$\frac{\partial S_{CR}}{\partial b_2}=0$$

Donc

$$\begin{cases} -2.\sum_{i=1}^{n}\big(y_i - (b_1 + b_2.x_i)\big) = 0 \\ -2.\sum_{i=1}^{n}(y_i.x_i - (b_1 + b_2.x_i).x_i) = 0 \end{cases}$$

2/ Réagencement des termes et division par n

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i) = \sum_{i=1}^{n}\big((b_1 + b_2.x_i)\big) = \sum_{i=1}^{n}\big((b_1)\big) + \sum_{i=1}^{n}\big((b_2.x_i)\big)$$

On divise par n

$$\bar{y} = b_1 + b_2.\bar{x}$$

Idem pour l'autre équation

$$\begin{cases} \bar{y} = b_1 + b_2.\bar{x} \\ \alpha = b_1.\bar{x} + b_2.\beta \end{cases}$$

3/ En déduire les expressions de b_1 et b_2 en fonction de a_{11}, a_{20}, $\bar{x}$ et $\bar{y}$

$$\alpha - \bar{y}.\bar{x} = b_2.(\beta - \bar{x}^2)$$

donc

$$b_2 = \frac{\alpha - \bar{y}.\bar{x}}{\beta - \bar{x}^2}$$

$$b_1 = \bar{y} - b_2.\bar{x}$$

4.1.1.6 Exercice

Soit la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 9 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}.u_n \end{cases}$$

Déterminer l'expression explicite de la suite (u_n)

Correction

$$r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$r_1 = \frac{1}{2}$$

On peut aller écrire u_n sous la forme

$$u_n = \lambda.\left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu.n.\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$u_0 = 1$ donc $\lambda = 1$

$u_1 = 9$ donc $\mu = 17$

Finalement

$$u_n = \lambda.\left(\frac{1}{2}\right)^n + 17n.\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

4.1.1.7 Exercice

Soit la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}.u_n \end{cases}$$

Déterminer l'expression explicite de la suite (u_n)

Exercice

Exemples :

1. $U_{n+2} = \frac{3}{2} U_{n+1} - \frac{1}{2} U_n$ $\qquad U_0 = -1$, $U_1 = 1$

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Delta = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$$

$$r^2 = \frac{3}{2} r - \frac{1}{2}$$

$$r_1 = \frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{2} = 1 \qquad r_2 = \frac{1}{2}$$

$$U_n = \lambda (1)^n + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\boxed{U_n = \lambda + \frac{\mu}{2^n}}$$

en utilisant U_0 et U_1

$$\begin{cases} \lambda + \mu = -1 \\ \lambda + \frac{1}{2}\mu = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = -4 \end{cases}$$

$$U_n = 3 - \frac{4}{2^n} = 3 - \frac{1}{2^{n-2}}$$

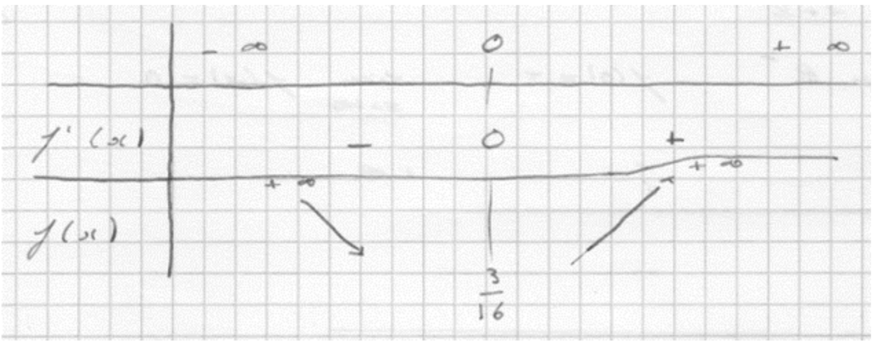
4.1.1.8 *Exercice : suite définie par une relation de récurrence*

Etudier la suite (Un) définie par $U_0=1/2$ et pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = U_n^2 + 3/16$$

Correction

$$f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$$



Le tableau de variations montre que

$$f\left(\left[0;\frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0;\frac{1}{2}\right]$$

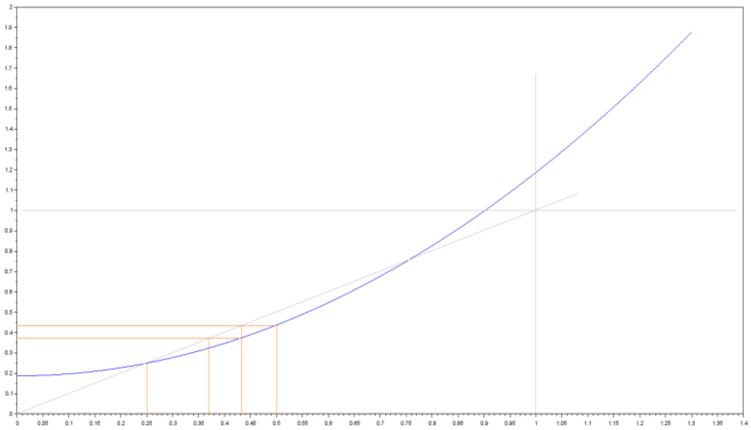
Si U0=1/2, alors tous les termes de la suite sont dans $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

(Un) est décroissante et elle est minoré donc elle converge vers L tel que $f(L) = L$.

$$L^2 - L - \frac{3}{16} = 0$$

On obtient

$$\lim(Un) = \frac{1}{4}$$



4.1.1.9 *Exercice : convergence et limite d'une suite*

Etudier la convergence et déterminer la limite éventuelle des suites :

$$\mathrm{Un} = \mathrm{n.cosn} + 2\mathrm{n}$$

$$\mathrm{Un} = \sqrt[n]{n}$$

$$\mathrm{Un} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$\mathrm{Un} = \sin(\mathrm{n}\pi - \frac{1}{n})$$

$\mathrm{Un} = \frac{a^n+b^n}{a^n-b^n}$ avec a et b deux réels strictement positifs

Correction

a) $\mathrm{Un} = \mathrm{n.cosn} + 2\mathrm{n}$

$$-1 \leq \mathrm{cosn} \leq 1$$

$$-\mathrm{n} \leq \mathrm{n.cosn} \leq \mathrm{n}$$

$$\mathrm{n} \leq \mathrm{n.cosn} + 2\mathrm{n} \leq 3\mathrm{n}$$

donc $\lim_{n\to\infty} n.cosn + 2n = +\infty$ donc la suite ne converge pas

b) $\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = e^{\frac{1}{n}.\ln(n)}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$$

$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln(n)}{n}} = 1$ donc Limite = 1

c) Un $= \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

$$Un = \frac{2n.(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)}{n!} = \frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{1*2*\dots*n} = \frac{n+1}{1}.\frac{n+2}{2}\dots.\frac{n+n-2}{n-2}.\frac{n+n}{n}$$

Un > n+1 donc lim Un = ∞

d) Un = sin(nπ - 1/n)

$\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ donc $\lim_{n\to\infty} \sin\left(n\pi - \frac{1}{n}\right) = \sin(n.\pi) = 0$

Cette suite converge vers 0

e) Un $= \frac{a^n+b^n}{a^n-b^n}$ avec a et b deux réels strictement positifs

$$u_n = \frac{2b^n - b^n + a^n}{a^n - b^n} = \frac{2b^n}{a^n - b^n} + 1 = \frac{2}{\frac{a^n}{b^n} - 1} + 1$$

Si 0 < a < b Alors lim Un = -1 et Si 0 < b < a Alors lim Un = 1

4.1.1.10 Exercice : convergence d'une suite

Soit (U_n) une suite réelle à termes positifs telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2u_n}{3u_n+1} = 0$$

Montrer que la suite (U_n) converge vers 0.

Réponse

Limite = 0 donc il existe un ε tel que $\left|\frac{2u_n}{3u_n+1}\right| \le \varepsilon$

$$|2u_n| \le |3u_n + 1|\varepsilon$$

$$|2u_n| \le |3\varepsilon u_n| + \varepsilon$$

$$|2u_n| - |3\varepsilon u_n| \le \varepsilon$$

Pour ε ≤ 1/3, on a donc $|u_n| \le |2 - 3\varepsilon|.|u_n| \le \varepsilon$, Donc la suite converge (U_n) vers 0

4.1.1.11 Exercice : la paroi de verre

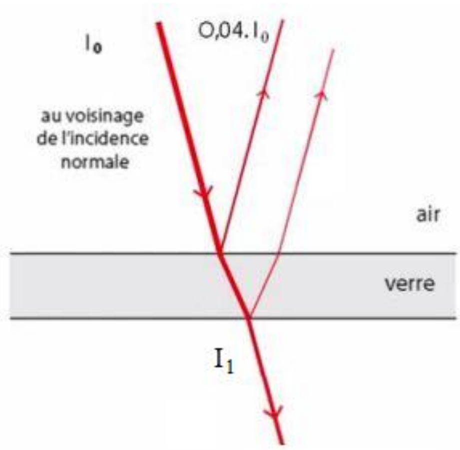
Exercice inspiré d'une vidéo Unisciel. https://www.youtube.com/watch?v=qqJdvHYCps8

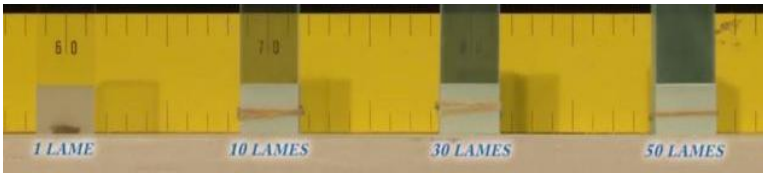
Lorsqu'un faisceau de lumière arrive sur la surface de séparation entre deux milieux transparents, une partie de la lumière subit une réflexion sur la surface et le reste est transmis.

Pour une lame de verre, le pourcentage de lumière réfléchie est de 4 % sur chacune des deux interfaces air-verre.

1. Soit I_1 l'intensité lumineuse transmise par une lame de verre. Montrer que $I_1 = 0.96^2.I_0$

2. En considérant une suite géométrique que vous expliciterez, calculer l'intensité lumineuse transmise après la traversée de 10 lames, de 30 lames et de 50 lames.





Correction

A chaque passage d'interface, I=0,96xintensité du faisceau. 2 passages donc $I_1 = 0.96^2.I_0$

Suite géométrique de raison $0,96^2$, 1er terme Io donc In=$(0,96^2)^n$.Io

Lames	Intensité
1	92,2%
10	44,2%
30	8,6%
50	1,7%

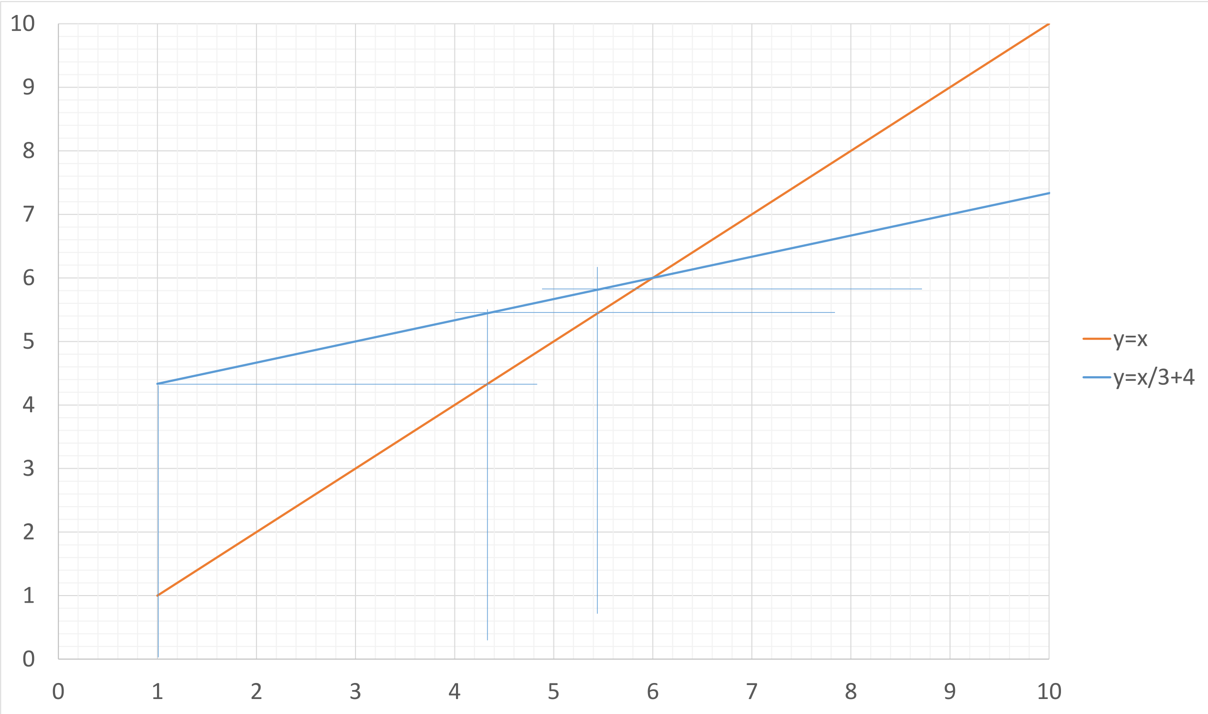
4.1.1.12 Exercice : étude graphique d'une suite arithmético-géométrique

Etudier par méthode graphique la convergence de la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}.u_n + 4 \end{cases}$$

Correction

La suite converge vers une limite L=6.



4.1.1.13 Exercice : flocon de Koch

Le flocon de Koch est une fractale (Helge von Koch 1904).

On peut le créer à partir d'un segment de droite, en modifiant récursivement chaque segment de droite de la façon suivante :

1. On divise le segment de droite en trois segments de longueurs égales.
2. On construit un triangle équilatéral ayant pour base le segment médian de la première étape.
3. On supprime le segment de droite qui était la base du triangle de la deuxième étape.

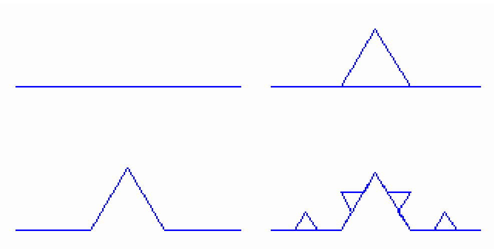
La courbe de Koch a une longueur infinie car à chaque fois qu'on applique les modifications sur chaque segment de droite, la longueur totale augmente. Mais la surface délimitée par la courbe est finie (car elle est contenue dans le demi-cercle dont le diamètre est le segment initial).

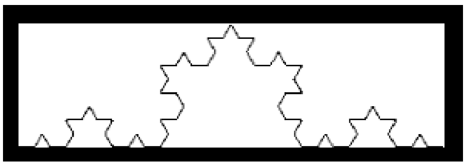
Si on a choisi l'unité d'aire de telle sorte que le triangle construit à la première itération soit d'aire 1, alors l'aire de chacun des quatre triangles construits lors de la seconde itération est 1/9.

Questions

1/ Montrer que pour l'itération n, on a augmenté l'aire totale de $\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$ par-rapport à l'itération précédente.

2/ Vers quelle valeur converge la surface totale du flocon ?





https://fr.wikipedia.org/wiki/Flocon_de_Koch

Correction

Si on a choisi l'unité d'aire de telle sorte que le triangle construit à la première itération soit d'aire 1, alors l'aire de chacun des quatre triangles construits lors de la seconde itération est 1/9 : on a donc augmenté l'aire totale de 4 /9.

Itération 1

$$A = 1 = \left(\frac{4}{9}\right)^{1-1}$$

Itération 2

$$A = 1 + \frac{4}{9} = 1 + \left(\frac{4}{9}\right)^{2-1}$$

Itération 3

On ajoute 4 triangles à chacun des 4 triangles et ces triangles ont comme aire 1/9*1/9

$$A = 1 + \frac{4}{9} + 4.4.\frac{1}{9}.\frac{1}{9} = 1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^{3-1}$$

La surface totale s'obtient finalement avec une série géométrique :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{n} = \frac{1-(4/9)^{n+1}}{1-4/9} = \frac{1}{1-4/9} = \frac{9}{5}$$

Somme des termes d'une suite géométrique de 1er terme 1 et de raison 4/9

4.1.1.14 Exercice : somme d'une série

En remarquant que

$$\frac{1}{k^2-1}$$

peut s'écrire en fonction de $\frac{1}{k-1}$ et $\frac{1}{k+1}$, calculer la somme de la série suivante

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}$$

Correction

En écrivant

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$$

On montre que a=1/2 et b=-1/2

Donc

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}.\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}.\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\right)$$

Tous les termes vont s'annuler deux à deux et il reste seulement 1 et 1/2

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}.\frac{3}{2} = 3/4$$

4.1.1.15 Exercice : somme d'une série

Calculer la somme de la série suivante

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$$

Correction

Calculer la somme de la série suivante

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$$

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

4.1.1.16 Exercice : somme d'une série

Calculer la somme de la série suivante

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Correction

On peut écrire

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

$$a = \frac{1}{2}; b = -1; c = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+2}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \left(-1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\right)$$

On voit que les $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ s'annulent, il reste $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$$

4.1.1.17 Exercice : série de fonctions

Etudier la convergence de la série de fonctions Σf_n définie par

$$\begin{cases} f_1(x) = x \\ f_n(x) = x\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \; si\, n \geq 2 \end{cases}$$

Correction

La série converge vers la fonction f(x)=3/2.x.

4.1.1.18 Exercice

On montre que pour tout réel x,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

En déduire la somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Correction

On reconnait le DSE de la fonction exponentielle quand x=-1 donc

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$$

4.1.1.19 Exercice

Soit $x \in]-1;1[$. En considérant la somme de la série géométrique

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1}{1-x}$$

Calculer la somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{n}{2^n}$$

Correction

$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1}{1-x}$. Si on dérive cette expression

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + n.x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Si l'on remplace x par ½ dans cette expression (1/2 appartenant à l'intervalle de convergence), on obtient

$$1 + \frac{2}{2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}} = 4$$

En divisant cette expression par 2 :

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2$$

4.1.1.20 Exercice : étude des séries à termes réels positifs

Soit la série de terme général u_n tel que pour tout entier n, $u_n \geq 0$.

1/ Montrer que la suite s_n des sommes partielles est croissante

2/ Soient les séries A et B de terme général u_n et v_n positifs ou nuls, tels que $u_n \leq v_n$.

Montrer que si la série de terme B est convergente, alors la série A est également convergente.

Correction

Soit la série de terme général u_n tel que pour tout entier n, $u_n \geq 0$.

1/ Montrer que la suite s_n des sommes partielles est croissante

$$s_n = s_{n-1} + u_n \geq s_{n-1}$$

2/ Soient les séries A et B de terme général u_n et v_n positifs ou nuls, tels que $u_n \leq v_n$

Montrer que si la série de terme général v_n est convergente, alors la série de terme général u_n est également convergente.

Soient s_n et t_n les sommes partielles à l'ordre n des séries A et B. Si pour tout entier n, $u_n \leq v_n$, alors pour tout entier naturel n

$$s_n \leq t_n$$

Si t_n tend vers une limite t lorsque n tend vers ∞, alors

$$s_n \leq t_n \leq t$$

Donc la suite (s_n) est majorée. La suite (s_n) est croissante et majorée, donc convergente.

4.1.1.21 Exercice

Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^n}$$

est convergente.

On pourra comparer cette série à la série géométrique de raison ½.

Correction

A partir du rang 2 on a

$$\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

La série géométrique de raison ½ est convergente donc la série de terme général $\frac{1}{n^n}$ est convergente.

4.1.1.22 Exercice

Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^2}$$

est convergente.

On pourra comparer cette série à la série de terme général $\frac{1}{n(n-1)}$

Correction

On sait que la série de terme général $\frac{1}{n(n-1)}$ est converge. Or

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

Donc la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente.

4.1.1.23 Exercice de synthèse : Suites, Récurrence, Intégrales, étude de fonctions

Partie 1

Soit (u_n) une suite de réels non nuls. On lui associe la suite (p_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = \prod_{p=1}^{n} u_p = u_1.u_2.u_3 \ldots..u_n$$

On dit que le produit (p_n) converge si et seulement si la suite (p_n) admet une limite finie non nulle. Sinon on dit que le produit (p_n) diverge.

1/ En considérant le produit $\frac{p_{n+1}}{p_n}$, montrer que, pour que le produit (p_n) converge, il est nécessaire que la suite (u_n) converge vers 1.

2/ Soit

$$p_n = \prod_{p=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

Montrer que, $\forall n \geq 1$, $p_n = n + 1$.

3/ Soient a un réel différent de kπ $(k \in \mathbb{Z})$ et

$$p_n = \prod_{p=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^p}\right)$$

Pour tout entier naturel n non nul, calculer

$$p_n . sin\left(\frac{a}{2^n}\right)$$

En déduire que le produit (p_n) converge et donner la limite de la suite (p_n).

Partie 2

Soit (p_n) un produit associé à une suite (u_n) qui converge vers 1.

1a/ Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que : $\forall n \geq n_0$, $u_n > 0$

1b/ On pose

$$S_n = \sum_{p=n_0}^{n} \ln(u_p)$$

Montrer que la convergence de la suite (S_n) équivaut à la convergence du produit (p_n).

Lorsque (S_n) converge vers L, donner la limite de la suite (p_n) en fonction de L.

Soient

$$p_n = \prod_{p=1}^{n} \sqrt[p]{p}$$

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{lnp}{p}$$

2a/ Montrer que

$$\forall p \geq 3, \qquad \int_{p}^{p+1} \frac{lnx}{x} dx \leq \frac{lnp}{p}$$

2b/ En déduire la nature de la suite (S_n) et du produit (p_n).

Partie 3

Soit

$$p_n = \prod_{p=1}^{n} (1 + v_p)$$

Où (v_n) est une suite de réels strictement positifs, qui converge vers 0.

On pose

$$S'_n = \sum_{p=1}^{n} v_p$$

1a/ Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(1+x) < x$$

1b/ Montrer que la suite (S'_n) est croissante

1c/ Montrer que si la suite (S'_n) converge, alors le produit (p_n) converge

2/ Déduire de la question Partie 1-2 la limite de la suite (S'_n) définie par

$$S'_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$$

3/ Soit

$$p_n = \prod_{p=1}^{n} (1 + a^{2p})$$

Où $a \in \mathbb{R}_+^*$

Aide

Partie 1

1/ Si la suite Pn admet une limite finie non nulle, que vaut Pn+1/Pn quand n tend vers l'infini.

2/ Récurrence

3/ Penser aux formules d'addition (sin2a=…….) pour simplifier les expressions. Puis récurrence.

Correction

Première partie :

I-1-Pour tout entier naturel non nul n, P_n est non nul, et on a : $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\prod_{p=1}^{n+1} u_p}{\prod_{p=1}^{n} u_p}$, ce qui donne après simplification : $\frac{P_{n+1}}{P_n} = u_{n+1}$. Or, pour que la suite (P_n) converge, il est nécessaire qu'elle admet pour limite un réel l qui vérifie: $\lim_{n\to+\infty} P_n = l$ et $\lim_{n\to+\infty} P_{n+1} = l$, donc que $\lim_{n\to+\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = 1$, soit $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = 1$, donc, pour que la suite (P_n) converge, il est nécessaire que la suite (u_n) converge vers 1.

I-2- Pour $n = 1$, on a $P_n = 2$, la relation $P_n = n+1$ est donc vérifiée pour cette valeur. Si pour un entier non nul n, la relation $P_n = n+1$ est vérifiée, comme $P_{n+1} = \prod_{p=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{p}\right)$, soit encore : $P_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)P_n$, d'où : $P_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)(n+1)$, donc : $P_{n+1} = n+2$. La relation proposée est alors vraie pour n + 1, comme elle est vraie pour n = 1, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel non nul. De plus, $\lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$, donc : $\lim_{n\to+\infty} P_n = +\infty$. La suite (P_n) est divergente, bien que la suite (u_n) converge vers 1. Il est donc nécessaire pour que (P_n) converge que $\lim_{n\to+\infty} (u_n) = 1$ mais cette condition elle suffit pas, comme le montre l'exemple étudié dans cette question.

I-3- La relation $P_n \sin\frac{a}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sin a$ est vérifiée pour n = 1, en effet : $P_1 \sin\frac{a}{2} = \cos\frac{a}{2}\sin\frac{a}{2}$, d'où

$P_1 \sin\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\sin a$, et si on suppose qu'elle est vraie pour un entier naturel non nul n, on a alors :

$P_{n+1} \sin\frac{a}{2^{n+1}} = P_n \cos\frac{a}{2^{n+1}}\sin\frac{a}{2^{n+1}}$, or $\cos\frac{a}{2^{n+1}}\sin\frac{a}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sin\frac{a}{2^n}$, ce qui donne en

remplaçant dans l'expression précédente : $P_{n+1}\sin\frac{a}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}P_n \sin\frac{a}{2^n}$, donc :

$P_{n+1}\sin\frac{a}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}\sin a$. La relation est alors vraie pour n + 1, comme elle est vraie pour n = 1, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel non nul n. Comme

$a \neq k\pi$, a, sina et $\sin\frac{a}{2^n}$ ne sont pas nuls donc $P_n = \frac{\frac{1}{2^n}\sin a}{\sin\frac{a}{2^n}}$, d'où : $P_n = \frac{\frac{a}{2^n}}{\sin\frac{a}{2^n}}.\frac{\sin a}{a}$, or

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{a}{2^n}}{\sin\frac{a}{2^n}} = 1$, car : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a}{2^n} = 0$, donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{\sin a}{a}$ .Le produit P_n converge car il

admet une limite finie $\frac{\sin a}{a}$ qui n'est pas nulle.

II-1a- La suite (u_n) converge vers 1, ce qui équivaut à : $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ \ |u_n - 1| \leq \varepsilon$

Ceci étant vrai en particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$: $\varepsilon = \frac{1}{2}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ \ |u_n - 1| \leq \frac{1}{2}$

Or, $|u_n - 1| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq u_n - 1 \leq \frac{1}{2}$ donc : $\frac{1}{2} \leq u_n$. Finalement, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier n supérieur à n_0, $u_n > 0$.

II-1-b- Par définition : $S_n = \sum\limits_{p=n_0}^{n} \ln(u_p)$ qu'on peut écrire sous la forme : $S_n = \ln\left(\prod\limits_{p=n_0}^{n} u_p\right)$ ou

encore $S_n = \ln\frac{P_n}{\prod\limits_{p=1}^{n_0-1} u_p}$, comme tous les u_p sont strictement positifs, on a donc :

$S_n = \ln(P_n) - \ln\left(\prod\limits_{p=1}^{n_0-1} u_p\right)$, en posant : $A = \ln\left(\prod\limits_{p=1}^{n_0-1} u_p\right)$ qui est une constante, on a alors :

$S_n = \ln(P_n) - A$, on en déduit que si (P_n) converge, alors (S_n) converge également.

Réciproquement, en écrivant (P_n) sous la forme : $P_n = e^A e^{S_n}$, on en déduit que si (S_n) converge, (P_n) admet une limite finie non nulle, donc il converge. La convergence de la suite (S_n) équivaut donc à la convergence de la suite (P_n).

II-2-a-La fonction f définie sur $[3,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ est dérivable sur l'ensemble sur lequel elle est définie et on a : $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ qui est strictement négatif sur $[3,+\infty[$, on a : $\ln(x)>1$, donc $f'(x)<0$. La fonction f est donc décroissante sur $[3,+\infty[$, on en déduit que lorsque $x\in\ p,p+1$, pour $p\geq 3$, on a $f(x)\leq f(p)$, donc : $\int_p^{p+1}\dfrac{\ln x}{x}dx\leq\int_p^{p+1}\dfrac{\ln p}{p}dx$, d'où :

$$\int_p^{p+1}\frac{\ln x}{x}dx\leq\frac{\ln p}{p}.$$

II-2-b- En sommant membre à membre les inégalités ci-dessus lorsque p varie de 3 à n, on obtient : $\sum_{p=3}^{n}\int_p^{p+1}\dfrac{\ln x}{x}dx\leq\sum_{p=3}^{n}\dfrac{\ln p}{p}$, d'où, en utilisant la relation de Chasles pour les intégrales :

$\int_3^{n+1}\dfrac{\ln x}{x}dx\leq\sum_{p=3}^{n}\dfrac{\ln p}{p}$, on en déduit : $\left[\dfrac{1}{2}\ \ln x\ ^2\right]_3^{n+1}\leq S_n$ soit : $\dfrac{1}{2}\left[\ \ln n+1\ ^2-\ \ln 3\ ^2\right]\leq S_n$,

mais comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\left[\ \ln n+1\ ^2-\ \ln 3\ ^2\right]\right)=+\infty$, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$. La suite (S_n) diverge donc vers $+\infty$.

De plus, on a : $P_n=\prod_{p=1}^{n}p^{\frac{1}{p}}$, donc : $P_n=e^{\ln\left(\prod_{p=1}^{n}p^{\frac{1}{p}}\right)}$, soit encore : $P_n=e^{\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\ln p}$, d'où : $P_n=e^{S_n}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=+\infty$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n=+\infty$, (P_n) diverge donc lui aussi vers $+\infty$.

Troisième partie :

III-1-a- La fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x)=\ln(1+x)-x$ est dérivable et on a : $g'(x)=-\dfrac{x}{x+1}$, donc, sur $\mathbb{R}^{+*}$ $g'(x)<0$, g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, or $g(0)=0$, donc, pour tout réel $x>0$, $g(x)<g(0)$, d'où : $\ln(1+x)<x$.

III-1-b Par définition se S'_n, pour tout entier naturel n, $S'_{n+1}-S'_n=v_{n+1}$, or, par hypothèse, $v_{n+1}>0$, donc pour tout entier naturel n, $S'_{n+1}>S'_n$, la suite (S_n) est donc croissante.

III-1-c En calculant $\ln\ P_n$, on obtient : $\ln\ P_n=\sum_{p=1}^{n}\ln(1+v_p)$, ce qui donne en utilisant III-1-a :

$\ln\ P_n\leq\sum_{p=1}^{n}v_p$, or $\sum_{p=1}^{n}v_p=S'_n$, donc : $P_n\leq e^{S'_n}$. Si la suite S'_n converge, elle est majorée, donc, la suite P_n est majorée. De plus, pour tout entier naturel n, $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}=1+v_p$, donc $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}>1$, car $v_p>0$, comme tous les P_n sont eux aussi positifs, la suite P_n est croissante, étant majorée, elle est convergente. Donc : si la suite S'_n converge, la suite P_n admet une limite finie non nulle puisque tous ses termes sont supérieurs à 1, le produit P_n converge.

III-2- En posant : $v_p = \frac{1}{p}$, d'après I-2, $P_n = n+1$ et d'après III-1-c, les v_p étant strictement positifs, $P_n \leq e^{S'_n}$, donc $n+1 \leq e^{S'_n}$, d'où : $\ln(n+1) \leq S'_n$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n = +\infty$.

III-3-a Si $a \geq 1$, alors pour tout entier naturel p non nul , $(1+a^{2^p}) \geq 2$ d'où : $\prod\limits_{p=1}^{n}(1+a^{2^p}) \geq 2^n$, or $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, donc (P_n) diverge vers $+\infty$ dans ce cas.

III-3-b i) Si pour un entier naturel p non nul on a $2^p \geq p$, alors $2^{p+1} \geq 2p$, donc $2^{p+1} \geq p+1$, cette propriété est donc héréditaire or elle est vraie pour p = 1 donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel non nul. Pour $0 < a < 1$, on a alors : $0 < a^{2^p} \leq a^p$. En sommant toutes les inégalités obtenues pour p variant de 1 à n, on obtient : $S'_n \leq \sum\limits_{p=1}^{n} a^p$, or : $\sum\limits_{p=1}^{n} a^p$ est la somme des n premiers termes d'un suite géométrique de premier terme a et de raison a qui est différente de 1, donc : $\sum\limits_{p=1}^{n} a^p = a\frac{1-a^n}{1-a}$, et comme $0 < a < 1$, on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{p=1}^{n} a^p = \frac{a}{1-a}$. S'_n est donc majorée, comme elle est croissante, elle converge, par suite, d'après III-1-c, le produit (P_n) converge.

III-3-b-ii) Montrons que pour n élément de $\mathbb{N}^*$, $(1-a^2)P_n = 1-a^{2^{n+1}}$. La relation est vérifiée pour n = 1 car : $(1-a^2)(1+a^2) = 1-a^{2^{1+1}}$ et si elle est vraie au rang n, comme

$(1-a^2)P_{n+1} = (1-a^2)P_n(1+a^{2^{n+1}})$, on a : $(1-a^2)P_{n+1} = (1-a^{2^{n+1}})(1+a^{2^{n+1}})$, donc :

$(1-a^2)P_{n+1} = 1-a^{2^{n+2}}$, elle est donc vraie au rang n+1, donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$. On a donc pour $0 < a < 1$, $P_n = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a^2}$, or $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-a^{2^{n+1}}) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{1-a^2}$.

5 Références bibliographiques

[1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [7], [8]

[1] V. Bonnet, « COURS DE MATHÉMATIQUES Terminale S ». 2011.

[2] J. Quinet et J. Quinet, *Calcul intégral et séries*, 6. éd. in Cours élémentaire de mathématiques supérieures / J. Quinet, no. T. 3. Paris: Dunod, 1996.

[3] *Gauss: une révolution de la théorie des nombres*. Barcelone: RBA Coleccionables, 2018.

[4] J. Vélu, *Méthodes mathématiques pour l'informatique: cours et exercices corrigés*, 5è ed. in Info Sup. Malakoff: Dunod, 2019.

[5] J. Vélu, G. Avérous, I. Gilles, et F. Santi, *Mathématiques pour l'informatique: rappels de cours, méthodes, exercices et problèmes avec corrigés détaillés*. in Sciences sup. Paris: Dunod, 2008.

[6] J. Vélu, *Mathématiques générales: cours et exercices corrigés*. Malakoff (Hauts-de-Seine): Dunod, 2020.

[7] F. Corbalán, *Le nombre d'or: le langage mathématique de la beauté*. in Le monde est mathématique, no. 1. Paris: RBA France, 2013.

[8] S. Belhaj et A. Ben Aïssa, *Mathématiques pour l'informatique: cours et exercices corrigés licence 1 & 2 informatique*. Paris: Vuibert, 2013.

https://www.geogebra.org/graphing