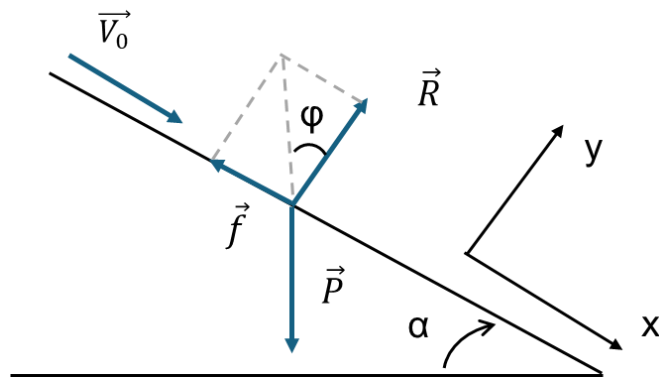


Mécanique Analytique

-



Frédéric Menan

<https://lesdocsduprof.com/>

fmenan@cesi.fr

11/2024

Table des matières

1	MECANIQUE ANALYTIQUE	3
1.1	EXEMPLE D'INTRODUCTION : LE PFD AVEC LA NOTION DE LAGRANGIEN	3
1.2	PARAMETRES DE LAGRANGE	4
1.3	CINEMATIQUE ET CINETIQUE	5
1.4	VITESSES ET PUISSANCES VIRTUELLES	8
1.5	EQUATIONS DE LAGRANGE	11
1.6	FONCTIONS DE FORCES ET LAGRANGIEN : UNE AUTRE APPROCHE DES EQUATIONS DE LAGRANGE.....	12
1.7	RESOLUTION D'UN PROBLEME EN MECANIQUE ANALYTIQUE	14
1.8	CONCLUSION	15
1.9	ANNEXE. TORSEUR CINEMATIQUE VIRTUEL	16
1.10	ANNEXE. ENERGIE CINÉTIQUE D'UN SYSTÈME DE N SOLIDES	17
2	MECANIQUE ANALYTIQUE	18
2.1	EXERCICE : PARTICULE DE MASSE M SOUMISE A LA PESANTEUR.....	18
2.2	EXERCICE : PENDULE SIMPLE	19
3	REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	21

1 Mécanique analytique

1.1 Exemple d'introduction : le PFD avec la notion de Lagrangien

Soit une masse ponctuelle m soumise à un effort \vec{F}

Soit \vec{x} la position de cette particule en coordonnées cartésiennes.

PFD :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Si \vec{F} dérive d'un potentiel V , alors pour chaque composante i de l'espace ($i=1..3$)

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

PFD sur chaque composante i de l'espace ($i=1..3$) :

$$-\frac{\partial V}{\partial x_i} = m \cdot \ddot{x}_i$$

$$m \cdot \ddot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0$$

Soit le Lagrangien de la particule

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - V(\vec{x}) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \|\dot{\vec{x}}\|^2 - V(\vec{x}) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - V(\vec{x})$$

Dans ce cas

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

De plus

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \cdot \dot{x}_i$$

et donc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = m \cdot \ddot{x}_i$$

Par conséquent, le PFD peut s'écrire

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

On a construit 3 équations correspondant respectivement aux coordonnées x_1 , x_2 et x_3 de la particule dans l'espace

(là où le théorème de l'énergie cinétique, également basé sur une approche énergétique avec le PFD comme point de départ, n'en propose qu'une).

On a mis en évidence, dans un cadre très simplifié et qui ne met pas en évidence la cadre beaucoup plus général de la mécanique analytique, la construction des équations de Lagrange.

1.2 Paramètres de Lagrange

Soit un système constitué d'un solide, ou de plusieurs solides indéformables reliés entre eux.

Les paramètres utilisés en mécanique analytique pour décrire à un instant donné la configuration d'un solide ou de plusieurs solides indéformables reliés entre eux sont les paramètres $q=(q_1, \dots, q_n)$, repérant la position des solides. Ces paramètres sont appelés coordonnées généralisées, ou paramètres de Lagrange.

Soit le point $M(t)$ défini par

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{F}(Mo, q_1, q_2, q_3, t)$$

Les paramètres $q = (q_1, q_2, q_3)$ sont appelés paramètres de Lagrange (ou coordonnées généralisées)

Remarque : les coordonnées généralisées sont essentiellement des distances ou des angles.

Remarque : le choix des paramètres q n'est pas unique

Exemple : roue

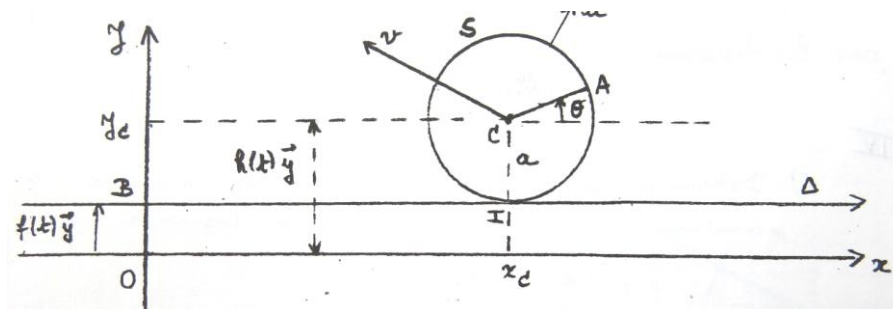


Figure 1. (Nadot, 2003)

On a $y_c=h(t)$ avec $h(t)$ connu. On peut choisir $q=(x_c, y_c, \theta)$.

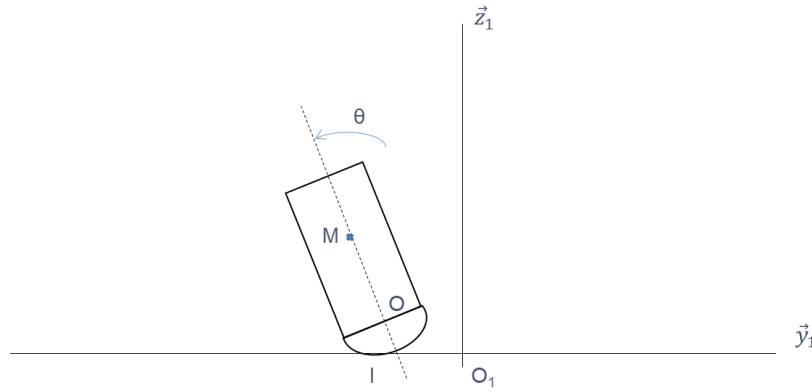
Exemple

$IO = a$

$OM = b$

$$\overrightarrow{O_1M} = x. \vec{x}_1 + y. \vec{y}_1 + z. \vec{z}_1$$

$q=(x, y, z, \theta, \psi, \varphi)$



Contact ponctuel en I implique : $z = a + b \cdot \cos\theta$ donc on peut aussi prendre $q=(x,y,\theta,\psi,\varphi)$

1.3 Cinématique et cinétique

1.3.1 Champ des vitesses et des accélérations d'un système de solides

1.3.1.1 Vitesse $\vec{V}(M/T)$

Soit Σ un système de N solides. $q=(q_1, \dots, q_n)$ les paramètres de Lagrange.

La position de M est repérée par $\vec{OM} = \vec{F}(M_o, q, t)$.

Donc la vitesse du point M est donnée par

$$\vec{V}(M, t) = \left. \frac{d\vec{M}}{dt} \right|_T = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}$$

1.3.1.2 Accélération $\vec{\Gamma}(M/T)$

Par définition

$$\vec{\Gamma}(M/T) = \left. \frac{d\vec{V}(M/T)}{dt} \right|_T$$

On vient de voir que $\vec{V}(M, t)$ dépend de q, \dot{q} et t donc

$$\vec{\Gamma}(M/T) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{q}_j} \cdot \ddot{q}_j + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

1.3.2 Energie cinétique

L'énergie cinétique d'un système matériel E par-rapport à un repère T est

$$K(\xi/T) = \int_{\xi} \frac{1}{2} \cdot V^2(M/T) dm$$

Pour un système de N solides, avec $\vec{OM} = \vec{F}(M_o, q, t)$, $q=(q_n)$ paramètres de Lagrange

$$\vec{V}(M, t) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}$$

Donc

$$2K(\Sigma/T) = \int_{\Sigma} \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right\|^2 dm$$

$$2K(\Sigma/T) = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \right) dm + 2 \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \cdot \dot{q}_j \right) dm + \int_{\Sigma} \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right\|^2 dm$$

On peut écrire

$$2K(\Sigma/T) = \alpha_{jk} \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k + 2\beta_j \dot{q}_j + \gamma$$

Avec

$$\begin{cases} \alpha_{jk} = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_k} \right) dm \\ \beta_j = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right) dm \\ \gamma = \int_{\Sigma} \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right\|^2 dm \end{cases}$$

On définit alors

$$\begin{cases} 2K_2 = \alpha_{jk} \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k \\ 2K_1 = 2\beta_j \dot{q}_j \\ 2K_0 = \gamma \end{cases}$$

Finalement :

$$2K(\Sigma/T) = 2K_2 + 2K_1 + 2K_0$$

1.3.3 Formule de Lagrange

Soit un système Σ de N solides, $q=(q_1...q_n)$

$$\vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} = \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \right) - \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \right)$$

Or

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \right) \cdot \frac{\partial q_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \right) \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right)$$

Donc, (voir expression de la vitesse \vec{V} paragraphe 1.3.1.1)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial q_j}$$

Or on a

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j}$$

(voir expression de la vitesse \vec{V} paragraphe 1.3.1.1). Donc

$$\vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V^2}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial V^2}{\partial q_j}$$

On obtient la formule de Lagrange :

$$\int_{\Sigma} \vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot dm = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

La formule de Lagrange nous servira pour établir les équations de Lagrange.

1.3.4 Liaisons

Soit un système E de N solides $(S_i)_{i=1..n}$ repéré par les paramètres $q=(q_1, \dots, q_n)$

On appelle liaison explicite entre les paramètres $q=(q_1, \dots, q_n)$ une relation : $g(q, \dot{q}, t) = 0$ ou $g(q, \dot{q}, t) \geq 0$

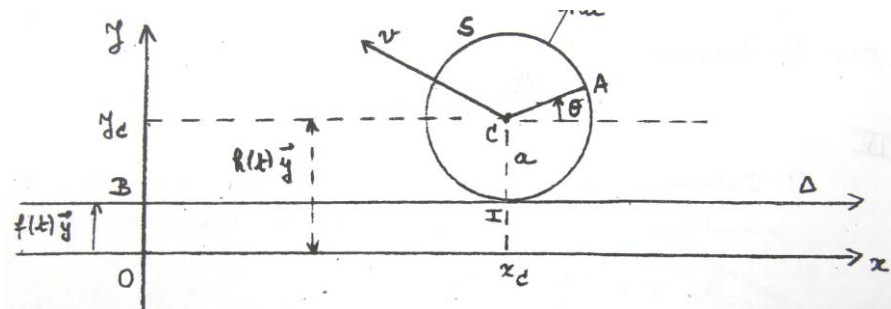
On appelle liaison implicite une condition géométrique permettant la réduction du nombre de paramètres et effectivement utilisée pour faire cette réduction.

Remarque : $g(q, t) = 0$: liaison holonome ; $g(q, \dot{q}, t) = 0$: liaison non holonome

Remarque : liaison intérieure : contact entre deux solides de E ; liaison extérieure : contact entre deux solides dont l'un au moins n'appartient pas à E

Remarque : en mécanique analytique on assimilera les liaisons technologiques usuelles (pivot, ponctuel...) à des liaisons implicites. Par exemple une pivot entre deux solides est en fait 5 liaisons implicites !

Exemple : mouvement plan d'un disque sur une droite



On peut choisir $q=(x_c, y_c, \theta)$ mais on peut aussi choisir $q=(x_c, \theta)$

Dans le 1^{er} cas, la relation $y_c - h(t) = 0$ est une relation appelée liaison explicite

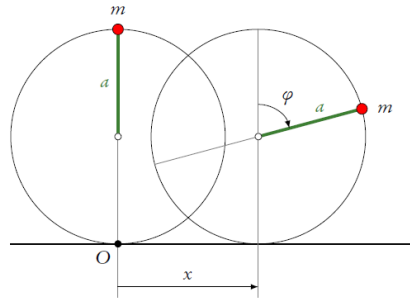
Dans le 2^{ème} cas, la relation $y_c - h(t) = 0$ est une relation appelée liaison implicite car elle a été utilisée pour réduire le nombre de paramètres de Lagrange

Exemple : masse m

Pour la masse m , on peut choisir $q = (x, y, \varphi)$

(x, y) : coordonnées du centre de la roue.

Si l'on sait que la roue reste en contact avec le sol, alors il n'est pas nécessaire de définir sa coordonnée y car on sait que $y = a$, à tout instant t . On peut alors choisir $q = (x, \varphi)$. Le contact sol – roue fournit ainsi une liaison (implicite car elle est utilisée pour réduire le nombre de coordonnées).



On aurait aussi pu garder la coordonnée y pour décrire la position de la roue. Dans ce cas on aurait eu l'équation $y - a = 0$ à considérer lors de la résolution et on aurait parlé de liaison explicite.

1.4 Vitesses et puissances virtuelles

1.4.1 Vitesses virtuelles

1.4.1.1 Système matériel E

Définition : un champ de vitesses virtuelles sur un système matériel E à l'instant t est tout champ vectoriel \vec{U}^* défini et continu par morceaux sur E à l'instant t .

Remarque : le champ \vec{V} est un cas particulier de vitesses virtuelles.

Un champ de vitesses virtuelles est, sur E à l'instant t , rigidifiant si il existe un vecteur $\vec{\Omega}^*$ tel que $\forall M, N \text{ de } E, \vec{U}^*(N) = \vec{U}^*(M) + \overrightarrow{NM} \wedge \vec{\Omega}^*$

1.4.1.2 Système Σ de N solides S_i

On manipulera un type particulier de vitesses virtuelles : les vv de Lagrange

Définition : un champ de vitesses virtuelles de Lagrange de Σ à l'instant t dans son mouvement par-rapport à T est un champ défini par

$$\vec{V}^*(M/T) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j}(M_0, q, t) \cdot \dot{q}_j^*$$

Un champ de vitesses virtuelles de Lagrange de Σ à l'instant t dans son mouvement par-rapport à T est un champ défini par

$$\vec{V}^*(M/T) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} (Mo, q, t) \cdot \dot{q}_j^*$$

Avec \dot{q}_j^* : scalaires arbitraires

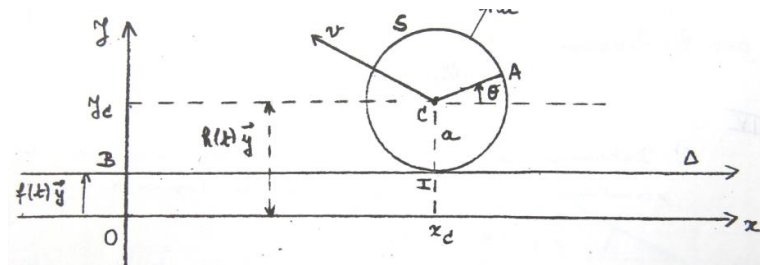
Proposition : un champ de vitesses virtuelles de Lagrange rigidifie chaque solide S_i de Σ .

Remarque : la résultante du torseur cinématique virtuel pour un champ de vitesses virtuelles de Lagrange pour un solide S sera défini par:

$$\vec{\Omega}^*(S/T) = \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \dot{q}_j} (Mo, q, t) \cdot \dot{q}_j^*$$

Cette expression du « vecteur rotation virtuel » permet à $\vec{V}^*(M/T)$ et à $\vec{\Omega}^*(S/T)$ d'avoir une structure de torseur et donc de vérifier la relation « BABAR ». Une structure de torseur permettra de calculer les puissances virtuelles des actions mécaniques.

Exemple : mouvement plan d'un disque sur une droite



Si $q = (x_c, y_c, \theta)$

$$\vec{V}^*(C/T) = \frac{\partial \vec{OC}}{\partial x_c} \cdot \dot{x}_c^* + \frac{\partial \vec{OC}}{\partial y_c} \cdot \dot{y}_c^* + \frac{\partial \vec{OC}}{\partial \theta} \cdot \dot{\theta}^*$$

$$\vec{V}^*(C/T) = \dot{x}_c^* \cdot \vec{x} + \dot{y}_c^* \cdot \vec{y}$$

Si $q = (x_c, \theta)$

$$\vec{V}^*(C/T) = \frac{\partial \vec{OC}}{\partial x_c} \cdot \dot{x}_c^* + \frac{\partial \vec{OC}}{\partial \theta} \cdot \dot{\theta}^*$$

$$\vec{V}^*(C/T) = \dot{x}_c^* \cdot \vec{x}$$

1.4.2 Vitesses virtuelles compatibles avec des liaisons

1.4.2.1 Vitesses virtuelles compatibles avec des liaisons implicites

Soit un Système Σ de N solides S_i , $q = (q_1, \dots, q_n)$

Les vitesses virtuelles de Lagrange sont dites compatibles avec les liaisons implicites

1.4.2.2 Vitesses virtuelles compatibles avec des liaisons explicites

Soit la liaison (1) explicite : $a_j(q, t) \cdot \dot{q}_j + b(q, t) = 0$

Un champ de vitesses virtuelles de Lagrange $\vec{V}^*(M/T) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j}(Mo, q, t) \cdot \dot{q}_j^*$ est dit compatible avec la liaison (1) telle qu'elle existe à l'instant t ssi les \dot{q}_j^* vérifient

$$a_j(q, t) \cdot \dot{q}_j^* = 0$$

Remarque : le champ des vitesses peut ne pas être compatible avec des liaisons explicites

1.4.3 Puissance virtuelle

1.4.3.1 Puissance virtuelle d'un champ vectoriel défini sur un système matériel E

Définition : on appelle puissance virtuelle du champ $\vec{\Phi}$ défini sur E, pour le champ de vitesses virtuelles \vec{U}^* , la grandeur

$$\pi(\vec{\Phi} \rightarrow E, \vec{U}^*) = \int_E \vec{\Phi}(m) \cdot \vec{U}^*(m) dm$$

Remarque : la puissance réelle de $\vec{\Phi}$ dans le mouvement de E par-rapport à un repère T est définie pour $\vec{U}^*(m) = \vec{V}(M/T)$

1.4.3.2 Puissance virtuelle d'un champ vectoriel défini sur un système Σ de N solides

- Un seul solide (N=1)

Soit \vec{V}^* un champ de vitesses virtuelles de Lagrange rigidifiant S.

Le torseur cinématique du point M est alors

$$\begin{cases} \vec{\Omega}^*(S/T) \\ \vec{V}^*(M/T) \end{cases}$$

Donc la puissance virtuelle du champ $\vec{\Phi}$ défini sur E

$$\pi(\vec{\Phi} \rightarrow S, \vec{V}^*/T) = \vec{R}_{\vec{\Phi}} \cdot \vec{V}^*(A/T) + \vec{M}_{\vec{\Phi}}(A) \cdot \vec{\Omega}^*(S/T)$$

$$\vec{R}_{\vec{\Phi}} = \int_S \vec{\Phi}(m) \cdot dm$$

$$\vec{M}_{\vec{\Phi}}(A) = \int_S \vec{AM} \wedge \vec{\Phi}(m) \cdot dm$$

- N solides

$$\pi(\vec{\Phi} \rightarrow \Sigma, \vec{V}^*/T) = \int_{\Sigma} \vec{\Phi} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j^* \cdot dm = \left(\int_{\Sigma} \vec{\Phi} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot dm \right) \cdot \dot{q}_j^* = Q_j(\vec{\Phi}, \Sigma/T) \cdot \dot{q}_j^*$$

Pour chaque puissance virtuelle on définira les coefficients Q_j tels que

$$\pi(\vec{\Phi} \rightarrow \Sigma, \vec{V}^*/T) = Q_j(\vec{\Phi}, \Sigma/T) \cdot \dot{q}_j^*$$

Exemple : point matériel P (Brossard INSA Lyon)

Un point matériel P peut se déplacer sur une droite (D) (O_1, \vec{X}_1) telle que $O_1 \in (D)$ se déplace sur (O, \vec{Y}_0) de manière que $\vec{OO}_1 = \frac{1}{2} \gamma t^2 \cdot \vec{Y}_0$

$$\vec{O_1P} = x \cdot \vec{X}_1 + y \cdot \vec{Y}_1$$

On a la relation :

$$y - x \cdot \tan \theta = 0$$

3 paramètres de Lagrange : (x, y, θ)

On définira

$$\vec{V}^*(P) = \frac{\partial \vec{OP}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j^* = \frac{\partial \vec{OP}}{\partial x} \cdot \dot{x}_{\square}^* + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial y} \cdot \dot{y}_{\square}^* + \frac{\partial \vec{OP}}{\partial \theta} \cdot \dot{\theta}_{\square}^* = \dot{x}_{\square}^* \vec{X}_0 + \dot{y}_{\square}^* \vec{Y}_0$$

tels que

$$\dot{y}_{\square}^* - \dot{x}_{\square}^* \cdot \tan \theta = 0$$

Puissance virtuelle de l'action de la glissière sur la masse mobile :

$$\pi(\text{glissière} \rightarrow \text{masse}, \vec{V}^*) = \left| \begin{array}{c} -Q \sin \theta \cdot \vec{X}_0 + Q \cos \theta \vec{Y}_0 \\ / \\ \dot{x}_{\square}^* \vec{X}_0 + \dot{y}_{\square}^* \vec{Y}_0 \end{array} \right| \vec{0} = -Q \sin \theta \dot{x}_{\square}^* + Q \cos \theta \cdot \dot{y}_{\square}^*$$

$$\pi(\text{glissière} \rightarrow \text{masse}, \vec{V}^*) = 0$$

1.5 Equations de Lagrange

1.5.1 Efforts extérieurs / Efforts intérieurs à un système matériel E.

- Efforts extérieurs à E : actions mécaniques exercées sur E par \vec{E} .
- On appelle efforts intérieurs les efforts entre deux parties de E.

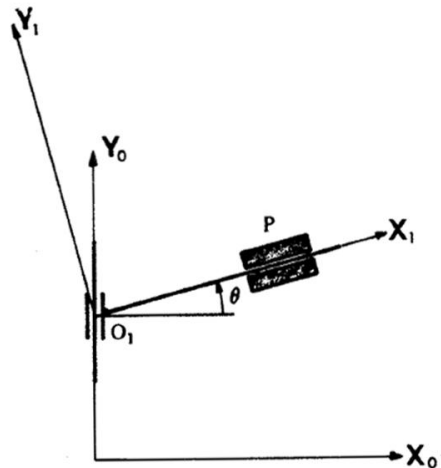
1.5.2 Principe des vitesses virtuelles

Il existe au moins un repère T galiléen tel que pour tout système matériel E, pour tout champ de vitesses virtuelles \vec{U}^* défini sur E à tout instant t,

- la puissance virtuelle du champ des accélérations dans le mouvement de E par-rapport à T est égale à puissance virtuelle des efforts intérieurs et des efforts extérieurs

$$\pi(\vec{I}/T \rightarrow E, \vec{U}^*) = \pi(E \rightarrow E, \vec{U}^*) + \pi(\text{extérieur} \rightarrow E, \vec{U}^*)$$

- la puissance virtuelle des efforts intérieurs est nulle pour tout champ \vec{U}^* rigidifiant E



1.5.3 Equations de Lagrange

Soient un système Σ de N solides i ($i=1..N$), un repère T , et les coordonnées généralisées $q=(q_1..q_n)$.

Pour tout \dot{q}_j^* de \mathbb{R} , soient les vitesses virtuelles

$$\vec{V}^*(M/T) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} (M, q, t) \cdot \dot{q}_j^*$$

Puissance virtuelle du champ des accélérations :

$$\pi(\vec{f}/T \rightarrow \Sigma, \vec{V}^*/T) = \int_{\Sigma} \vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j^* \cdot dm$$

Or avec la formule de Lagrange (§1.3.3) :

$$\pi(\vec{f}/T \rightarrow \Sigma, \vec{V}^*/T) = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} \right) \cdot \dot{q}_j^*$$

En définissant les puissances suivantes :

- Actions données

$$\pi(a.d \rightarrow \Sigma, \vec{V}^*/T) = Q_j(a.d \rightarrow \Sigma) \cdot \dot{q}_j^* = \hat{Q}_j \cdot \dot{q}_j^*$$

- Actions de liaison

$$\pi(a.l \rightarrow \Sigma, \vec{V}^*/T) = Q_j(a.l \rightarrow \Sigma) \cdot \dot{q}_j^* = \tilde{Q}_j \cdot \dot{q}_j^*$$

On obtient les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = \hat{Q}_j + \tilde{Q}_j$$

$j=1,2,\dots,n$

Remarque importante : au lieu d'écrire le théorème de l'énergie cinétique, on a écrit le principe des vitesses virtuelles mais l'approche reste « énergétique » (on calcule la variation d'énergie cinétique K). Comme on obtient une équation par paramètre de Lagrange, on peut considérer les équations de Lagrange comme une extension à plusieurs dimensions du théorème de l'énergie cinétique (le théorème de l'énergie cinétique ne fournissant qu'une seule équation scalaire). Plus précisément, au lieu du déplacement réel (cas du théorème de l'énergie cinétique), on considère un petit déplacement virtuel et on calcule la puissance de l'accélération et des efforts lors de ce petit déplacement. C'est le principe des puissances virtuelles, des travaux virtuels, des vitesses virtuelles.

1.6 Fonctions de forces et Lagrangien : une autre approche des équations de Lagrange

Soit un système Σ en mouvement par-rapport à un repère T .

Si une action donnée dépend d'une fonction de forces, alors il existe une fonction $U(q,t)$ telle que

$$Q_j(action \rightarrow \Sigma, \vec{V}^*) = \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

Remarque : Q est alors indépendante de \dot{q}

Remarque :

$$\pi(action \rightarrow \Sigma, \vec{V}^*) = \frac{\partial U}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j^*$$

Remarque : V = -U est le potentiel associé à l'action donnée

1.6.1 Exemple : Pesanteur

Soit un système Σ de masse m, centre d'inertie G. Soit l'action de la pesanteur $\vec{\varphi} = -g\vec{z}$.

$$\pi(\vec{\varphi} \rightarrow \Sigma, \vec{V}^*/T) = \int_{\Sigma} -g\vec{z} \cdot \vec{V}^*(M/T) dm = -g\vec{z} \cdot \int_{\Sigma} \vec{V}^*(M/T) dm = -g\vec{z} \cdot m \cdot \vec{V}^*(G/T)$$

$$\pi(\vec{\varphi} \rightarrow \Sigma, \vec{V}^*) = -mg\vec{z} \cdot \frac{\partial \vec{OG}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j^* = \frac{\partial}{\partial q_j} (-mg\vec{z} \cdot \vec{OG}) \cdot \dot{q}_j^*$$

Donc

$$Q_j(\vec{\varphi} \rightarrow \Sigma, \vec{V}^*) = \frac{\partial}{\partial q_j} (-mg\vec{z} \cdot \vec{OG}) = \frac{\partial}{\partial q_j} (-mgz_G)$$

Donc

$$U = -mgz_G$$

1.6.2 Lagrangien et équations de Lagrange

Soient un système Σ et $q=(q_1, \dots, q_n)$. On suppose que

- toutes les actions dérivent d'une fonction de forces (càd $Q_j(action \rightarrow \Sigma, \vec{V}^*) = \frac{\partial U}{\partial q_j}$)
- pas de liaison explicite

Les n équations de Lagrange sont, pour $j=1, \dots, n$ sont

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = \hat{Q}_j + \tilde{Q}_j$$

Elles deviennent donc

\mathcal{L}_{qj} :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = \frac{\partial U}{\partial q_j}$$

On définit le Lagrangien

$$L(q, \dot{q}, t) = K(q, \dot{q}, t) + U(q, t)$$

Alors Les n équations de Lagrange \mathcal{L}_{qj} deviennent

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

1.7 Résolution d'un problème en mécanique analytique

1.7.1 Premier bilan à l'issue de la définition des équations de Lagrange

- Inconnues (q_j) et \tilde{Q}_j : 2n inconnues
- Equations : n équations de Lagrange et p relations de liaisons explicites

Or $p < n$ donc $n+p < 2n$

On exploitera des hypothèses supplémentaires portant sur les actions de liaison. On peut en effet classer les actions de liaison de la sorte :

- Liaisons implicites parfaites \tilde{Q}_j^{ip}
- Liaisons explicites parfaites \tilde{Q}_j^{ep}
- Liaisons imparfaites \tilde{Q}_j^{im}

1.7.2 Liaisons implicites parfaites : Axiome de d'Alembert

La puissance virtuelle des actions de cette liaison est nulle, pour tout champ de vitesses virtuelles compatible avec cette liaison. Les vitesses virtuelles compatibles avec les liaisons implicites sont les vitesses virtuelles de Lagrange

$$\vec{V}^*(M/T) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j^*$$

$$\pi(a.l \rightarrow \Sigma, \vec{V}^*/T) = \tilde{Q}_j^{ip} \cdot \dot{q}_j^* = 0 \text{ pour tout } \dot{q}_j^*, \text{ donc } \tilde{Q}_j^{ip} = 0 \text{ pour tout } j=1,2,\dots,n$$

1.7.3 Liaisons explicites parfaites

On dispose de p relations de liaisons explicites parfaites : $a_{kj}(q, t) \cdot \dot{q}_j + b_k(q, t) = 0$ avec $k=1,\dots,p$

Vitesses virtuelles compatibles avec ces liaisons : $\vec{V}^*(M/T) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j^*$ tel que $a_{kj} \cdot \dot{q}_j^* = 0$. $k=1,\dots,p$

$$\pi(a.l \rightarrow \Sigma, \vec{V}^*/T) = \tilde{Q}_j^{ep} \cdot \dot{q}_j^*$$

L'axiome de d'Alembert implique $\tilde{Q}_j^{ep} \cdot \dot{q}_j^* = 0$ pour tout \dot{q}_j^* tel que $a_{kj} \cdot \dot{q}_j^* = 0$

Ceci implique que

$$\tilde{Q}_j^{ep} = \sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot a_{kj}$$

$j=1,\dots,n$. λ_k : multiplicateurs de Lagrange

alors

$$\pi(\text{actions de liaison} \rightarrow \Sigma, \vec{V}^*/T) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot a_{kj} \cdot \dot{q}_j^*$$

1.7.4 Bilan en prenant en compte l'hypothèse des liaisons parfaites

- n inconnues (q_j) et p inconnues (λ_k) : n + p inconnues
- n équations de Lagrange et p relations de liaisons parfaites : n + p équations

Liaisons imparfaites : il faudra se donner des renseignements sur les actions de ces liaisons.

1.7.5 Retour sur les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = \hat{Q}_j + \sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot a_{kj} + \tilde{Q}_j^{im}$$

\hat{Q}_j : actions données

$\sum_{k=1}^p \lambda_k \cdot a_{kj}$: liaisons explicites parfaites

\tilde{Q}_j^{im} : liaisons imparfaites

1.8 Conclusion

Les équations de Lagrange simplifient beaucoup, d'un point de vue mathématique, la résolution de certains problèmes par rapport à la mécanique Newtonienne. En effet elles évitent le calcul de certaines inconnues (tension du fil dans l'exemple du pendule par exemple).

Cependant, on peut ouvrir le débat sur la complexité de l'interprétation « physique » des grandeurs du problème et sur la complexité de paramétrage du problème (définition des coordonnées généralisées, des liaisons, des vitesses virtuelles, des puissances virtuelles...).

De plus les équations de Lagrange sont moins utiles que la mécanique Newtonienne quand il s'agit de déterminer des actions de liaisons inconnues. Or dans l'étude d'un problème classique de mécanisme industriel, on cherche les mouvements mais aussi les efforts induits dans les composants (pour un dimensionnement d'actionneur, un calcul de résistance des matériaux.....etc.).

C'est en fait dans des domaines comme la mécanique du vol, l'astronomie, la mécanique quantique, l'électromagnétisme, où des corps montrent des trajectoires complexes et des problématique de stabilité, que la mécanique analytique montre son intérêt. Dans ces applications, l'approche avec le Lagrangien, qui ne nécessite qu'un calcul d'énergies cinétique et potentielle, fournit rapidement et facilement les équations du mouvement.

Finalement, ces deux approches sont complémentaires : leur choix dépendra du problème et des résultats souhaités (mouvement, efforts...). Elles sont aussi souvent couplées : pour le Lagrangien, le calcul de l'énergie cinétique étant généralement réalisé par mécanique Newtonienne.

Remarque

Le théorème de l'énergie cinétique énonce que la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport à au repère galiléen R_G est égale à la puissance des actions mécaniques extérieures à S

Au lieu d'écrire le théorème de l'énergie cinétique, en mécanique analytique on a écrit le principe des vitesses virtuelles mais l'approche reste « énergétique » (on calcule la variation d'énergie cinétique K).

Comme on obtient une équation par paramètre de Lagrange, on peut considérer les équations de Lagrange comme une extension à plusieurs dimensions du théorème de l'énergie cinétique (le théorème de l'énergie cinétique ne fournit en effet qu'une seule équation scalaire).

Plus précisément, au lieu du déplacement réel (cas du théorème de l'énergie cinétique), on considère un petit déplacement virtuel et on calcule la puissance de l'accélération et des efforts lors de ce petit déplacement. C'est le principe des puissances virtuelles, des travaux virtuels, des vitesses virtuelles....

1.9 Annexe. Torseur cinématique virtuel

Pour avoir un torseur, il faut que la résultante $\vec{\Omega}^*(S/T)$ vérifie, pour tout M et N du solide :

$$\vec{V}^*(N/T) = \vec{V}^*(M/T) + \overrightarrow{NM} \wedge \vec{\Omega}^*(S/T)$$

Partons des vitesses réelles

$$\vec{V}(N/T) = \vec{V}(M/T) + \overrightarrow{NM} \wedge \vec{\Omega}(S/T)$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \vec{V}(N/T) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \vec{V}(M/T) + \overrightarrow{NM} \wedge \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \vec{\Omega}(S/T)$$

Or

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j}$$

Donc

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{N}}{\partial q_j} + \overrightarrow{NM} \wedge \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \vec{\Omega}(S/T)$$

En prenant comme résultante

$$\vec{\Omega}^*(S/T) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \dot{q}_j}(Mo, q, t) \cdot \dot{q}_j^*$$

Alors le champ des vv de Lagrange est un torseur

1.10 Annexe. Energie cinétique d'un système de N solides

$$2K(\Sigma/T) = \int_{\Sigma} \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right\|^2 dm$$

Donc

$$2K(\Sigma/T) = \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k dm + 2 \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \dot{q}_j dm + \int_{\Sigma} \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right\|^2 dm$$

$$2K(\Sigma/T) = \int_{\Sigma} \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right\|^2 dm$$

$$2K(\Sigma/T) = \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k dm + 2 \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \dot{q}_j dm + \int_{\Sigma} \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right\|^2 dm$$

$$2K(\Sigma/T) = \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k dm + 2 \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \dot{q}_j dm + \int_{\Sigma} \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right\|^2 dm$$

$$2K(\Sigma/T) = \alpha_{jk} \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k + 2\beta_j \dot{q}_j + \gamma$$

$$\alpha_{jk} = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_k} \right) dm$$

$$\beta_j = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right) dm$$

$$\gamma = \int_{\Sigma} \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right\|^2 dm$$

2 Mécanique analytique

2.1 Exercice : particule de masse m soumise à la pesanteur

Soit une masse ponctuelle m soumise à la gravité.

Soit $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ la position de cette masse avec \vec{e}_3 : axe vertical ascendant.

1. Déterminer l'équation du mouvement en \vec{e}_3 par l'approche Newtonienne
2. Déterminer l'équation du mouvement en \vec{e}_3 à l'aide du Lagrangien et des équations de Lagrange

Correction

Approche Newtonienne

PFD :

$$\vec{P} = -m \cdot g \cdot \vec{z} = m \cdot \vec{a}$$

Sur \vec{e}_3 :

$$-m \cdot g = m \cdot \ddot{x}_3$$

$$\ddot{x}_3 + g = 0$$

Approche analytique

Soit le Lagrangien de la masse ponctuelle m

$$L = K + U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - m \cdot g \cdot x_3 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - m \cdot g \cdot x_3$$

Equation de Lagrange pour x_3

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_3} = 0$$

On a

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = m \cdot \dot{x}_3$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} \right) = m \cdot \ddot{x}_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -m \cdot g$$

Donc

$$m \cdot \ddot{x}_3 + m \cdot g = 0$$

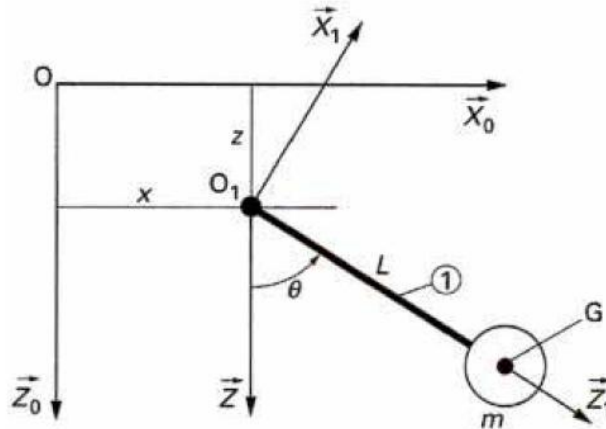
$$\ddot{x}_3 + g = 0$$

2.2 Exercice : pendule simple

Soit un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle m repérée par G , suspendue à un fil 1 de masse négligeable accroché à un bâti 0 en O_1 de coordonnées (x,z) constantes.

Q1 / Ecrire le PFD appliqué au pendule dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, en déduire l'équation du mouvement du pendule

Q2/ Par approche analytique, retrouver l'équation du mouvement du pendule



Correction

Question 1

PFD

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} + T.\vec{z}_1 = m\vec{a}$$

Vitesse et accélération de G

$$\vec{v} = L.\dot{\theta}.\vec{x}_1$$

$$\vec{a} = L.\ddot{\theta}.\vec{x}_1 - L.\dot{\theta}^2.\vec{z}_1$$

Pesanteur :

$$m.\vec{g} = mg\vec{z} = mg(\cos\theta\vec{z}_1 - \sin\theta\vec{x}_1)$$

PFD sur x1

$$-mg\sin\theta = m.L.\ddot{\theta}$$

$$l.\ddot{\theta} + g.\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}.\sin\theta = 0$$

Question 2

La vitesse du pendule est

$$\vec{v} = l \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{x1}$$

Par conséquent,

$$\|v\|^2 = l^2 \cdot \dot{\theta}^2$$

Energie cinétique K du pendule

$$K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot l^2 \cdot \dot{\theta}^2$$

Fonction U est

$$U = m \cdot g \cdot z = m \cdot g \cdot l \cdot \cos\theta$$

Lagrangien L

$$L = K + U$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot m \cdot l^2 \cdot \dot{\theta}^2 + m \cdot g \cdot l \cdot \cos\theta$$

Equation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m \cdot l^2 \cdot \dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta$$

L'équation de Lagrange devient

$$m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta = 0$$

Soit encore

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \cdot \sin\theta = 0$$

On retrouve ici une des équations obtenues lors de l'approche Newtonienne.

3 Références Bibliographiques

Brémont, Y. and Réocreux, P. (1995) *Mécanique du solide indéformable: calcul vectoriel, cinématique cours et exercices résolus classes préparatoires aux grandes écoles*. Paris: Ellipses (Mécanique, 1).

Brémont, Y. and Réocreux, P. (1996) *Mécanique du solide indéformable: statique cours et exercices résolus classes préparatoires aux grandes écoles, MPSI, PTSI, PSI, PSI*, MP, MP*, PT, PT*, premier cycle universitaire*. Paris: Ellipses (Mécanique, 2).

Brémont, Y. and Réocreux, P. (1998) *Mécanique du solide indéformable: cinétique, dynamique cours et exercices résolus classes préparatoires aux grandes écoles, PSI, PSI*, MP, MP*, PT, PT*, premier cycle universitaire*. Paris: Ellipses (Mécanique, 3).

Brossard, J.-P. (1996) 'Mécanique générale - Développement de la cinématique', *Physique Chimie* [Preprint]. Available at: <https://doi.org/10.51257/a-v1-a1663>.

Chaichian, M., Merches, I. and Tureanu, A. (2012) 'Principles of Analytical Mechanics', in Chaichian, M., Merches, I., and Tureanu, A., *Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 27–95. Available at: https://doi.org/10.1007/978-3-642-17234-2_2.

Fanchon, J.-L. (1996) *Guide de mécanique: sciences et technologies industrielles*. Paris: Nathan.

Nadot, Y. (2003) 'Cours mécanique analytique'. ISAE-ENSMA.

Sitographie

- <https://eduscol.education.fr/sti/sites/eduscol.education.fr/sti/files/ressources/techniques/1286/1286-151-p46.pdf>
- <http://userpages.umbc.edu/~rostamia/2014-09-math490/lecture-notes.pdf>
- www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/jmr/analytique.pdf