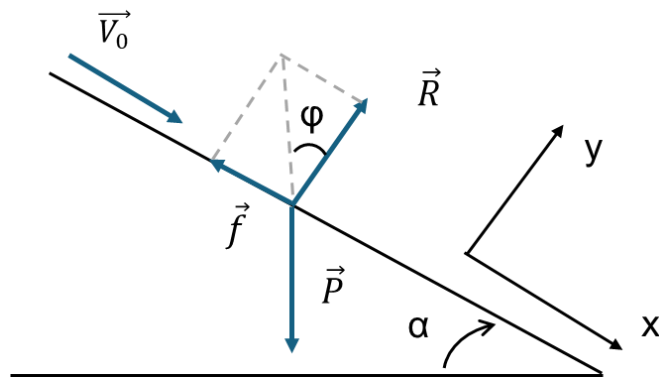


# Mécanique des solides indéformables

-



Frédéric Menan

<https://lesdocsduprof.com/>

[fmenan@cesi.fr](mailto:fmenan@cesi.fr)

11/2024

## Table des matières

<b>1</b>	<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>4</b>
1.1	DEFINITIONS.....	4
1.2	NOTION DE SOLIDE INDEFORMABLE.....	4
<b>2</b>	<b>ETUDE DES MECANISMES .....</b>	<b>5</b>
2.1	INTRODUCTION .....	5
2.2	ETAPES DE LA MODELISATION D'UN MECANISME.....	5
<b>3</b>	<b>STATIQUE .....</b>	<b>10</b>
3.1	NOTIONS DE FORCE ET DE MOMENT .....	10
3.2	STATIQUE PAR LES TORSEURS .....	11
3.3	STATIQUE AVEC FROTTEMENTS.....	14
<b>4</b>	<b>CINEMATIQUE .....</b>	<b>17</b>
4.1	PARAMETRAGE D'UN SOLIDE.....	17
4.2	MOUVEMENT : VECTEUR ROTATION D'UN SOLIDE .....	18
4.3	CINEMATIQUE DU POINT.....	18
4.4	VECTEUR ACCELERATION.....	22
<b>5</b>	<b>CINEMATIQUE DU SOLIDE.....</b>	<b>23</b>
5.1	TORSEUR CINEMATIQUE.....	23
5.2	MOUVEMENTS PARTICULIERS.....	23
5.3	MODELISATION DES LIAISONS : TORSEUR CINEMATIQUE ASSOCIE.....	24
5.4	RELATION ENTRE DEUX VECTEURS ACCELERATION D'UN SOLIDE .....	24
5.5	COMPOSITION DES MOUVEMENTS .....	24
5.6	CINEMATIQUE GRAPHIQUE .....	25
5.7	LOIS DE MOUVEMENT.....	26
5.8	LOI ENTREE SORTIE D'UN MECANISME.....	28
<b>6</b>	<b>CINETIQUE .....</b>	<b>30</b>
6.1	INERTIE .....	30
6.2	MOMENT D'INERTIE PAR-RAPPORT A UN AXE $u$ QUELCONQUE.....	33
<b>7</b>	<b>TORSEURS ASSOCIES.....</b>	<b>34</b>
7.1	TORSEUR CINETIQUE (OU TORSEUR DES QUANTITES DE MOUVEMENT).....	34
7.2	RESULTANTE CINETIQUE (OU QUANTITE DE MOUVEMENT) .....	34
7.3	MOMENT CINETIQUE .....	34

7.4	TORSEUR DYNAMIQUE (OU TORSEUR DES QUANTITES D'ACCELERATION) .....	36
<b>8</b>	<b>DYNAMIQUE</b> .....	<b>37</b>
8.1	PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE .....	37
8.2	ÉQUATIONS DU MOUVEMENT .....	38
<b>9</b>	<b>ENERGETIQUE</b> .....	<b>39</b>
9.1	ENERGIE CINETIQUE .....	39
<b>10</b>	<b>EQUILIBRAGE</b> .....	<b>46</b>
<b>11</b>	<b>STABILITE</b> .....	<b>48</b>
11.1	DEFINITIONS.....	48
11.2	STABILITE D'UNE POSITION D'EQUILIBRE.....	48
<b>12</b>	<b>EXERCICES</b> .....	<b>51</b>
12.1	EXERCICE : ANALYSE DES EQUATIONS DE CINEMATIQUE .....	51
12.2	EXERCICE : INERTIE EQUIVALENTE D'UN REDUCTEUR A ENGRENAGE.....	53
12.3	EXERCICE : LOI TRAPEZE .....	54
12.4	EXERCICE : LOI CYCLOÏDE.....	55
12.5	EXERCICE : LOI TRAPEZE QUELCONQUE.....	56
12.6	EXERCICE : COUPLE MOTEUR.....	57
<b>13</b>	<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b> .....	<b>65</b>

# 1 Introduction

## 1.1 Définitions

Etymologie du mot « mécanique » (Wikipedia)

Du latin *mechanica*, du grec *mêkhanikê* « *qui concerne les machines* »

Définition (Larousse.fr, Hachette, Bremont / Reocreux. Ellipses 1998)

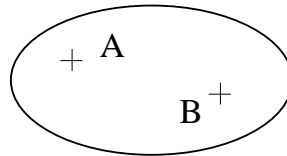
1-science ayant pour objet l'étude des forces et des mouvements. Elle est à la base du dimensionnement des mécanismes, des structures et ouvrages.

2-science de la construction et du fonctionnement des machines

La mécanique des solides indéformables : définition (Bremont / Reocreux. Ellipses 1998)

Etude des mouvements et des actions mécaniques entre les différents éléments d'un mécanisme

## 1.2 Notion de solide indéformable

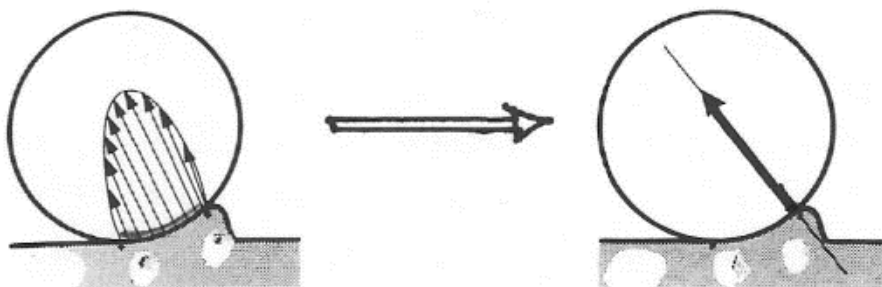


*Figure 1. Solide indéformable*

Pour tout  $t$ , pour tout point  $A$  et  $B$  d'un solide indéformable,  $\|\overrightarrow{AB}\| = \text{constante}$

Toutes les lois de la mécanique exploitées en MSI sont issues du cadre plus général formulé en Mécanique des Milieux Continus, avec une hypothèse réalisée sur le milieu : il ne se déforme pas.

Par ailleurs, une représentation schématique des efforts et moments entre solides est utilisée :



*Figure 2. Représentation schématique des efforts et moments entre solides*

## 2 Etude des mécanismes

Avant de passer aux calculs de cinématique, dynamique ou énergétique, il est nécessaire de passer d'un système « réel » à un système schématisé. C'est l'objet de ce chapitre.

### 2.1 Introduction

A partir d'un dessin technique, la modélisation d'un mécanisme demande une schématisation.

#### Schéma général d'analyse d'un problème de mécanique

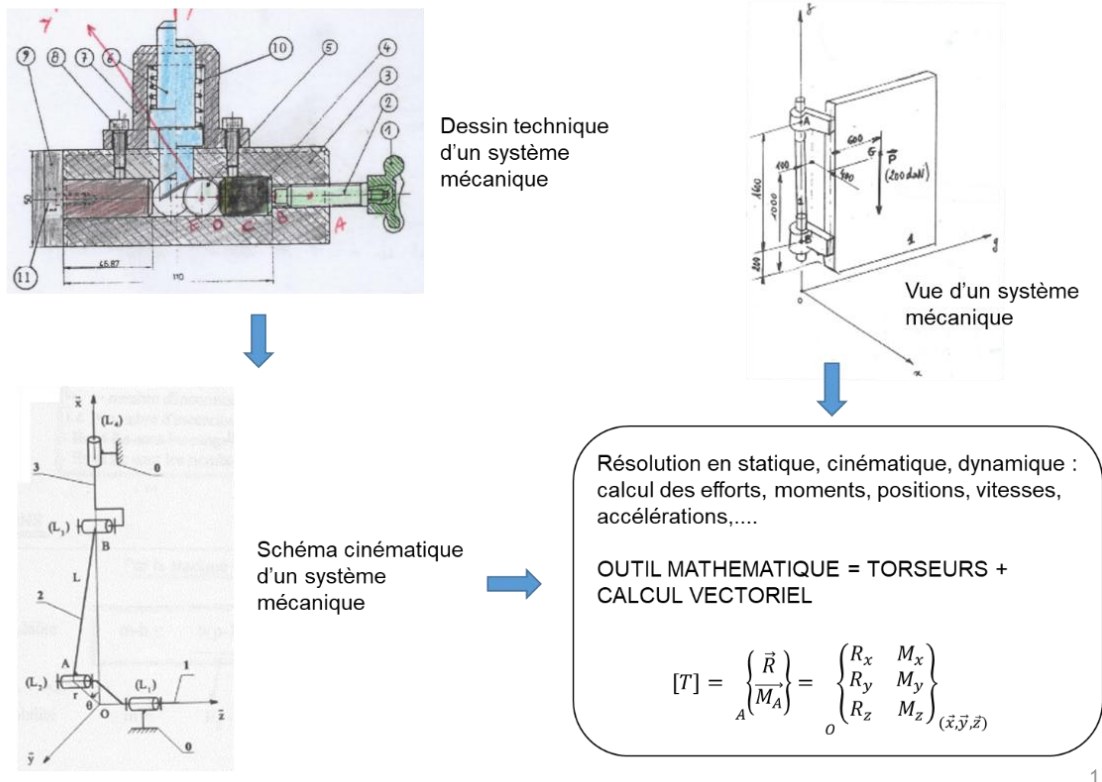


Figure 3. De l'étude des mécanismes vers la modélisation en mécanique des solides indéformables

En premier lieu, il s'agit d'identifier les liaisons entre chaque solide (pivot, glissière....), de former les classes d'équivalence cinématique, de réaliser le graphe des liaisons et le schéma cinématique minimal, de repérer sur le schéma cinématique minimal les centres des liaisons par des points, de créer un repère (origine et axes), puis d'écrire les torseurs associés aux liaisons.

### 2.2 Etapes de la modélisation d'un mécanisme

1. Définir les classes d'équivalence cinématiques (CEC)
2. Définir les liaisons entre chaque CEC
3. Faire le graphe des liaisons
4. Faire le schéma cinématique (technologique ou minimal)

5. Si nécessaire, établir le degré d'hyperstatisme du système

### 2.2.1 Classe d'équivalence cinématique

Une classe d'équivalence cinématique est un ensemble de pièces d'un mécanisme n'ayant pas de mouvement les unes par-rapport aux autres (encastrement). On parle aussi de sous-ensembles cinématiques.

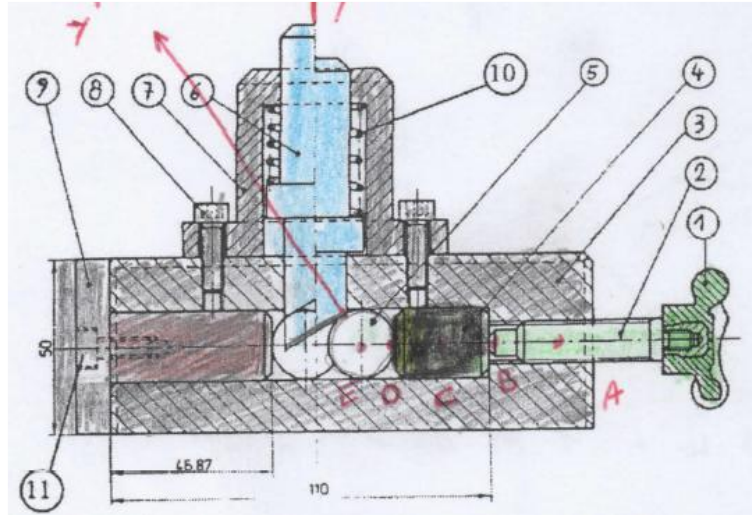


Figure 4. Exemples de chaînes cinématiques

### 2.2.2 Graphe des liaisons

Toute liaison entre 2 solides peut être représentée par des liaisons types dont le nombre est fini (pivot, pivot glissant, glissière....).

Le graphe des liaisons permet de faire le bilan des solides et des liaisons. Les classes d'équivalence cinématique sont placées aux sommets du polygone et les liaisons en sont les côtés. Les liaisons en série ou en parallèle sont mises en évidence.

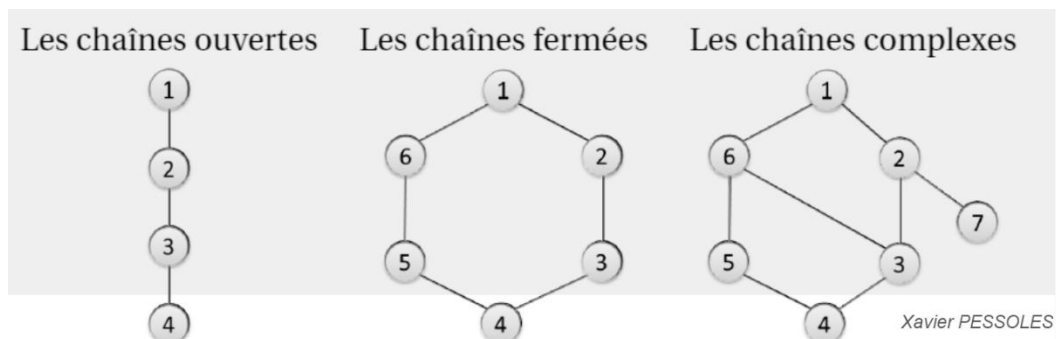


Figure 5. Exemples de graphes des liaisons

### 2.2.3 Schéma cinématique minimal

Le schéma cinématique minimal d'un mécanisme est une représentation géométrique du graphe des liaisons.

Pour construire ce schéma, on dessine les symboles normalisés des liaisons en respectant les caractéristiques géométriques relatives des liaisons. Par contre il est inutile d'avoir un positionnement dimensionnel précis. Les solides sont représentés par des traits continus qui relient les liaisons.

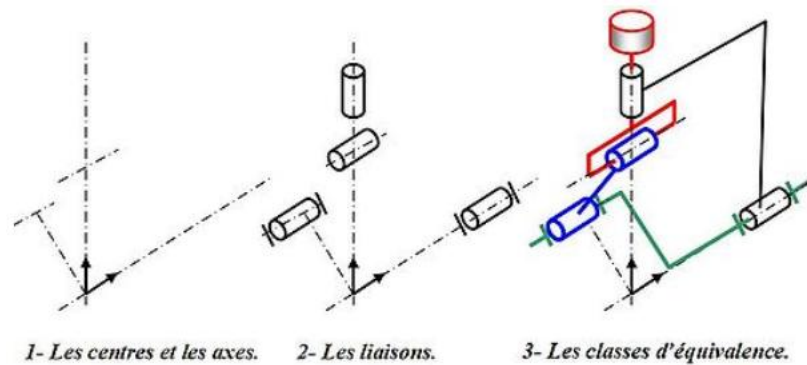
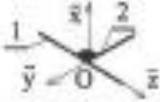
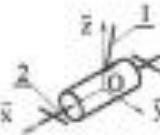
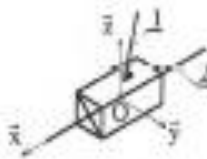
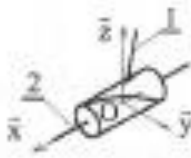
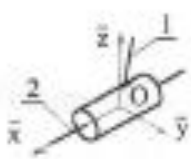
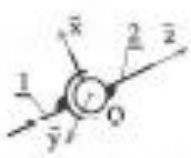
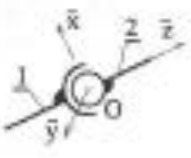
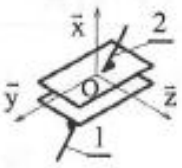
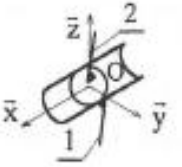
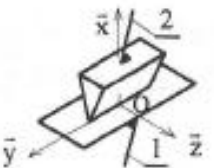



Figure 6. Mise en place du schéma cinématique minimal (wikipedia)

Une fois le schéma cinématique représenté, on peut modéliser les liaisons par des torseurs et commencer la résolution d'un problème de statique, cinématique, cinétique, dynamique, énergétique.

Degrés de liberté	Désignation	Schématisation spatiale	Torseur d'action mécanique transmissible $\{F(1 \rightarrow 2)\}$ au point O, dans la base $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$	Forme canonique
0	Liaison encastrement (pas de mouvement relatif)		${}_O \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$	En tout point
1	Liaison pivot d'axe $(O, \bar{x})$		${}_O \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$	En tout point de $(O, \bar{x})$
1	Liaison glissière de direction $\bar{x}$		${}_O \begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$	En tout point
1	Liaison hélicoïdale d'axe $(O, \bar{x})$ rotation et translation proportionnelles		${}_O \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$ $L = -p X$ (hélice à droite)	En tout point de $(O, \bar{x})$
2	Liaison pivot glissant d'axe $(O, \bar{x})$		${}_O \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$	En tout point de $(O, \bar{x})$
2	Liaison sphérique à deux axes $(O, \bar{x})$ et $(O, \bar{y})$		${}_O \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & N \end{Bmatrix}$	Au point O
3	Liaison rotule de centre O		${}_O \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$	Au point O



3	Liaison appui plan de normale $\bar{x}$		$_O \begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & M \\ 0 & N \end{Bmatrix}$	En tout point
4	Liaison linéaire annulaire de centre O et de direction $\bar{x}$		$_O \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$	Au point O
4	Liaison linéaire rectiligne de normale $\bar{x}$ et d'axe $(O, \bar{y})$		$_O \begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}$	En tout point du plan $(O, \bar{x}, \bar{y})$
5	Liaison ponctuelle au point O et de normale $\bar{x}$ dite de normale $(O, \bar{x})$		$_O \begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	En tout point de $(O, \bar{x})$
6	Liaison libre (pas de liaison)		$_O \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	En tout point

## 3 Statique

La statique a pour objet l'étude de l'équilibre des corps.

### 3.1 Notions de force et de moment

#### 3.1.1 Force

On représente une force à l'aide d'un vecteur. Ce dernier sera défini par son intensité, sa direction, son sens, son point d'application.

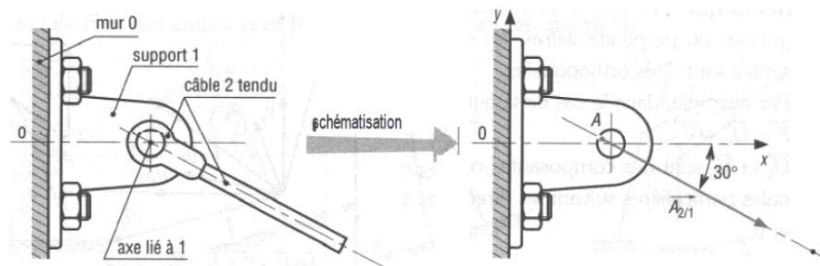


Figure 7. Modélisation d'une action mécanique par un vecteur force (Fanchon, 1998)

Soit un volume élémentaire  $dV$  de masse  $dm$ . Le poids du volume élémentaire est :

$$\overrightarrow{dp} = dm \cdot g \cdot \vec{z}$$

Le poids total du solide est

$$\vec{P} = \int_V \overrightarrow{dp}$$

On placera le point d'application du poids au centre de gravité du solide.

#### 3.1.2 Principe d'action réaction

Soient les solides 1 et 2 en contact au point A, alors

$$[\text{Action } 2 \rightarrow 1]_A = - [\text{Action } 1 \rightarrow 2]_A$$

#### 3.1.3 Moment

##### 3.1.3.1 1ère méthode: les bras de levier

Cette méthode est légère d'un point de vue mathématique et permet de comprendre physiquement la notion de moment, mais elle devient inapplicable dans l'espace, elle demande de bien visualiser le bras de levier et de bien intuitier le sens de rotation. Elle est donc sujette à de nombreuses erreurs de calcul.

Convention de signe : Si  $F$  fait tourner le solide autour de  $A$  dans le sens direct, le moment sera positif.

### 3.1.3.2 2ème méthode: produit vectoriel

Cette seconde méthode est plus rigoureuse. Elle est moins sujette aux erreurs et sera donc à appliquer dans tous les cas, même dans le plan.

Pour une force  $\vec{F}$  appliquée au point  $B$ , le moment en  $A$  de  $\vec{F}$  est défini par :

$$\overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$$

## 3.2 Statique par les torseurs

### 3.2.1 Torseur statique

Un torseur statique d'action mécanique est un système constitué de deux grandeurs :

1. Une résultante  $\vec{R}$
2. Un moment résultant  $\overrightarrow{M_A}$

Le torseur  $\{T\}$  se note au point  $A$  :  $\{T\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_A} \end{array} \right\} = \begin{array}{c} \left( \begin{array}{cc} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{array} \right)_{(x,y,z)}$

Remarque :  $\vec{R}$  et  $\overrightarrow{M_A}$  sont appelés les éléments de réduction au point  $A$  du torseur  $\{T\}$ .

Remarque : l'addition de torseurs n'est possible que s'ils sont exprimés au même point.

Un torseur peut être « déplacé » d'un point à un autre. La résultante ne change pas. Le moment se calcule comme ci-dessous : le torseur en  $B$  d'une action mécanique appliquée au point  $A$  est

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_A} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_B} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} \end{array} \right\}_B$$

#### 3.2.1.1 Torseurs associés aux liaisons normalisées

Toute liaison entre deux solides peut être modélisée par une ou plusieurs liaisons dites normalisées.

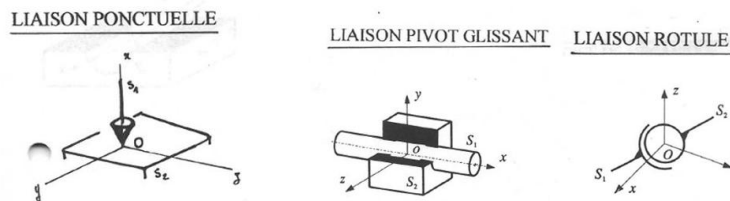


Figure 8. Exemples de liaisons normalisées

Les actions mécaniques au sein de ces liaisons normalisées peuvent être réduites à un torseur d'action mécanique.

### 3.2.2 Degré d'hyperstaticité d'un système

#### 3.2.2.1 Système isostatique / hyperstatique

Un solide, ou un ensemble de solides, qui possède des appuis ou des liaisons surabondantes par rapport à ce qui est strictement nécessaire au maintien de l'équilibre, est dit hyperstatique. Pour ces cas, les actions exercées ne peuvent pas être déterminées à partir des seules équations de la statique. On doit utiliser des équations supplémentaires liées aux déformations.

Un système non hyperstatique est dit isostatique (exactement autant de liaisons que nécessaires) ou hypostatique (pas assez de liaisons, solide pas en équilibre).

On se bornera dans ce cours à l'étude des systèmes isostatiques. Pour ces systèmes, le nombre d'inconnues de liaisons est égal au nombre d'équations. Le PFS seul suffit à résoudre ces systèmes.

Poutres usuelles	Exemples	Schémas	Observations
Poutre simple sur deux appuis			isostatique
Poutre continue			hyperstatique
Poutre encastrée (cantilever)			isostatique
Poutre encastrée avec appui à l'extrémité			hyperstatique

Figure 9. Notion de système isostatique et hyperstatique (Fanchon 1998)

Un solide, ou un ensemble de solides, qui possède des appuis ou des liaisons surabondantes par rapport à ce qui est strictement nécessaire au maintien de l'équilibre, est dit hyperstatique.

Pour ces cas, les actions exercées ne peuvent pas être déterminées à partir seulement avec le PFS. Les problèmes hyperstatiques sont abordés et résolus à partir d'équations supplémentaires liées aux déformations (objet de la RDM et donc des solides déformables), ou en supposant des jeux entre les liaisons (objet de l'étude des mécanismes et des mobilités associées).

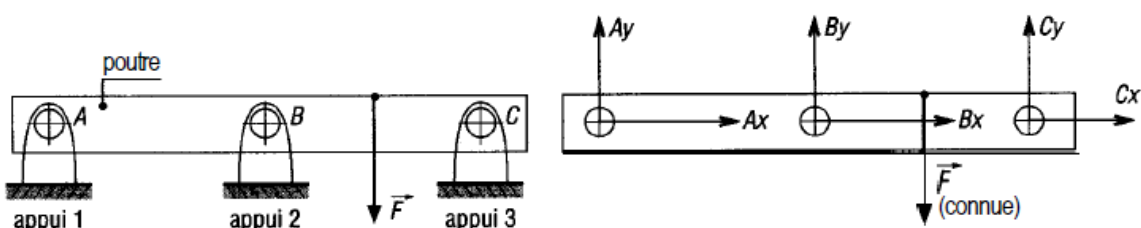


Figure 10. 6 inconnues. 3 équations. Structure hyperstatique de degré 3 (Fanchon 1998)

### 3.2.3 Principe fondamental de la statique (PFS)

Enoncé : un solide (S), en équilibre sous l'action de n torseurs d'actions mécaniques, reste à l'équilibre si la somme des n torseurs, tous exprimés au même point, est égale au torseur nul.

Autrement dit, (S) reste à l'équilibre si

$$\{T_{1/S}\}_A + \{T_{2/S}\}_A + \dots + \{T_{n/S}\}_A = \{0\}$$

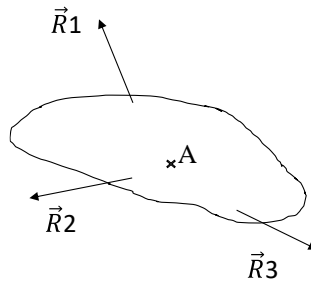


Figure 11. Solide S soumis à plusieurs actions mécaniques

Le PFS écrit sous forme de torseurs donne :

$$\begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \vec{R}_n \\ \vec{M}_n \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Sigma R_i} \\ \vec{\Sigma M_i} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

Le PFS mène, dans le vocabulaire « Mécanique des Solides Indéformables », à 2 théorèmes :  
Théorème de la résultante : la somme des résultantes est nulle et Théorème des moments : la somme des moments est nulle.

### 3.2.4 Résolution analytique d'un problème isostatique à l'aide des torseurs

#### 3.2.4.1 Hypothèses

Sauf indication contraire, on négligera le poids des pièces, et les liaisons seront considérées parfaites.

Une liaison définie comme parfaite vérifie les trois conditions suivantes :

- les surfaces de contact sont géométriquement parfaites
- le contact est supposé sans jeu
- il n'y a pas de frottement entre les surfaces en contact.

#### 3.2.4.2 Méthode de résolution

1. Associer au mécanisme un modèle et le paramétrer (schéma, liaisons, repère, origine). Pour cette étape on parle parfois d'étude des mécanismes industriels.
2. Identifier le ou les solides à isoler : ce sera le système S
3. Effectuer le bilan des actions mécaniques sur S (bilan sous forme de torseurs)

4. Vérifier que le système est isostatique
5. Si le système est isostatique, exprimer tous les torseurs au même point et appliquer le PFS projeté sur les axes du repère (3 équations dans le plan, 6 dans l'espace)

### 3.2.4.3 Remarques

La résolution d'un problème de statique suit toujours la même procédure. Cette procédure peut paraître lourde pour un problème « simple », mais elle est le meilleur moyen d'éviter les erreurs pour un problème complexe.

On essaiera toujours de se ramener à un problème plan et on étudiera les symétries du problème pour simplifier la démarche.

## 3.3 Statique avec frottements

### 3.3.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, les actions mécaniques de contact ont été schématisées par des vecteurs-forces perpendiculaires aux surfaces de contact : les frottements étaient négligés. Cette schématisation est possible dans de nombreux cas. Cependant, la prise en compte du frottement est parfois nécessaire, soit pour en diminuer les effets (pertes d'énergie, amélioration du rendement, etc.), soit pour l'utiliser avec bénéfice (freins, embrayages, courroies, équilibre ou stabilité de certains mécanismes, etc.).

### 3.3.2 Non-glissement : condition nécessaire et suffisante

Soient 2 solides 1 et 2 en contact ponctuel en P. Soient  $\pi$  le plan tangent commun en P à 1 et 2 et  $\vec{n}$  vecteur unitaire normal au plan  $\pi$ .

Dans le cas d'un contact ponctuel, le torseur d'action mécanique de 1 sur 2 est :

$$\{F(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

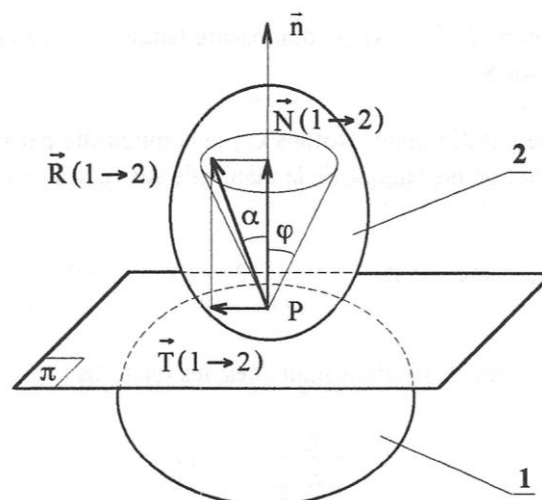


Figure 12. Notion de cône de frottement (Brémont and Réocreux, 1996)

D'après les lois de Coulomb, pour que le solide 2 ne glisse pas sur le solide 1 en P, il faut et il suffit que  $\vec{R}(1 \rightarrow 2)$  soit strictement à l'intérieur du cône de frottement.

càd :

$$\alpha < \phi$$

ou encore, en introduisant les composantes normale et tangentielle

$$\|\vec{T}(1 \rightarrow 2)\| < f \cdot \|\vec{N}(1 \rightarrow 2)\|$$

avec  $f = \tan \phi$  : coefficient de frottement

Par conséquent, le critère de glissement est :

$$\text{Pas de glissement si : } \|\vec{T}(1 \rightarrow 2)\| < f \cdot \|\vec{N}(1 \rightarrow 2)\|$$

$$\text{Glissement si : } \|\vec{T}(1 \rightarrow 2)\| = f \cdot \|\vec{N}(1 \rightarrow 2)\|$$

### 3.3.3 Notion d'arc-boutement

Deux solides en contact avec frottement sont dits arc-boutés l'un sur l'autre, sous l'effet d'actions mécaniques données, si les deux solides restent immobiles l'un par rapport à l'autre, quelle que soit l'intensité de ces actions mécaniques.

### 3.3.4 Coefficient de frottement

#### 3.3.4.1 Ordres de grandeur

$f$  dépend de la nature des matériaux, de l'état de surface (rugosité, orientation des stries), de la lubrification, de la vitesse de glissement.

Matériaux	$f_0$ à sec	$f_0$ avec lubr.	$f$ à sec	$f$ avec lubr.
Acier / Acier	0,2	0,13 à 0,1	0,1 à 0,08	0,1 à 0,04
Acier / Fonte grise	0,12	0,08 à 0,1	0,1	0,08 à 0,04
Acier / Graphite	0,4		0,15	0,1 à 0,05
Acier / Nylon	0,18		0,15	0,1
Acier / P. T. F. E.	0,15		0,1 à 0,08	0,1 à 0,03
Acier / Courroie caoutchouc	0,5			
Acier / Bronze	0,15 à 0,25	0,1 à 0,15	0,15 à 0,2	0,1 à 0,05
Pneumatique / Asphalte	0,3 à 0,6	0,2 à 0,4		

Tableau 1. Exemples de coefficients de frottement

### 3.3.4.2 Coefficient de frottement statique et dynamique

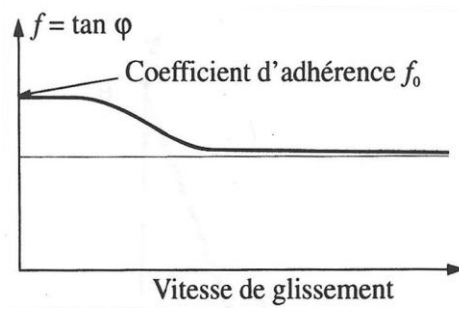


Figure 13. Coefficient de frottement statique et dynamique (Brémont and Réocreux, 1996)



## 4 Cinématique

Cinématique : du grec « *kinema* » : mouvement. La cinématique étudie le mouvement des corps, indépendamment des forces qui les produisent. On étudiera la trajectoire, la vitesse l'accélération...

### 4.1 Paramétrage d'un solide

Objectif : définir des paramètres permettant de représenter la position du solide 2 par-rapport à 1, soit la position du point  $O_2$  par-rapport à celle du point  $O_1$ , et la position angulaire.

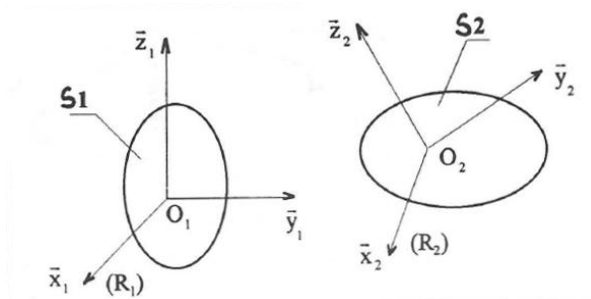


Figure 14. Paramétrage d'un solide

#### 4.1.1 Position dans l'espace

On définira le vecteur  $\overrightarrow{O_1O_2}$  en coordonnées cartésiennes, cylindriques, polaires ou sphériques.

#### 4.1.2 Position angulaire : orientation d'un solide dans l'espace

Positionner le solide 2 par-rapport au solide 1 revient à positionner le repère  $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  lié au solide 2 par-rapport au repère  $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  lié au solide 1. On parle d'équivalence solide – repère.

#### 4.1.3 Synthèse

Avec 6 paramètres on définit totalement la position et l'orientation d'un solide dans l'espace.

- Orientation d'un solide dans l'espace : 3 paramètres indépendants (angles)
- Position d'un solide dans l'espace : 3 paramètres indépendants (position de son centre)

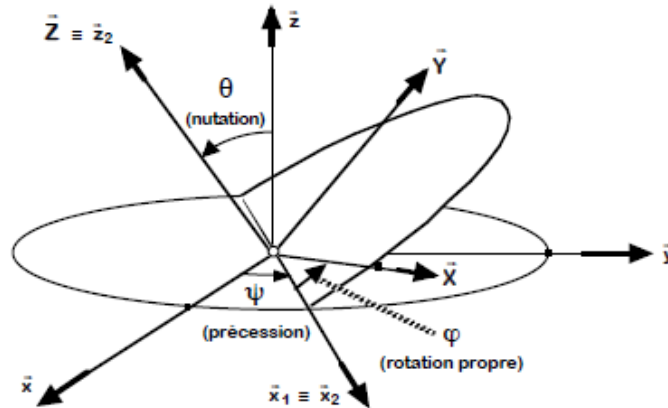


Figure 15. Angles d'Euler (références : Y Gourinat et Bremont-Reocreux)

## 4.2 Mouvement : vecteur rotation d'un solide

Soit le solide lié au repère  $(O, x_1, y_1, z_1)$ . Son vecteur rotation est par définition :

$$\vec{\Omega}(1/0) = \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0$$

Avec  $\dot{\theta}$  en rad/s.

Ce vecteur est porté par l'axe de rotation du solide. Son module est la vitesse de rotation. Le signe de sa composante dépend du sens de rotation.

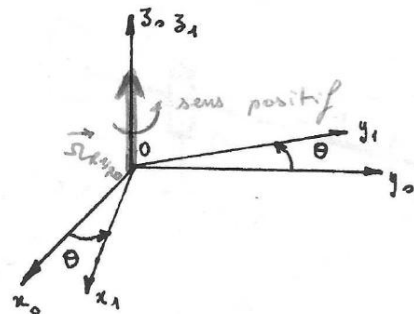


Figure 16. vecteur rotation d'un solide

## 4.3 Cinématique du point

### 4.3.1 Préliminaire mathématique : Dérivation vectorielle

Soit un vecteur  $\vec{u}$ . Par définition, la dérivée de  $\vec{u}$  par-rapport à  $t$  est

$$\left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \right]_R = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(t+h) - \vec{u}(t)}{h}$$

Dans la suite du cours, la variable  $t$  sera le temps.

On retrouve les propriétés générales de la dérivée :

Dérivée d'une somme de vecteurs

$$\left[ \frac{d}{dt} \vec{u} + \vec{v} \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \right]_R + \left[ \frac{d}{dt} \vec{v} \right]_R$$

Dérivée du produit d'une fonction scalaire par un vecteur

$$\left[ \frac{d}{dt} f \cdot \vec{u} \right]_R = \dot{f} \cdot \vec{u} + f \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \right]_R$$

Dérivée d'un produit scalaire

$$\left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \cdot \vec{v} \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \right]_R \cdot \vec{v} + \left[ \frac{d}{dt} \vec{v} \right]_R \cdot \vec{u}$$

Dérivée d'un produit vectoriel

$$\left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \wedge \vec{v} \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \right]_R \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \left[ \frac{d}{dt} \vec{v} \right]_R$$

On peut alors exprimer la dérivée d'un vecteur exprimé dans la base de dérivation :

Soit un vecteur  $\vec{u}$  exprimé dans la base du repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :  $\vec{u} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$ . Les composantes  $a, b, c$  sont fonctions de  $t$ . La dérivée de  $\vec{u}$  par-rapport à  $t$  dans  $R$ , compte tenu des propriétés précédentes :

$$\left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} a \cdot \vec{x} \right]_R + \left[ \frac{d}{dt} b \cdot \vec{y} \right]_R + \left[ \frac{d}{dt} c \cdot \vec{z} \right]_R$$

$$\left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \right]_R = \dot{a}\vec{x} + a \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{x} \right]_R + \dot{b}\vec{y} + b \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{y} \right]_R + \dot{c}\vec{z} + c \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{z} \right]_R$$

$$\text{or } \left[ \frac{d}{dt} \vec{x} \right]_R = 0, \left[ \frac{d}{dt} \vec{y} \right]_R = 0, \left[ \frac{d}{dt} \vec{z} \right]_R = 0$$

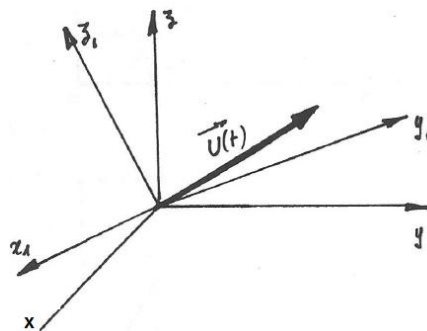
donc

$$\left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \right]_R = \dot{a}\vec{x} + \dot{b}\vec{y} + \dot{c}\vec{z}$$

La dérivée du vecteur s'obtient donc en dérivant ses composantes.

#### 4.3.2 Préliminaire mathématique : Changement de base de dérivation

Soit un vecteur  $\vec{u}$  exprimé dans la base du repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :  $\vec{u} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$



On peut alors écrire

$$\left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \vec{u}$$

Démonstration :

On traitera la démonstration pour le cas où  $\vec{z} = \vec{z}_1$ . On pose  $\theta$  angle entre  $\vec{x}_1$  et  $\vec{x}$ .

Soit le vecteur  $\vec{u}$  exprimé dans  $R_1$  :

$$\vec{u} = a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1 + c\vec{z}_1$$

La dérivée de  $\vec{u}$  dans R est :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \right]_R &= \left[ \frac{d}{dt} a \cdot \vec{x}_1 \right]_R + \left[ \frac{d}{dt} b \cdot \vec{y}_1 \right]_R + \left[ \frac{d}{dt} c \cdot \vec{z}_1 \right]_R \\ \left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \right]_R &= \dot{a}\vec{x}_1 + a \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{x}_1 \right]_R + \dot{b}\vec{y}_1 + b \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{y}_1 \right]_R + \dot{c}\vec{z}_1 + c \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{z}_1 \right]_R \\ \left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \right]_R &= \left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \right]_{R_1} + a \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{x}_1 \right]_R + b \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{y}_1 \right]_R + c \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{z}_1 \right]_R \end{aligned}$$

Comme  $\vec{z} = \vec{z}_1$ , on a  $\left[ \frac{d}{dt} \vec{z}_1 \right]_R = \vec{0}$

On suppose que le vecteur  $\vec{x}_1$  dépend de  $\theta(t)$ . Par conséquent,

$$\left[ \frac{d}{dt} \vec{x}_1 \right]_R = \left[ \frac{d}{d\theta} \vec{x}_1 \right]_R \cdot \frac{d\theta}{dt} = \left[ \frac{d}{d\theta} \vec{x}_1 \right]_R \cdot \dot{\theta}$$

De plus,

$$\left[ \frac{d}{d\theta} \vec{x}_1 \right]_R = \left[ \frac{d}{d\theta} (\cos\theta \cdot \vec{x} + \sin\theta \cdot \vec{y}) \right]_R = -\sin\theta \cdot \vec{x} + \cos\theta \cdot \vec{y} = \vec{y}_1$$

De même,

$$\left[ \frac{d}{d\theta} \vec{y}_1 \right]_R = -\vec{x}_1$$

Par conséquent,

$$\left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \right]_{R_1} + a\dot{\theta}\vec{y}_1 - b\dot{\theta}\vec{x}_1 = \left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \right]_{R_1} + \dot{\theta}\vec{z} \wedge (a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1 + c\vec{z}_1)$$

Soit

$$\vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\theta}\vec{z}$$

Alors

$$\left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \vec{u}$$

Cette relation est primordiale, elle sera constamment utilisée. Elle permet en effet, si le vecteur à dériver est constant dans  $R_1$ , de remplacer une dérivation vectorielle par un simple produit vectoriel.

### 4.3.3 Vecteur vitesse

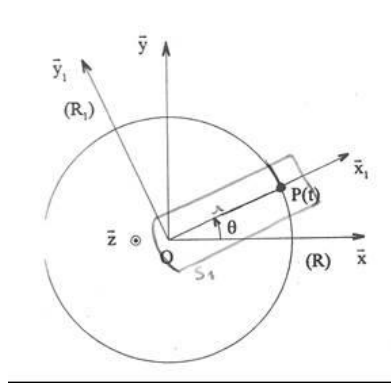
#### 4.3.3.1 Définition

Le vecteur vitesse du point P par-rapport au repère R, à l'instant t, est la dérivée dans R de son vecteur position par-rapport au temps :

$$\vec{V}(P/R) = \left[ \frac{d\vec{OP}(t)}{dt} \right]_R$$

#### 4.3.3.2 Exemple

Soit un point P en rotation autour d'un axe Oz tel que  $\vec{OP} = r_0 \cdot \vec{x}_1$ . On pose  $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_1)$  avec  $\theta = \omega \cdot t$ .  $r_0$  est une constante.



Par définition,  $\overrightarrow{\Omega_{R1/R}} = \dot{\theta} \cdot \vec{z} = \omega \cdot \vec{z}$

$$\vec{V}(P/R) = \left[ \frac{d\vec{OP}(t)}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} (r_0 \cdot \vec{x}_1) \right]_R = r_0 \cdot \left[ \frac{d}{dt} (\vec{x}_1) \right]_R + \vec{x}_1 \cdot \left[ \frac{d}{dt} (r_0) \right]_R = r_0 \cdot \left[ \frac{d}{dt} (\vec{x}_1) \right]_R$$

On utilise la règle de changement de base de dérivation :

$$\left[ \frac{d}{dt} (\vec{x}_1) \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} (\vec{x}_1) \right]_{R1} + \overrightarrow{\Omega_{R1/R}} \wedge \vec{x}_1$$

Or

$$\left[ \frac{d}{dt} (\vec{x}_1) \right]_{R1} = \vec{0}$$

Donc

$$\left[ \frac{d}{dt} (\vec{x}_1) \right]_R = \overrightarrow{\Omega_{R1/R}} \wedge \vec{x}_1 = \omega \cdot \vec{z} \wedge \vec{x}_1 = \omega \cdot \vec{y}_1$$

Finalement

$$\vec{V}(P/R) = \omega \cdot r_0 \cdot \vec{y}_1$$

## 4.4 Vecteur accélération

Le vecteur accélération du point P par-rapport au repère R, à l'instant t, est la dérivée par-rapport au temps, dans R, de son vecteur vitesse :

$$\vec{\Gamma}(P/R) = \left[ \frac{d\vec{V}(P/R)}{dt} \right]_R$$

## 5 Cinématique du solide

Dans ce chapitre on va définir un outil permettant, avec la connaissance du vecteur vitesse d'un point d'un solide, de connaître le vecteur vitesse de tous les autres points du solide.

### 5.1 Torseur cinématique

La relation entre les vecteurs vitesse de 2 points d'un solide 1 dans son mouvement par-rapport à R,

$$\vec{V}(B \in 1/R) = \vec{V}(A \in 1/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}(1/R) \quad \forall A, B \in 1$$

permet de définir le torseur suivant :

$$\{V(1/R)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(1/R) \\ \vec{V}(A \in 1/R) \end{Bmatrix}_A$$

Le torseur  $\{V(1/R)\}$  est appelé torseur cinématique du solide 1 par-rapport au repère R.

### 5.2 Mouvements particuliers

#### 5.2.1 Translation

Pour tout point A et B d'un solide 1 en translation par-rapport à R,  $\vec{V}(A \in 1/R) = \vec{V}(B \in 1/R)$

$$\text{Donc : } \{V(1/R)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}(A \in 1/R) \end{Bmatrix}_A$$

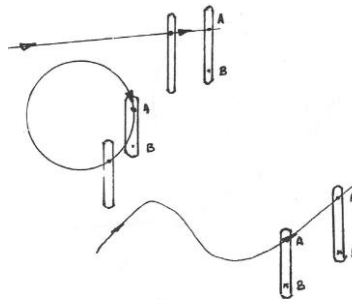


Figure 17. Translation rectiligne, translation circulaire, translation suivant une trajectoire quelconque

#### 5.2.2 Rotation

Soit le solide en rotation de la Figure 18. Pour écrire le torseur  $\{V(1/R)\}$ , on cherchera sur le solide  $S_1$  le point où l'écriture du torseur cinématique est la plus simple. Ici : en O.

$$\{V(1/R)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(1/R) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

Calcul de  $V(A \in 1/R)$

$$\{V(1/R)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(1/R) \\ \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}(1/R) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cdot \vec{z} \\ R \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1 \end{Bmatrix}_A$$

### 5.2.3 Roulement sans glissement

On suppose que 1 roule sans glisser le long de 0.  $\vec{V}(I \in 1/R_0) = \vec{0}$  donc  $\{V(1/R)\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(1/R) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I$

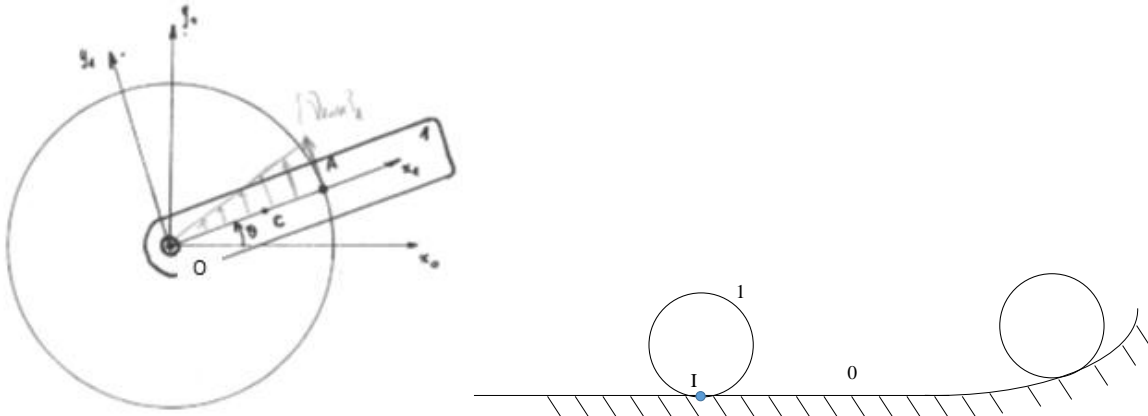


Figure 18. Gauche : Solide en rotation. Droite : Exemple de rotation instantanée

## 5.3 Modélisation des liaisons : torseur cinématique associé

Le nombre de degrés de liberté d'une liaison entre deux solides est le nombre de mouvements élémentaires indépendants que la liaison autorise (nb de rotations et de translations).

$$\begin{Bmatrix} \Omega_x & V_x \\ \Omega_y & V_y \\ \Omega_z & V_z \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} \quad \text{au point } O$$

## 5.4 Relation entre deux vecteurs accélération d'un solide

En dérivant la relation  $\vec{V}(B \in 1/R) = \vec{V}(A \in 1/R) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(1/R)$  on obtient

$$\vec{I}(B \in 1/R) = \vec{I}(A \in 1/R) + \vec{BA} \wedge \left[ \frac{d}{dt} (\vec{\Omega}(1/R)) \right]_R + \vec{\Omega}(1/R) \wedge (\vec{\Omega}(1/R) \cdot \vec{AB})$$

## 5.5 Composition des mouvements

### 5.5.1 Composition des vecteurs rotation

Exemple



$$\overrightarrow{\Omega_{S1/S0}} = \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_0 = \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_1 ; \overrightarrow{\Omega_{S2/S1}} = \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_2 = \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_1 \text{ alors}$$

$$\overrightarrow{\Omega_{S2/S0}} = \overrightarrow{\Omega_{S2/S1}} + \overrightarrow{\Omega_{S1/S0}}$$

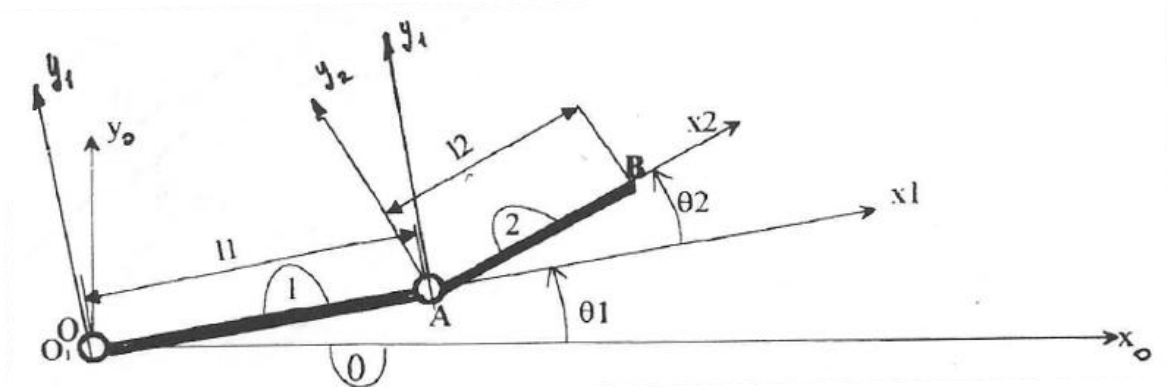


Figure 19. Rotation de n solides

Si on généralise au cas de n solides :  $\overrightarrow{\Omega_{Sn/S0}} = \overrightarrow{\Omega_{Sn/Sn-1}} + \dots + \overrightarrow{\Omega_{S1/S0}}$

### 5.5.2 Composition des vecteurs vitesse

$$\vec{V}(P \in 2/0) = \vec{V}(P \in 2/1) + \vec{V}(P \in 1/0)$$

### 5.5.3 Composition des accélérations

On dérive par-rapport au temps la relation de composition des vitesses

$$\vec{r}(B \in 2/0) = \vec{r}(B \in 2/1) + \vec{r}(B \in 1/0) + 2 \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{r}(B \in 2/1)$$

## 5.6 Cinématique graphique

Un solide est en mouvement plan lorsque tous les points de celui-ci se déplacent dans des plans parallèles à un plan de référence. Pour ce type de mouvement, la cinématique peut être résolue graphiquement.

### 5.6.1 Equiprojectivité des vecteurs vitesses

Soient deux points A et B d'un solide et  $\vec{V}_A$  et  $\vec{V}_B$  leurs vecteurs vitesse.

La projection orthogonale de  $\vec{V}_A$  sur AB est égale à la projection orthogonale de  $\vec{V}_B$  sur AB :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}(A \in 1/R) = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}(B \in 1/R)$$

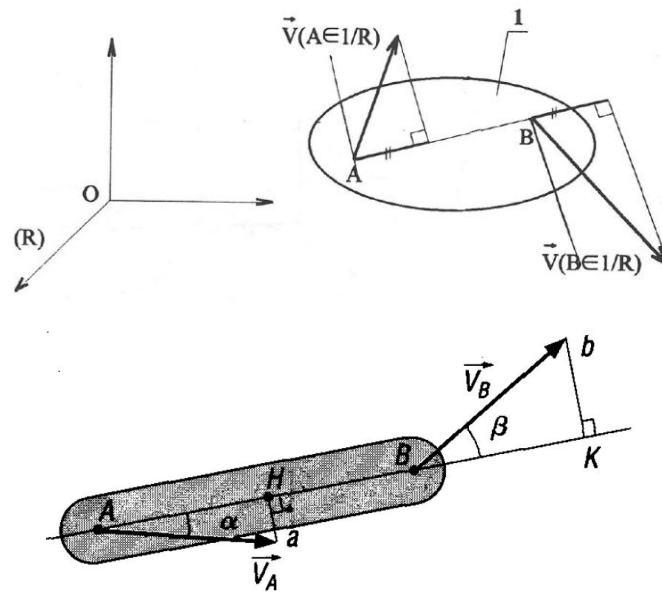


Figure 20. Equiprojectivité des vecteurs vitesse (Fanchon, 1998)

### 5.6.2 Centre Instantané de Rotation (CIR)

Pour tout solide en mouvement plan, à l'instant  $t$ , il existe un point  $I$  unique ayant une vitesse nulle. On parle de centre instantané de rotation CIR. Le CIR est situé à l'intersection des perpendiculaires aux vecteurs-vitesses du solide.

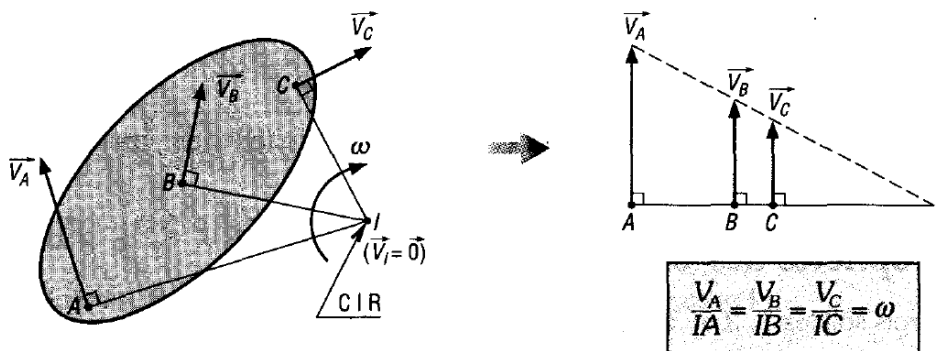


Figure 21. Centre Instantané de Rotation (Fanchon, 1998)

## 5.7 Lois de mouvement

### 5.7.1 Définition

Une loi de mouvement est une équation, sur la position, la vitesse, ou l'accélération, décrivant le mouvement à effectuer.

Le besoin est généralement la distance à parcourir, le temps pour parcourir cette distance, et la précision avec laquelle on demande d'atteindre la position.

On essaie, lors de la définition de la loi de mouvement, de réduire les efforts sur les mécanismes et de limiter l'énergie dépensée pour effectuer le mouvement demandé (notion d'optimisation).

### 5.7.2 Notion d'impulsion

L'impulsion est la dérivée de l'accélération, donc la dérivée troisième de la position. On parle aussi d'à-coup, de secousse, et de jerk en anglais.

Les à-coup sont générateurs de chocs et vibrations entraînant inconfort, usure du mécanisme par fatigue vibratoire, desserage d'assemblages...etc.. Ils sont donc à éviter dans un mécanisme.

Dans le cas de vitesses élevées et/ou si les parties en mouvement ont une inertie importante, la loi du mouvement pour effectuer la course doit être choisie avec précaution. En effet le point essentiel pour éviter des efforts, qui conduiraient notamment à des usures rapides et à des vibrations, est de rendre l'impulsion, ou saut (dérivée de l'accélération) aussi faible que possible. Les variations brusques d'accélération sont ainsi à éviter.

### 5.7.3 Valeurs maximales dans une loi de mouvement

La vitesse, par l'intermédiaire de l'énergie cinétique, gouverne l'énergie dépensée par le système.

L'accélération et l'inertie, que l'on retrouve dans la Principe Fondamental de la Dynamique, gouvernent la puissance que doivent fournir les actionneurs (couples, forces, vitesses de rotation et translation) et les efforts et moment dans les pièces du mécanisme.

L'impulsion donne lieu à des vibrations qui peuvent endommager la structure et induire du jeu dans les assemblages. Ces vibrations sont aussi génératrices de bruit et de manque de confort pour des passagers, par exemple.

Ainsi on souhaite souvent connaître les valeurs de la vitesse maximale, de l'accélération et de l'impulsion maximale. Soit X la distance à parcourir dans le temps T, on montre que

$$V_{max} = C_v \cdot \frac{X}{T}$$

$$a_{max} = C_a \cdot \frac{X}{T^2}$$

$$i_{max} = C_i \cdot \frac{X}{T^3}$$

$C_v$ ,  $C_a$ ,  $C_i$  : coefficients sans dimension dépendant de la loi de mouvement

Remarque : pour une rotation, X devient l'angle à parcourir et V, a et i sont les dérivées de la position angulaire

## 5.8 Loi entrée sortie d'un mécanisme

La loi entrée sortie d'un mécanisme est la relation entre les paramètres de position de la pièce d'entrée et les paramètres de position de la pièce de sortie du mécanisme. Elle s'exprime en écrivant la « fermeture géométrique » de la chaîne cinématique du mécanisme, le théorème de l'énergie cinétique ou le PFD.

Exemple : soit le micro-moteur illustré ci-dessous (moteur d'avions de modélisme).

Le schéma cinématique minimal de ce moteur est donné ci-dessous.

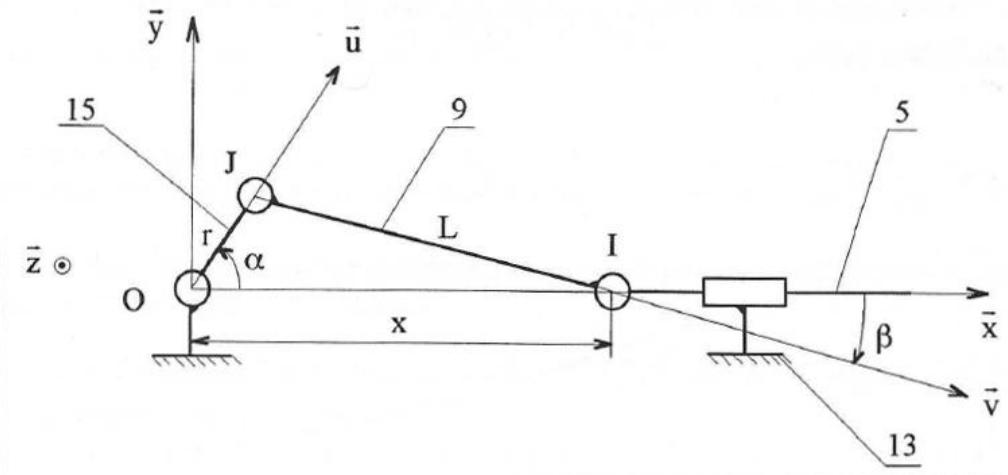


Figure 22. Loi entrée sortie d'un mécanisme (Brémont and Réocreux, 1995)

On peut définir :

$$\alpha = (\vec{x}, \vec{u}) ; \beta = (\vec{x}, \vec{v}) ; x = \overline{OI}$$

La loi d'entrée-sortie de ce mécanisme sera la relation entre les paramètres de position  $x$  et  $\alpha$ , c'est-à-dire la relation entre la translation du piston 5 et la rotation de l'arbre 15. La fermeture géométrique de la chaîne cinématique s'obtient en écrivant la relation vectorielle :

$$\vec{OI} + \vec{IJ} + \vec{JO} = \vec{0}$$

soit encore

$$x \cdot \vec{x} - L \cdot \vec{v} - r \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

En projetant sur  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  :

$$x - L \cdot \cos\beta - r \cdot \cos\alpha = 0$$

$$-L \cdot \sin\beta - r \cdot \sin\alpha = 0$$

Pour obtenir  $x$  en fonction de  $\alpha$ , on peut éliminer  $\beta$  dans ces deux équations :

$$x = L \cdot \cos\beta + r \cdot \cos\alpha = r \cdot \cos\alpha + L \sqrt{1 - \sin^2\beta} = r \cdot \cos\alpha + L \sqrt{1 - \frac{r^2}{L^2} \cdot \sin^2\alpha}$$

Finalement, la loi entrée-sortie du mécanisme est

$$x = r \cdot \cos\alpha + \sqrt{L^2 - r^2 \cdot \sin^2\alpha}$$

Le graphe de cette fonction a l'allure ci-dessous, pour  $\alpha \in [0, 180^\circ]$ ,  $r = 11\text{mm}$  et  $L = 40\text{mm}$

## 6 Cinétique

En ajoutant la notion de masse à la cinématique, on introduit la notion de cinétique.

### 6.1 Inertie

#### 6.1.1 Centre d'inertie

Le centre d'inertie est le barycentre des masses.

Pour un ensemble de points matériels ou de solides,

$$m \cdot \overrightarrow{OG} = \sum m_i \cdot \overrightarrow{OG_i}$$

Pour un solide

$$m \cdot \overrightarrow{OG} = \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} \cdot dm$$

Suivant la nature du solide, on prendra les éléments d'intégration volumiques  $dV$ , surfaciques  $dS$  ou linéiques  $dL$ .

Pour les solides ayant un centre géométrique et une masse volumique homogène (la même en tout point),  $G$  est confondu avec ce centre.

Pour les ensembles de solides dont les centres d'inertie sont connus ou pour un solide décomposable en solides élémentaires connus, appliquer la définition barycentrique :

$$m \cdot \overrightarrow{OG} = \sum m_i \cdot \overrightarrow{OG_i}$$

Pour les solides quelconques de formes simples, appliquer la définition intégrale

$$m \cdot \overrightarrow{OG} = \int_{M \in S} \overrightarrow{OM} \cdot dm$$

#### 6.1.2 Moment d'inertie

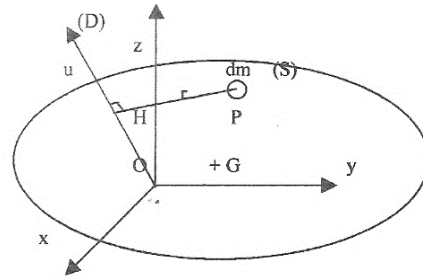
Il représente la répartition des masses par rapport à un point, un axe ou un plan.

Le moment d'inertie d'un solide  $S$ , par rapport à un axe  $D$  est par définition

$$I(S/D) = \int r^2 \cdot dm = \int PH^2 \cdot dm$$

Plus la matière du solide S est éloignée de D, plus le moment d'inertie de S par-rapport à l'axe D est grand, et plus il est difficile d'entraîner le solide S en rotation autour de l'axe D.

Dans un système de coordonnées cartésiennes, on a les expressions des moments d'inertie par rapport aux axes du repère :



$$I(S/Ox) = \int (y^2 + z^2). dm = A$$

$$I(S/Oy) = \int (x^2 + z^2). dm = B$$

$$I(S/Oz) = \int (x^2 + y^2). dm = C$$

### 6.1.3 Produit d'inertie

Les grandeurs ci-dessous sont appelées produits d'inertie par rapport aux axes du repère :

$$I(O, y, z) = \int yz. dm = D$$

$$I(O, z, x) = \int zx. dm = E$$

$$I(O, x, y) = \int xy. dm = F$$

Remarque : des produits d'inertie non nuls caractérisent l'absence de symétrie matérielle de S autour des axes du repère R. Pour réaliser un équilibre dynamique de S en rotation autour de l'axe (O,x), il faut annuler les produits E et F.

### 6.1.4 Matrice d'inertie

Soit un repère R (O,x,y,z) lié à un solide S de masse m. Soit un axe D de vecteur directeur  $\vec{u}$  passant par l'origine du repère. Soient (x,y,z) les coordonnées d'un point P de S dans R. Soient ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) les composantes de  $\vec{u}$  dans R.

Par définition, le moment d'inertie de S par-rapport à l'axe D est :

$$I(S/D) = \int PH^2. dm$$

Or

$$\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\| = \|\vec{u}\|. \|\overrightarrow{OP}\|. |\sin(\vec{u}, \overrightarrow{OP})|$$

$$\|\overrightarrow{PH}\| = \|\overrightarrow{OP}\|. |\sin(\vec{u}, \overrightarrow{OP})|$$

$\vec{u}$  étant un vecteur unitaire :

$$\|\overrightarrow{PH}\| = \|\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\|$$

Le vecteur  $\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}$  a pour composantes :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta z - \gamma y \\ -\alpha z + \gamma x \\ \alpha y - \beta x \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \|\overrightarrow{PH}\|^2 = (\beta z - \gamma y)^2 + (-\alpha z + \gamma x)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$$

$$\|\overrightarrow{PH}\|^2 = \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(x^2 + z^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx - 2\alpha\beta xy$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} I(S/D) = \alpha^2 \int (y^2 + z^2) dm + \beta^2 \int (x^2 + z^2) dm + \gamma^2 \int (x^2 + y^2) dm - 2\beta\gamma \int yz dm \\ - 2\gamma\alpha \int zx dm - 2\alpha\beta \int xy dm \end{aligned}$$

Finalement on a

$$I(S/D) = \alpha^2.A + \beta^2.B + \gamma^2.C - 2\beta\gamma.D - 2\gamma\alpha.E - 2\alpha\beta.F$$

Sous forme matricielle, cette égalité s'écrit

$$I(S/D) = {}^t\vec{u} \cdot \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \cdot \vec{u}$$

On reconnaît dans la matrice les moments et produits d'inertie de S par rapport aux axes du repère.

On notera alors  $I_o(S)$  la matrice d'inertie du solide S, en O, dans le repère (x,y,z).

$$I_o(S) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$$

### 6.1.5 Propriétés de la matrice d'inertie

Comme toute matrice symétrique, il existe une base  $(x_1, y_1, z_1)$  appelée base principale d'inertie telle que la matrice est diagonale, soit :

$$I_o(S) = \begin{pmatrix} A1 & 0 & 0 \\ 0 & B1 & 0 \\ 0 & 0 & C1 \end{pmatrix}_{(x_1, y_1, z_1)}$$

Les moments d'inertie sont appelés alors moments principaux d'inertie de (S) par rapport à O.

Les axes  $(O, x_1)$ ,  $(O, y_1)$ ,  $(O, z_1)$  sont appelés axes principaux d'inertie du solide (S) par rapport à O.

### 6.1.6 Théorème de Huygens généralisé

On cherche à exprimer la matrice d'inertie du solide (S) en O,  $I_o(S)$ , en fonction de celle en son centre d'inertie G,  $I_G(S)$



On pose

$$I_O(S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$I_G(S) = \begin{bmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Soit  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}$

On développe les expressions des moments et produits d'inertie pour chaque axe du repère, avec (a,b,c) les composantes de  $\overrightarrow{OG}$  dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

Par exemple

$$A = \int (y^2 + z^2) dm = \int [(b + GP_y)^2 + (c + GP_z)^2] dm$$

$$A = \int [b^2 + c^2 + GP_y^2 + GP_z^2 + 2.(b.GP_y + c.GP_z)] dm$$

Le dernier terme est nul d'après la définition du centre d'inertie, donc

$$A = \int [b^2 + c^2].dm + \int [GP_y^2 + GP_z^2].dm = [b^2 + c^2] \int dm + A_G = A_G + m.[b^2 + c^2]$$

Par le même raisonnement, on a :

$$\begin{aligned} A &= A_G + m.[b^2 + c^2] & D &= D_G + m.b.c \\ B &= B_G + m.[a^2 + c^2] & E &= E_G + m.a.c \\ C &= C_G + m.[b^2 + a^2] & F &= F_G + m.a.b \end{aligned}$$

## 6.2 Moment d'inertie par-rapport à un axe $\vec{u}$ quelconque

Par définition de la matrice d'inertie (voir §6.1.4), on a directement :

$$I(S, D) = \vec{u}. I_O(S). \vec{u}$$

Remarque : notion de rayon de gyration  $r_k$ . Si J est le moment d'inertie par-rapport à l'axe  $\vec{u}$  d'un solide de masse m, le rayon de gyration  $r_k$  est tel que  $J = m.r_k^2$ . Tout se passe comme si la masse m du solide était concentrée en un point situé à la distance  $r_k$  de l'axe  $\vec{u}$ .

## 7 Torseurs associés

### 7.1 Torseur cinétique (ou torseur des quantités de mouvement)

C'est le torseur associé aux masses et aux vitesses.

Soit un système matériel (E), masse m, centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère R.

Le torseur cinétique de E, dans son mouvement par rapport à R, en un point A, est défini par :

$$\{C(E/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in E} \vec{V}(P/R) dm \\ \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm = \vec{\sigma}_A(S/R) \end{array} \right.$$

### 7.2 Résultante cinétique (ou quantité de mouvement)

$$\int_{P \in E} \vec{V}(P/R) dm = m \cdot \vec{V}(G/R)$$

### 7.3 Moment cinétique

#### 7.3.1 Propriétés

$$\vec{\sigma}_B(E/R) = \vec{\sigma}_A(E/R) + m \cdot \vec{V}(G \in E/R) \wedge \overrightarrow{AB}$$

#### 7.3.2 Si le système E est un solide S

Si E est un solide S, alors

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P \in S/R) dm$$

Si A est un point du solide S :

$$\vec{V}(P \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{\Omega}(S/R)$$

Donc

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge [\vec{V}(A \in S/R) + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{\Omega}(S/R)] dm$$

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \left( \int_{P \in S} \vec{AP} dm \right) \wedge \vec{V}(A \in S/R) + \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge [\vec{PA} \wedge \vec{\Omega}(S/R)] dm$$

Le centre d'inertie G du solide S est défini par :  $m \cdot \vec{AG} = \int_{P \in S} \vec{AP} dm$

Par conséquent, le moment cinétique en A du solide S dans son mouvement par rapport à R est

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = m \cdot \vec{AG} \wedge \vec{V}(A \in S/R) + I_A(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R)$$

Cas particuliers

- A est fixe dans R :  $\vec{\sigma}_A(S/R) = I_A(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R)$
- A est confondu avec le centre d'inertie G :  $\vec{\sigma}_A(S/R) = I_G(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R)$
- S est en translation dans R :  $\vec{\Omega}(S/R) = \vec{0}$

Démonstration de la formule ci-dessous

$$I_A(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R) = \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge [\vec{PA} \wedge \vec{\Omega}(S/R)] dm$$

Soit  $\vec{AP} = (x, y, z)$  et  $\vec{\Omega}(S/R) = (\Omega_x; \Omega_y; \Omega_z)$

Alors

$$\begin{aligned} \vec{AP} \wedge (\vec{PA} \wedge \vec{\Omega}(S/R)) &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \left( \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \Omega_y \cdot z - \Omega_z \cdot y \\ -\Omega_x \cdot z + \Omega_z \cdot x \\ \Omega_x \cdot y - \Omega_y \cdot x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dots \\ -\Omega_x \cdot xz + \Omega_z \cdot x^2 - \Omega_y \cdot yz + \Omega_z \cdot y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sur tout le solide

$$\int_{P \in S} (\vec{AP} \wedge (\vec{PA} \wedge \vec{\Omega}(S/R))) dm = \begin{pmatrix} \dots \\ \int -\Omega_x \cdot xz \cdot dm - \Omega_y \cdot yz \cdot dm + (x^2 + y^2) \cdot \Omega_z \cdot dm \end{pmatrix}$$

Or

$$I_A(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot \Omega_x - F \cdot \Omega_y - E \cdot \Omega_z \\ -F \cdot \Omega_x - B \cdot \Omega_y - D \cdot \Omega_z \\ -E \cdot \Omega_x - D \cdot \Omega_y + C \cdot \Omega_z \end{pmatrix}$$

$$I_A(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R) = \begin{pmatrix} \dots \\ \int -\Omega_x \cdot xz \cdot dm - \Omega_y \cdot yz \cdot dm + (x^2 + y^2) \cdot \Omega_z \cdot dm \end{pmatrix}$$

## 7.4 Torseur dynamique (ou torseur des quantités d'accélération)

Soit un système E, de masse m, de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère R.

Le torseur dynamique est défini, en un point A quelconque, par :

$$\{D(E/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} \int\limits_{P \in E} \vec{\Gamma}(P/R) dm \\ \int\limits_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R) dm = \overrightarrow{\delta_A}(E/R) \end{array} \right.$$

Résultante dynamique :

$$\int\limits_{P \in E} \vec{\Gamma}(P/R) dm = m \cdot \vec{\Gamma}(G/R)$$

Moment dynamique :

$$\overrightarrow{\delta_A}(E/R) = \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_A(E/R) \right]_R + m \cdot \vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(G/R)$$

## 8 Dynamique

La dynamique étudie les mouvements des solides en relation avec les forces qui les produisent.

On peut traiter un problème de dynamique par application du Principe Fondamental de la Dynamique, approche énergétique (théorème de l'énergie cinétique), approche basée sur la quantité de mouvement (les choses et dynamiques rapides sont traités à l'aide de cette approche), les équations de Lagrange (mécanique analytique)

### 8.1 Principe Fondamental de la dynamique

#### 8.1.1 Conditions d'application et Hypothèses

- La masse du solide reste constante.
- Les vitesses sont faibles devant la vitesse de la lumière.
- Les liaisons sont supposées parfaites et sans frottement.
- On se place dans un repère galiléen.

#### 8.1.2 Enoncé

Il existe au moins un repère galiléen  $R_G$  tel que, pour tout ensemble matériel  $E$ , le torseur dynamique de  $E$  est égal au torseur des actions extérieures à  $E$ .

$$\{D(E/R_G)\} = \{F(Ext \rightarrow E)\}$$

Ceci se traduit au niveau vectoriel par les deux théorèmes ci-dessous, aussi appelés théorèmes généraux de la dynamique.

#### 8.1.3 Théorème de la résultante dynamique

Pour tout système matériel  $E$  en mouvement par rapport au repère galiléen  $R_G$ , la résultante dynamique de  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R_G$  est égale à la résultante du torseur des actions mécaniques extérieures à  $E$ .

$$m.\vec{\Gamma}(G/R_G) = \vec{R}(Ext \rightarrow E)$$

#### 8.1.4 Théorème du moment dynamique

Pour tout système matériel  $E$  en mouvement par rapport au repère galiléen  $R_G$ , le moment dynamique de  $E$  dans son mouvement par rapport à  $R_G$  est égal, en tout point  $A$ , au moment du torseur des actions mécaniques extérieures à  $E$ .

$$\vec{\delta}_A(E/R_G) = \vec{M}_A(Ext \rightarrow E)$$

## 8.2 Équations du mouvement

Soit un système matériel  $E$  dont la position dépend de  $n$  paramètres  $q_i(t)$ ,  $i=1,\dots,n$ .

Une équation du mouvement est une équation différentielle du second ordre dans laquelle ne figure aucune composante inconnue d'action mécanique.

Les conditions initiales du mouvement de  $E$  par rapport à  $R_G$ , à l'instant  $t_0$ , sont données par les  $n$  paramètres  $q_i(t_0)$  et leurs dérivées premières  $\dot{q}_i(t_0)$ .

Une intégrale première du mouvement est une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$f(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = \text{constante}$$

obtenue par intégration d'une équation du mouvement.

## 9 Energétique

### 9.1 Energie cinétique

L'énergie cinétique d'un système matériel E dans son mouvement par-rapport à un repère R est :

$$T(E/R) = \frac{1}{2} \cdot \int_{P \in E} (\vec{V}(P/R))^2 dm$$

#### 9.1.1 Pour un solide S

Pour un solide S, masse m, centre d'inertie G, en mouvement par-rapport à un repère R, on peut écrire :

$$2.T(S/R) = \int_{P \in S} \vec{V}(P \in S/R) \cdot \vec{V}(P \in S/R) \cdot dm$$

Soit un point A lié au solide S, alors (voir cours cinématique) :

$$\vec{V}(P \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{\Omega}(S/R)$$

Ainsi :

$$2.T(S/R) = \int_{P \in S} [\vec{V}(A \in S/R) + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{\Omega}(S/R)] \cdot \vec{V}(P \in S/R) \cdot dm$$

$$2.T(S/R) = \vec{V}(A \in S/R) \cdot \int_{P \in S} \vec{V}(P \in S/R) \cdot dm + \vec{\Omega}(S/R) \cdot \int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P \in S/R) \cdot dm$$

Remarque :  $(\overrightarrow{PA} \wedge \vec{\Omega}(S/R)) \cdot \vec{V}(P \in S/R) = \overrightarrow{PA} \cdot (\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{V}(P \in S/R))$

On reconnaît dans cette expression la résultante cinétique de S dans son mouvement par-rapport à

R :  $\int_{P \in S} \vec{V}(P \in S/R) \cdot dm$  et le moment cinétique en A de S dans son mouvement par-rapport à R :

$$\int_{P \in S} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P \in S/R) \cdot dm.$$

Donc  $2.T(S/R) = \vec{V}(A \in S/R) \cdot m \cdot \vec{V}(G \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{\sigma}_A(S/R)$

Finalement, le double de l'énergie cinétique T(S/R) de S dans son mouvement par-rapport au repère R est le produit de son torseur cinétique par son torseur cinématique

$$2.T(S/R) = \{C(S/R)\} \cdot \{V(S/R)\}$$

#### 9.1.2 Cas particuliers

Si le point A est fixe dans R

$$2. T(S/R) = \vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{\sigma}_A(S/R) = \vec{\Omega}(S/R) \cdot I_A(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R)$$

Si le point A est confondu avec le centre d'inertie G

$$2. T(S/R) = m \cdot \vec{V}(G \in S/R)^2 + \vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{\sigma}_G(S/R) = m \cdot \vec{V}(G \in S/R)^2 + \vec{\Omega}(S/R) \cdot I_G(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R)$$

Si le solide S est en rotation autour de l'axe (O,  $\vec{z}$ ) du repère R (O,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ )

Soient :  $I_{Oz}$  moment d'inertie de S par rapport à l'axe (O,  $\vec{z}$ ), et  $\vec{\Omega}(S/R) = \omega \cdot \vec{z}$ , alors

$$2. T(S/R) = I_{Oz} \cdot \omega^2$$

Si le solide S est en mouvement plan dans le plan (O,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ) du repère R (O,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ )

Soient :  $I_{Gz}$  moment d'inertie de S par rapport à l'axe (G,  $\vec{z}$ ), et  $\vec{\Omega}(S/R) = \omega \cdot \vec{z}$ , alors

$$2. T(S/R) = m \cdot \vec{V}(G \in S/R)^2 + I_{Gz} \cdot \omega^2$$

### 9.1.3 Théorèmes de Koenig

Soit R (O,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ ) le repère de référence par rapport auquel est étudié le mouvement du système matériel E de masse m et de centre d'inertie G.

Soit le repère d'origine G, centre de gravité,, de même base que R. On le note  $R_G$  (G,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$ ).

Pour le moment cinétique :

$$\vec{\sigma}_A(E/R) = \vec{\sigma}_G(E/R_G) + \vec{\sigma}_A(m, G/R)$$

Pour le moment dynamique :

$$\vec{\delta}_A(E/R) = \vec{\delta}_G(E/R_G) + \vec{\delta}_A(m, G/R)$$

Pour l'énergie cinétique :

$$T(E/R) = T(E/R_G) + T(m, G/R)$$

### 9.1.4 Puissance

#### 9.1.4.1 Rappels

Soit une force  $\vec{F}$ , appliquée en un point M se déplaçant à la vitesse  $\vec{V}(M/R)$ . La puissance instantanée P développée par  $\vec{F}$  est

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V}(M/R)$$

La puissance est la quantité de travail fournie par unité de temps. On parle aussi de débit d'énergie.

Unité : J/s. On utilisera le Watt : 1 Watt = 1 J/s

#### 9.1.4.2 Puissance des efforts extérieurs appliqués à un solide S

Le champ des vecteurs vitesses est décrit, en un point A, par le torseur cinématique :



$$\{V(S/R)\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) \end{array} \right\}$$

Pour un solide, partant de la définition de la puissance :

$$P(E \rightarrow S/R) = \int_{M \in S} \vec{dF} \cdot \vec{V}(M/R)$$

$$P(E \rightarrow S/R) = \int_{M \in S} \vec{dF} \cdot [\vec{V}(A \in S/R) + \vec{MA} \wedge \vec{\Omega}(S/R)]$$

$$P(E \rightarrow S/R) = \vec{V}(A \in S/R) \cdot \int_{M \in S} \vec{dF} + \vec{\Omega}(S/R) \cdot \int_{M \in S} \vec{AM} \wedge \vec{dF}$$

On reconnaît les éléments du torseur statique de l'action mécanique d'un système E sur le solide S, donc

$$P(E \rightarrow S/R) = \vec{V}(A \in S/R) \cdot \vec{R}(E \rightarrow S) + \vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{M}_A(E \rightarrow S)$$

Par conséquent, la puissance de l'action mécanique d'un système E sur le solide S est le produit du torseur d'action mécanique de E sur S, par le torseur cinématique de S dans son mouvement par rapport à R

$$P(E \rightarrow S/R) = \{F(E \rightarrow S)\} \cdot \{V(S/R)\}$$

#### 9.1.4.3 Cas d'une liaison parfaite entre deux solides

Deux solides 1 et 2 ont une liaison parfaite, d'un point de vue énergétique, si, quel que soit le mouvement autorisé par la liaison, la puissance des actions mutuelles entre les solides 1 et 2 est nulle, soit :

$$P(1 \leftrightarrow 2) = 0$$

Soit encore :

$$P(1 \leftrightarrow 2) = \{F(1 \rightarrow 2)\} \cdot \{V(2/1)\} = 0$$

#### 9.1.4.4 Puissance des actions mutuelles entre deux systèmes matériels

La puissance, à la date t, des actions mutuelles entre les deux systèmes matériels  $\Sigma$  et E, dans leur mouvement par rapport à RG, est

$$P(\Sigma \leftrightarrow E) = P(\Sigma \rightarrow E/R) + P(E \rightarrow \Sigma/R)$$

#### 9.1.5 Travail

Le travail représente l'énergie à fournir à un système pour l'amener d'un état initial à un état final.

Le travail, entre les instants t1 et t2, de l'action mécanique du système matériel  $\Sigma$  sur le système matériel E, dans le mouvement de E par rapport à R, est

$$W_{t_1}^{t_2}(\Sigma \rightarrow E/R) = \int_{t_1}^{t_2} P(\Sigma \rightarrow E/R) dt$$

### 9.1.6 Energie potentielle

L'énergie potentielle est de l'énergie en réserve que possède le système matériel du fait de sa position (eau d'un barrage, solide en altitude....) ou de sa forme (ressort....). Un système matériel possède de l'énergie s'il a la capacité de produire un travail.

#### 9.1.6.1 Energie potentielle associée à une action mécanique extérieure

On peut associer une énergie potentielle à l'action mécanique d'un système matériel  $\Sigma$  sur un système matériel  $E$ , dans le mouvement de  $E$  par-rapport au repère  $R$ , s'il existe une fonction scalaire  $E_p(\Sigma \rightarrow E/R)$  telle que :

$$P(\Sigma \rightarrow E/R) = -\frac{d}{dt} E_p(\Sigma \rightarrow E/R)$$

L'énergie potentielle est une fonction primitive de la puissance. Elle est donc définie à une constante près, que l'on néglige car on calcul en général une variation d' $E_p$ , ou une puissance par dérivation de l' $E_p$ .

Quand il existe une énergie potentielle, on dit que l'action mécanique dérive d'une énergie potentielle.

#### 9.1.6.2 Exemple : énergie potentielle de la pesanteur

L'énergie potentielle d'un solide  $S$  est donnée par la formule :

$$E_p = m \cdot g \cdot z$$

$$E_{p1} - E_{p2} = mg(z_1 - z_2) = m \cdot g \cdot h$$

L'énergie potentielle est égale au travail que peut fournir le solide s'il tombe sur le sol

### 9.1.7 Energie cinétique

Pour un solide  $S$  en translation rectiligne, on a :  $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ .  $m$  : en kg ;  $v$  : en m/s ;  $E_c$  : en J

Pour un solide en rotation, l'élément  $M$  de masse  $dm$ , de vitesse  $V_M = \omega \cdot r$ , a une énergie cinétique  $dE_c$  égale à :  $dE_c = \frac{1}{2} \cdot (\omega \cdot r)^2 \cdot dm$

L'énergie cinétique totale du solide  $S$  en rotation est donc :

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \sum r^2 \cdot dm = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

Le terme  $J = \sum r^2 \cdot dm$  est le moment d'inertie de  $S$  par-rapport à l'axe de rotation.  $J$  en  $m^2 \cdot kg$  ;  $\omega$  en rad/s ;  $E_c$  en J

## 9.1.8 Théorème de l'énergie cinétique

### 9.1.8.1 Théorème de l'énergie cinétique pour un solide

Partons du PFD appliqué à un solide S :

$$\{D(S/R_G)\} = \{F(Ext \rightarrow S)\}$$

On multiplie chaque membre par le torseur cinématique :

$$\{D(S/R_G)\} \cdot \{V(S/R_G)\} = \{F(Ext \rightarrow S)\} \cdot \{V(S/R_G)\}$$

A droite on reconnaît la puissance des actions mécaniques extérieures à S.

A gauche, on peut montrer que (voir références 3 et 5) :

$$\begin{aligned} \{D(S/R_G)\} \cdot \{V(S/R_G)\} &= \int_{M \in S} \vec{V}(M \in S/R_G) \cdot \vec{F}(M \in S/R_G) dm. \\ \{D(S/R_G)\} \cdot \{V(S/R_G)\} &= \int_{M \in S} \vec{V}(M \in S/R_G) \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{V}(M \in S/R_G) \right]_{R_G} dm. \\ \{D(S/R_G)\} \cdot \{V(S/R_G)\} &= \frac{1}{2} \int_{M \in S} \frac{d}{dt} [\vec{V}(M \in S/R_G)]_{R_G}^2 dm. \\ \{D(S/R_G)\} \cdot \{V(S/R_G)\} &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{M \in S} \vec{V}(M \in S/R_G)^2 dm. = \frac{d}{dt} T(S/R_G) \end{aligned}$$

On peut maintenant énoncer le Théorème de l'énergie cinétique :

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un solide S dans son mouvement par rapport à au repère galiléen  $R_G$  est égale à la puissance des actions mécaniques extérieures à S

$$\frac{d}{dt} T(S/R_G) = P(Ext \rightarrow S/R_G)$$

Le théorème de l'énergie cinétique est seulement une conséquence du PFD et n'apporte pas de nouvelle loi physique. Cependant dans de nombreux cas il permet de facilement obtenir la loi entrée-sortie d'un mécanisme (la relation entre les paramètres de position des différents solides).

Un inconvénient est de ne fournir qu'une équation scalaire (là où le PFD peut en fournir 6), donc dans un mécanisme comportant de nombreux paramètres, le théorème de l'énergie cinétique ne suffit plus.

### 9.1.8.2 Théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un ensemble E de solides dans son mouvement par rapport au repère galiléen  $R_G$  est égale à la somme de la puissance des actions mécaniques extérieures à E dans son mouvement par rapport à  $R_G$  et des puissances des actions mutuelles entre chaque solide E :

$$\frac{d}{dt}T(E/R_G) = P(Ext \rightarrow E/R_G) + \sum_{i=j=1, i < j}^n P(S_i \leftrightarrow S_j)$$

### 9.1.9 Rendement

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à un système matériel E constitué de n solides  $S_i$ , en mouvement par rapport au repère galiléen RG s'énonce :

$$\frac{d}{dt}T(E/R_G) = P(Ext \rightarrow E/R_G) + \sum_{i=j=1, i < j}^n P(S_i \leftrightarrow S_j)$$

On peut alors définir :

- $P_{re\grave{c}ue}$  par E : somme des puissances positives
- $P_{dissip\acute{e}e}$  par E dans les liaisons entre solides de E et entre solides de E et l'extérieur (puissances négatives, dissipées sous forme de chaleur par frottement)
- $P_{donn\acute{e}e}$  par E : puissances fournies (non dissipées), négatives quand on fait le bilan sur E

Le théorème de l'énergie cinétique peut alors s'écrire :  $\frac{dT}{dt} = P_{re\grave{c}ue} + P_{donn\acute{e}e} + P_{dissip\acute{e}e}$

Si l'énergie cinétique est constante

$$P_{re\grave{c}ue} + P_{donn\acute{e}e} + P_{dissip\acute{e}e} = 0$$

On définit une puissance motrice :  $P_{motrice} = P_{re\grave{c}ue}$  et une puissance réceptrice  $P_{r\acute{e}ceptrice} = P_{donn\acute{e}e}$

Le rendement  $\eta(t)$  du mécanisme, à la date t, est  $\eta(t) = \frac{|P_{r\acute{e}ceptrice}|}{P_{motrice}} = \frac{-P_{donn\acute{e}e}}{P_{re\grave{c}ue}} = 1 - \frac{|P_{dissip\acute{e}e}|}{P_{re\grave{c}ue}}$

Si l'énergie cinétique augmente

$$\frac{dT}{dt} = P_{re\grave{c}ue} + P_{donn\acute{e}e} + P_{dissip\acute{e}e} > 0$$

On définit :  $P_{motrice} = P_{re\grave{c}ue}$  et  $P_{r\acute{e}ceptrice} = P_{donn\acute{e}e} - \frac{dT}{dt} < 0$

Le rendement  $\eta(t)$  du mécanisme, à la date t, est  $\eta(t) = \frac{|P_{r\acute{e}ceptrice}|}{P_{motrice}} = \frac{-P_{donn\acute{e}e} + \frac{dT}{dt}}{P_{re\grave{c}ue}} = 1 - \frac{|P_{dissip\acute{e}e}|}{P_{re\grave{c}ue}}$

Si l'énergie cinétique diminue

$$\frac{dT}{dt} = P_{re\grave{c}ue} + P_{donn\acute{e}e} + P_{dissip\acute{e}e} < 0$$

On définit :  $P_{motrice} = P_{re\grave{c}ue} - \frac{dT}{dt} > 0$  et  $P_{r\acute{e}ceptrice} = P_{donn\acute{e}e}$

Le rendement  $\eta(t)$  du mécanisme, à la date t, est  $\eta(t) = \frac{|P_{r\acute{e}ceptrice}|}{P_{motrice}} = \frac{-P_{donn\acute{e}e}}{P_{re\grave{c}ue} - \frac{dT}{dt}} = 1 - \frac{|P_{dissip\acute{e}e}|}{P_{re\grave{c}ue} - \frac{dT}{dt}}$

#### 9.1.9.1 Rendement moyen

Si le rendement du système E est fonction du temps, on définit un rendement moyen sur une durée T

$$\eta_{moy} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \eta(t) dt$$

## 10 Equilibrage

Soit un bâti 0 auquel est lié un repère galiléen  $R_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

Un solide 1 de masse  $m$  et de centre d'inertie  $G$  est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x}_0)$  avec le bâti 0.

Soit  $R (O, \vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})$  le repère lié au solide 1. Le centre d'inertie  $G$  se trouve dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y})$ .

Soient  $\theta = (\vec{y}_0; \vec{y})$  et  $\vec{OG} = a.\vec{x}_0 + b.\vec{y}$

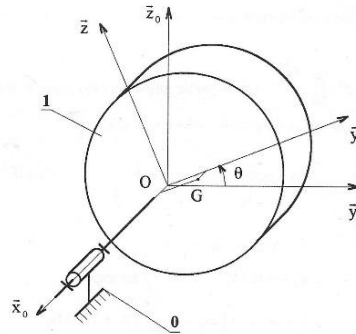


Figure 23. Roue sur pivot (Brémont and Réocreux, 1998)

La matrice d'inertie en  $O$  du solide 1 dans la base de  $R$  est :

$$[I_O(1)] = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0; \vec{y}; \vec{z})}$$

L'action de 0 sur 1 est :

$$\{F(0 \rightarrow 1)\} = \begin{cases} \vec{R} = X.\vec{x}_0 + Y.\vec{y} + Z.\vec{z} \\ \vec{M}_O = M.\vec{y} + N.\vec{z} \end{cases}$$

Les autres actions mécaniques sur 1 seront définies en  $O$ , dans la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})$ , par le torseur

$$\{F(Ext \rightarrow 1)\} = \begin{cases} \vec{R}' = X'.\vec{x}_0 + Y'.\vec{y} + Z'.\vec{z} \\ \vec{M}'_O = L'.\vec{x}_0 + M'.\vec{y} + N'.\vec{z} \end{cases}$$

Principe Fondamental de la Dynamique sur 1:

$$m.\vec{\Gamma}(G \in 1/0) = \vec{R} + \vec{R}'$$

$$\vec{\delta}_O(1/0) = \vec{M}_O + \vec{M}'_O$$

Or

$$m\vec{\Gamma}(G \in 1/0) = m(-b\ddot{\theta}^2)\vec{y} + m(b\ddot{\theta})\vec{z}$$

$$\vec{\delta}_O(1/0) = A.\ddot{\theta}\vec{x}_0 + (E.\dot{\theta}^2 - F.\ddot{\theta}).\vec{y} + (-F.\dot{\theta}^2 - E.\ddot{\theta}).\vec{z}$$

On obtient les 6 équations scalaires suivantes :

$$\begin{aligned}
0 &= X + X' & A.\ddot{\theta} &= L' \\
-m.b.\dot{\theta}^2 &= Y + Y' & E.\dot{\theta}^2 - F.\ddot{\theta} &= M + M' \\
m.b.\ddot{\theta} &= Z + Z' & -F.\dot{\theta}^2 - E.\ddot{\theta} &= N + N'
\end{aligned}$$

### Conditions d'équilibrage statique et dynamique

Pour éviter des vibrations engendrées par la rotation de 1 autour de 0, l'action mécanique dans la liaison pivot doit être aussi constante que possible. Et notamment, indépendante de la position, la vitesse et l'accélération angulaire du solide 1 par rapport à 0. Il faut donc annuler les effets d'inertie représentés par les composantes du torseur dynamique du mouvement de 1 par rapport à 0.

Cela implique :

$b=0$  : le centre d'inertie G de 1 doit être sur l'axe de rotation  $(O, \vec{x}_0)$  (équilibrage statique)

$E = 0$  et  $F = 0$  : l'axe de rotation  $(O, \vec{x}_0)$  doit être axe principal d'inertie de 1.

Exemple :

- (a) solide non équilibré
- (b) solide équilibré statiquement mais pas dynamiquement
- (c) solide équilibré

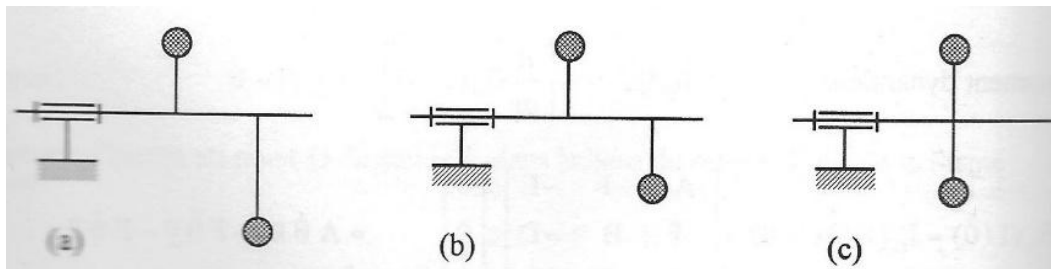


Figure 24. Equilibrage (Brémont and Réocreux, 1998)

Remarque : la condition d'équilibrage énoncée ( $b=0$  et  $E = 0$  et  $F = 0$ ) peut aussi être explicitée de la sorte : l'accélération et le moment dynamique doivent être portés par (=colinéaires à) l'axe de rotation  $\vec{x}_0$ . Or avec les expressions

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_G(S/R) &= I_G(S) \vec{\Omega}(S/R) \\
\vec{\delta}_G(S/R) &= \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_G(S/R) \right]_R
\end{aligned}$$

alors une condition est que l'axe de rotation, colinéaire à  $\vec{\Omega}(S/R)$  par définition, soit vecteur propre de la matrice d'inertie ( $\vec{x}_0$  doit être axe principal d'inertie de la roue 1). En effet on aura alors le moment dynamique colinéaire à l'axe de rotation.

# 11 Stabilité

## 11.1 Définitions

Soit un système matériel E constitué d'un nombre fini de solides, dont la position par rapport à un repère R dépend de n paramètres  $q_i(t)$ .

Il existe une position d'équilibre du système matériel E par rapport au repère R, s'il existe un ensemble de n paramètres  $q_i(t)$  constants, notés  $q_{ie}$ , vérifiant les équations du mouvement.

Ainsi, dans un système à l'équilibre, tous les n paramètres décrivant le mouvement restent constants.

Pour déterminer ces positions d'équilibre (si elles existent), on impose dans les équations du mouvement :

$$q_i(t) = q_{ie} \quad \dot{q}_i(t) = 0 \quad \ddot{q}_i(t) = 0$$

Remarque : dans un mouvement stationnaire, certains paramètres sont constants et les autres ont leur dérivée par-rapport au temps constantes. Ainsi dans le cas d'un mouvement stationnaire à n paramètres, on impose dans les équations du mouvement :

- Pour p paramètres :  $q_i(t) = q_{i0} \quad \dot{q}_i(t) = 0 \quad \ddot{q}_i(t) = 0$
- Pour n-p paramètres :  $\dot{q}_j(t) = \dot{q}_{j0} \quad \ddot{q}_j(t) = 0$

## 11.2 Stabilité d'une position d'équilibre

### 11.2.1 Définition

La position d'équilibre du système matériel E par rapport au repère R est stable si  $\forall \varepsilon > 0$  et  $\mu > 0$ ,  $\exists \alpha > 0$  et  $\beta > 0$  tels que, quelles que soient les conditions initiales  $q_i(t_0)$  et  $\dot{q}_i(t_0)$  vérifiant

$$|q_i(t_0) - q_{ie}| < \alpha \text{ et } |\dot{q}_i(t_0)| < \beta$$

le mouvement de E par rapport à R satisfait à :

$$|q_i(t) - q_{ie}| < \varepsilon \text{ et } |\dot{q}_i(t)| < \mu \quad \forall t \geq t_0 \text{ et } \forall i$$

Remarques :

$|q_i(t_0) - q_{ie}| < \alpha$  et  $|\dot{q}_i(t_0)| < \beta$  traduisent le fait que les conditions initiales sont proches des conditions d'équilibre

$|q_i(t) - q_{ie}| < \varepsilon$  indique que l'équilibre est stable : les paramètres restent proches de leur position d'équilibre. On observe des petits mouvements au voisinage de la position d'équilibre et on peut linéariser les équations du mouvement (les transformer en équations différentielles du second ordre à coefficients constants).



## 11.2.2 Linéarisation des équations du mouvement autour d'une position d'équilibre

On pose pour les  $n$  paramètres

$$\varepsilon_i(t) = q_i(t) - q_{ie}$$

avec  $i=1..n$

Par ce changement de variable, les nouveaux paramètres  $\varepsilon_i(t)$  seront nuls à la position d'équilibre (ce qui permettra d'éliminer les termes constants dans les équations du mouvement).

Linéariser les équations du mouvement consiste à développer à l'ordre 0 les coefficients de  $\ddot{\varepsilon}$  et au premier ordre les autres termes, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur. Par exemple,

- Tous les termes en  $\varepsilon_i^n$ , en  $\dot{\varepsilon}_i^n$  avec  $n>1$  ou en  $\varepsilon_i \varepsilon_j \dots$  sont négligés.
- Le terme  $\cos(\varepsilon_i)$  est pris égal à 1.
- Le terme  $\sin(\varepsilon_i)$  est pris égal à  $\varepsilon_i$ .

### Rappels

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3}) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})\end{aligned}$$

On obtient un système d'équations différentielles du second ordre à coefficients constants, à  $n$  variables  $\varepsilon_i(t)$ . Ce système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$A. \ddot{\varepsilon} + B. \dot{\varepsilon} + C. \varepsilon = 0$$

A, B et C sont des matrices réelles ( $n,n$ ) constantes.

$\varepsilon$  est la matrice colonne dont les composantes sont les  $\varepsilon_i(t)$ . Par exemple pour  $n=3$ ,  $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$

## 11.2.3 Stabilité du mouvement linéarisé

### 11.2.3.1 Equations à résoudre

On doit résoudre le système d'équations différentielles

$$A. \ddot{\varepsilon} + B. \dot{\varepsilon} + C. \varepsilon = 0$$

Ce système admet comme solution générale une combinaison linéaire d'expressions du type

$$\varepsilon = H. e^{st}$$

H : matrice colonne dont les termes sont des constantes liées aux conditions initiales

s : constante dépendant de A, B, C

### 11.2.3.2 Polynôme caractéristique

En remplaçant  $\varepsilon$  par  $H \cdot e^{st}$  dans le système d'équations différentielles, on obtient

$$(A \cdot s^2 + B \cdot s + C) \cdot H \cdot e^{st} = 0$$

L'existence de solutions autres que la solution  $\varepsilon = 0$  implique que le déterminant de la matrice  $(A \cdot s^2 + B \cdot s + C)$  soit nul :

$$\det(A \cdot s^2 + B \cdot s + C) = 0$$

Ceci est le polynôme caractéristique du système, polynôme en  $s$ .

### 11.2.3.3 Forme de la solution générale

La solution générale de l'équation différentielle  $A \cdot \ddot{\varepsilon} + B \cdot \dot{\varepsilon} + C \cdot \varepsilon = 0$  est de la forme

$$\varepsilon(t) = \sum_{j=1}^n e^{a_j t} \cdot (E_j(t) \cdot \sin(b_j t) + F_j(t) \cdot \cos(b_j t))$$

Avec  $s_j = a_j + i \cdot b_j$ ,  $s_j$  racines du polynôme caractéristique

Remarque :  $E_j$  et  $F_j$  sont des polynômes de degré inférieur à l'ordre de multiplicité des  $s_j$  donc si  $s_j$  est racine simple,  $E_j$  et  $F_j$  sont des constantes. Si les sont racines multiples,  $E_j$  et  $F_j$  seront des polynômes en  $t$ .

### 11.2.3.4 Stabilité

Un mouvement linéarisé est stable au voisinage d'une position d'équilibre si tous les  $\varepsilon_i(t)$  restent bornés au cours du temps.

Par conséquent d'après la forme de la solution générale, il faut et il suffit que

$$a_j < 0, \forall j$$

#### Théorème de Liapounov

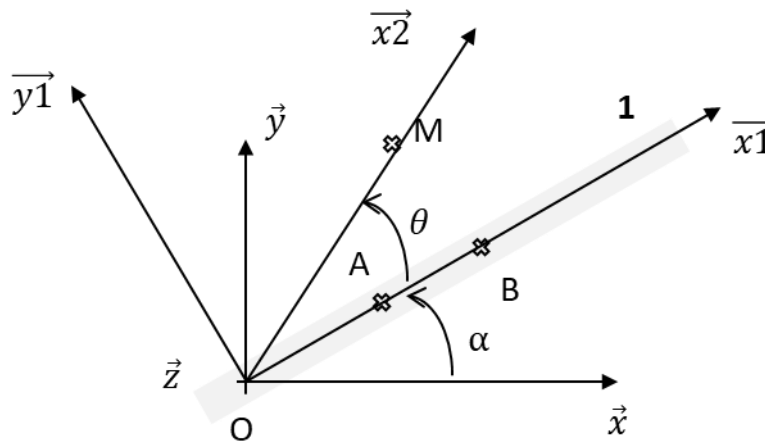
- Si  $\forall j, a_j < 0$  : l'équilibre est stable
- Si il existe au moins un  $s_j$  tel que  $a_j > 0$  : l'équilibre est instable
- On ne peut pas conclure s'il existe un  $a_j = 0$  (cela dépend des valeurs de  $E_j$  et  $F_j$ ).

## 12 Exercices

### 12.1 Exercice : analyse des équations de cinématique

Soit R le repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .  $\overrightarrow{OA} = a \cdot \vec{x}_1$  et  $\overrightarrow{OB} = b \cdot \vec{x}_1$  avec a et b constantes.

$\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{x}_2$  avec r fonction du temps



#### Partie 1 : vitesse d'un point

A un instant t,

1. Déterminer la dérivée /t du vecteur position  $\overrightarrow{OM} : \left[ \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right]_R$
2. Déterminer  $\vec{V}(M \in 1/0)$  par la formule  $\vec{V}(M \in 1/0) = \vec{V}(A \in 1/0) + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}(1/0)$
3. Reprendre les questions 1 et 2 pour le point B au lieu du point M
4. Que peut-on conclure ?

#### Partie 2 : accélération d'un point

1. Déterminer la dérivée /t du vecteur vitesse  $\vec{V}(M \in 1/0) : \left[ \frac{d\vec{V}(M \in 1/0)}{dt} \right]_R$
2. Déterminer  $\vec{\Gamma}(M \in 1/0)$  par la formule
 
$$\vec{\Gamma}(M \in 1/0) = \vec{\Gamma}(A \in 1/0) + \overrightarrow{MA} \wedge \left[ \frac{d}{dt} (\vec{\Omega}(1/0)) \right]_R + \vec{\Omega}(1/0) \wedge (\vec{\Omega}(1/0) \wedge \overrightarrow{AM})$$
3. Reprendre les questions 1 et 2 pour le point B au lieu du point M
4. Que peut-on conclure ?

#### Correction

#### Partie 1 : vitesse d'un point

1/

$$\left[ \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d(r.\overrightarrow{x_2})}{dt} \right]_R = \dot{r}.\overrightarrow{x_2} + r.\left[ \frac{d(\overrightarrow{x_2})}{dt} \right]_R = \dot{r}.\overrightarrow{x_2} + r.(\dot{\alpha} + \dot{\theta}).\overrightarrow{y_2}$$

2/

$$\begin{aligned}\vec{V}(M \in 1/0) &= a.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})\Lambda\dot{\alpha}.\vec{z} = a.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} - r.\overrightarrow{x_2}\Lambda\dot{\alpha}.\vec{z} + a.\overrightarrow{x_1}\Lambda\dot{\alpha}.\vec{z} \\ &= a.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} + r.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_2} - a.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} = r.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_2}\end{aligned}$$

3/

$$\left[ \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d(b.\overrightarrow{x_1})}{dt} \right]_R = b.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1}$$

$$\vec{V}(B \in 1/0) = a.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} + (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA})\Lambda\dot{\alpha}.\vec{z} = a.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} - b.\overrightarrow{x_1}\Lambda\dot{\alpha}.\vec{z} - a.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} = b.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1}$$

4/ Attention au calcul de  $\vec{V}(M \in 1/0)$  si le point M n'appartient pas effectivement à la pièce 1 on n'a pas la vraie vitesse du point

Partie 2

1/

$$\left[ \frac{d\vec{V}(M \in 1/0)}{dt} \right]_R = \left[ \frac{dr.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_2}}{dt} \right]_R = \ddot{r}.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_2} + r.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_2} - r.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_2}$$

2/

$$\vec{\Gamma}(M \in 1/0) = a.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} - a.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_1} + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})\Lambda\ddot{\alpha}.\vec{z} + \dot{\alpha}.\vec{z}\Lambda(\dot{\alpha}.\vec{z}\Lambda(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}))$$

$$\vec{\Gamma}(M \in 1/0) = a.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} - a.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_1} + (-r.\overrightarrow{x_2} + a.\overrightarrow{x_1})\Lambda\ddot{\alpha}.\vec{z} + \dot{\alpha}.\vec{z}\Lambda(\dot{\alpha}.\vec{z}\Lambda(-a.\overrightarrow{x_1} + r.\overrightarrow{x_2}))$$

$$\vec{\Gamma}(M \in 1/0) = a.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} - a.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_1} + r.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_2} - a.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} + \dot{\alpha}.\vec{z}\Lambda(-a.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} + r.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_2})$$

$$\vec{\Gamma}(M \in 1/0) = -a.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_1} + r.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_2} + a.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_1} - r.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_2}$$

$$\vec{\Gamma}(M \in 1/0) = r.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_2} - r.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_2}$$

3/

$$\left[ \frac{d\vec{V}(B \in 1/0)}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d\vec{V}(b.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1})}{dt} \right]_R = b.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} - b.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_1}$$

$$\vec{\Gamma}(B \in 1/0) = a.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} - a.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_1} + (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA})\Lambda\ddot{\alpha}.\vec{z} + \dot{\alpha}.\vec{z}\Lambda(\dot{\alpha}.\vec{z}\Lambda(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}))$$

$$\vec{\Gamma}(B \in 1/0) = a.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} - a.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_1} + (-b.\overrightarrow{x_1} + a.\overrightarrow{x_1})\Lambda\ddot{\alpha}.\vec{z} + \dot{\alpha}.\vec{z}\Lambda(\dot{\alpha}.\vec{z}\Lambda(+b.\overrightarrow{x_1} - a.\overrightarrow{x_1}))$$

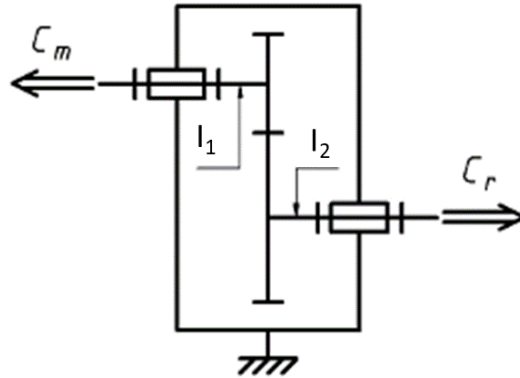
$$\vec{\Gamma}(B \in 1/0) = a.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} - a.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_1} + b.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} - a.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} + \dot{\alpha}.\vec{z}\Lambda(b.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} - a.\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1})$$

$$\vec{\Gamma}(B \in 1/0) = -a.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_1} + b.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} - b.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_1} + a.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_1}$$

$$\vec{\Gamma}(B \in 1/0) = b.\ddot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} - b.\dot{\alpha}^2.\overrightarrow{x_1}$$

## 12.2 Exercice : inertie équivalente d'un réducteur à engrenage

Soit le réducteur à engrenage schématisé ci-dessous.



Données :

$r$  : Rapport de transmission du réducteur. Par définition,

$$r = \frac{d_1}{d_2} = \frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} = \frac{\ddot{\theta}_2}{\ddot{\theta}_1}$$

- $C_m$  : Couple moteur exercé sur l'arbre d'entrée 1.
- $C_r$  : Couple résistant exercé sur l'arbre de sortie 2.
- $I_1$  : Moment d'inertie de l'ensemble lié à l'arbre d'entrée 1.
- $I_2$  : Moment d'inertie de l'ensemble lié à l'arbre de sortie 2.
- $\ddot{\theta}_1$  : Accélération angulaire de l'arbre d'entrée 1.
- $\ddot{\theta}_2$  : Accélération angulaire de l'arbre de sortie 2.
- $F$  : Force tangentielle entre les roues dentées 1 et 2.
- $d_1, d_2$  : distances entre le support de la force  $F$  et les axes des roues dentées.

1/ Ecrire le théorème du moment dynamique appliqué à l'arbre 1, projeté suivant son axe de rotation

2/ Ecrire le théorème du moment dynamique appliqué à l'arbre 2, projeté suivant son axe de rotation

3/ On définit l'inertie équivalente du système ramenée à l'arbre 1  $I_{\text{eq}}$  et le couple résistant équivalent du système ramenée à l'arbre 1  $C_{r\text{eq}}$ , tels que

$$C_m - C_{r\text{eq}} = I_{\text{eq}} \cdot \ddot{\theta}_1$$

Exprimer  $C_{r\text{eq}}$  et  $I_{\text{eq}}$  en fonction des données du problème

4/ On suppose que l'arbre 1 tourne à la vitesse  $\omega_1$  et que l'arbre 2 tourne à la vitesse  $\omega_2$ .

Ecrire l'énergie cinétique du système {1+2} et retrouver l'expression de  $I_{\text{eq}}$  déterminée en question 3.

**Correction**

1/ Ecrire le théorème du moment dynamique appliqué à l'arbre 1, projeté suivant son axe de rotation

2/ Ecrire le théorème du moment dynamique appliqué à l'arbre 2, projeté suivant son axe de rotation

3/ On définit l'inertie équivalente du système ramenée à l'arbre 1  $I_{\text{eq}}$  et le couple résistant équivalent du système ramenée à l'arbre 1  $C_{r\text{eq}}$ , tels que

$$C_m - C_{r\text{eq}} = I_{\text{eq}} \cdot \ddot{\theta}_1$$

Exprimer  $C_{r\text{eq}}$  et  $I_{\text{eq}}$  en fonction des données du problème

$$F = \frac{Cr + J2 \cdot \Omega_2}{d2}$$

Donc

$$Cm - d1 \cdot \frac{Cr + J2 \cdot \Omega_2}{d2} = J1 \cdot \Omega_1$$

$$r = \frac{d_1}{d_2}$$

Donc

$$Cm - r \cdot Cr = J1 \cdot \Omega_1 + r \cdot J2 \cdot \Omega_2$$

$$r = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$$

$$Cm - r \cdot Cr = J1 \cdot \Omega_1 + r^2 \cdot J2 \cdot \Omega_1 = (J1 + r^2 J2) \cdot \Omega_1$$

Donc

$$C_{r\text{eq}} = r \cdot Cr$$

$$I_{\text{eq}} = J1 + r^2 J2$$

4/ On suppose que l'arbre 1 tourne à la vitesse  $\omega_1$  et que l'arbre 2 tourne à la vitesse  $\omega_2$ . Ecrire l'énergie cinétique du système {1+2} et retrouver l'expression de  $I_{\text{eq}}$  déterminée en question 3.

## 12.3 Exercice : loi trapèze

Soit la loi de mouvement trapèze comportant 3 phases :

- Mouvement uniformément accéléré
- Mouvement uniforme
- Mouvement uniformément décéléré

Dans le temps T, on doit avoir parcouru la distance X.

On considère que chaque phase dure  $1/3T$ .

Retrouver les valeurs de l'accélération et de la vitesse maximale données ci-dessous :

$$a_{max} = \frac{9X}{2T^2}$$

$$V_{max} = \frac{3X}{2T}$$

### Correction

#### Vitesse

l'aire délimitée par le profil de vitesse, qui est égale à l'intégrale de la vitesse entre 0 et T, représente le déplacement X donc

$$X = 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{T}{3} \cdot V_{max} \right) + \frac{T}{3} \cdot V_{max} = \frac{2T}{3} \cdot V_{max}$$

Donc

$$V_{max} = \frac{3X}{2T}$$

#### Accélération

On doit passer de V=0 à V=Vmax en un temps T/3 donc

$$A_{max} \cdot \frac{T}{3} = \frac{3X}{2T}$$

$$A_{max} = \frac{9X}{2T^2}$$

## 12.4 Exercice : loi cycloïde

Soit la loi de mouvement telle que la vitesse est donnée par

$$V = \frac{X}{T} \cdot \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]$$

T : temps donné pour parcourir la distance X.

Retrouver les valeurs de l'accélération et de la vitesse maximale données ci-dessous :

$$V_{max} = 2 \cdot \frac{X}{T}$$

$$a_{max} = 2\pi \cdot \frac{X}{T^2}$$

### Correction

Pour t=0,  $\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = 1$

Pour t=T/2,  $\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = -1$

Pour  $t=T$ ,  $\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = 1$  donc  $\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$  varie entre -1 et 1

Donc on a  $V_{max}$  pour  $\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = -1$ , au moment  $t=T/2$ .

Donc

$$V_{max} = \frac{X}{T} \cdot (1 + 1) = 2 \frac{X}{T}$$

Accélération :

Par dérivation

$$a = \frac{X}{T} \cdot \left[ \frac{2\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right] = 2\pi \cdot \frac{X}{T^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Pour  $t=T/4$ ,  $\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = 1$

$$a_{max} = 2\pi \cdot \frac{X}{T^2}$$

## 12.5 Exercice : loi trapèze quelconque

On souhaite se déplacer en translation sur une distance  $X=1m$  en  $T=5s$ .

On choisit une loi trapèze en 3 étapes :

- Accélération constante pendant  $T/5$
- Vitesse constante pendant  $3T/5$
- Décélération constante pendant  $T/5$

Calculer l'accélération maximale et la vitesse maximale

### Correction

#### Vitesse

L'aire délimitée par le profil de vitesse, qui est égale à l'intégrale de la vitesse entre 0 et  $T$ , représente le déplacement  $X$  donc

$$X = 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{T}{5} \cdot V_{max} \right) + \frac{3T}{5} \cdot V_{max} = \frac{4T}{5} \cdot V_{max}$$

Donc

$$V_{max} = \frac{5X}{4T}$$

#### Accélération

On doit passer de  $V=0$  à  $V=V_{max}$  en un temps  $T/5$  donc



$$A_{max} \cdot \frac{T}{5} = \frac{5X}{4T}$$

$$A_{max} = \frac{25X}{4T^2}$$

## 12.6 Exercice : couple moteur

Exercice inspiré de (Nadot, 2003)

Le dispositif porte-outil d'une machine d'affûtage est schématisé par un système de trois solides  $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ . Le repère terrestre  $T_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au bâti  $B_0$  de la machine. Il est supposé galiléen en ne tenant compte que des actions de pesanteur. L'axe  $Oz_0$  est vertical ascendant.

*Caractéristiques de chaque solide:*

$S_1$  - Support tournant: repère lié  $T_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ .

Mouvement /  $T_0$ : rotation autour de  $Oz_0$ , commandée par l'actionneur  $M_{01}$  (de masse nulle) monté entre  $B_0$  et  $S_1$ . La position par rapport à  $T_0$  est repérée par l'angle  $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \alpha$ .

Moment d'inertie par rapport à l'axe  $Oz_0$ :  $I_{1 \rightarrow}$

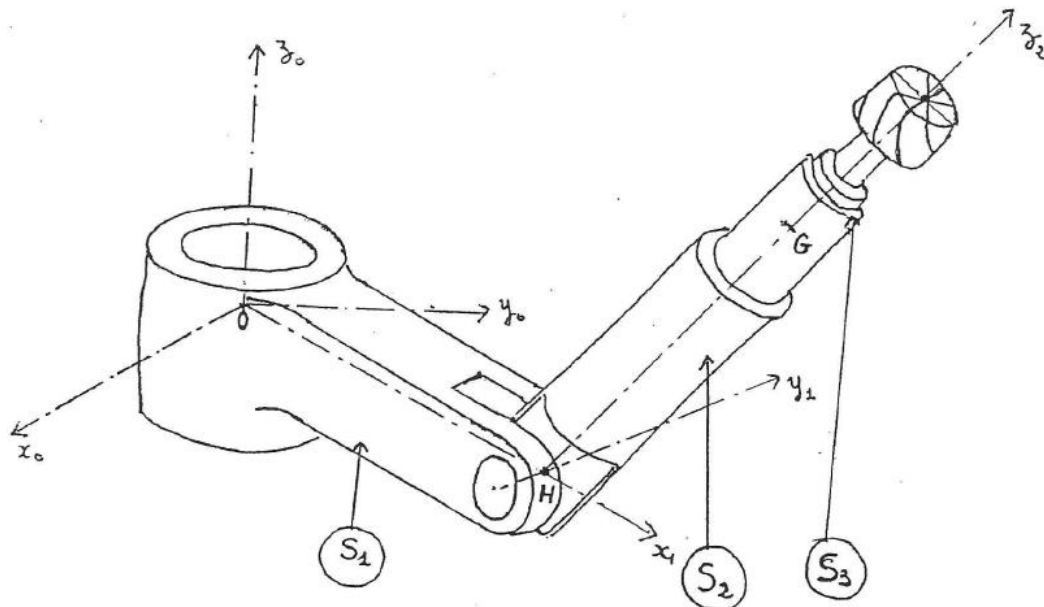
On désigne par  $H$  le point de  $S_1$  défini par  $\vec{OH} = h\vec{x}_1$ .

$S_2$  - Bras pivotant: repère lié  $T_2 = (H, \vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)$ .

Mouvement /  $T_1$ : rotation autour de  $Hy_1$ , commandée par l'actionneur  $M_{12}$  (de masse nulle) monté entre  $S_1$  et  $S_2$ . La position par rapport à  $T_1$  est repérée par l'angle  $(\vec{z}_0, \vec{z}_2) = \beta$ .

Masse  $m_2$ . Centre d'inertie  $H$  (pour simplifier!!).

$$I(H, S_2) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad \text{dans la base } (\vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2).$$



$S_3$  -Porte outil avec outil : repère lié  $T_3 = (G, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2)$ .

Mouvement /  $T_2$ : rotation autour de  $H\vec{z}_2$  et translation de direction  $\vec{z}_2$  (G se déplace sur  $H\vec{z}_2$ ), commandées par l'actionneur  $M_{23}$  (de masse nulle) monté entre  $S_2$  et  $S_3$ . La position par rapport à  $T_2$  est repérée par  $\overrightarrow{HG} = r\vec{z}_2$  et par l'angle  $(\vec{y}_1, \vec{y}_3) = \gamma$ .

Masse  $m_3$ . Centre d'inertie G.

$$I(G, S_3) = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} \quad \text{dans la base } (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_2).$$

**1° Etude:** On bloque l'articulation  $S_2$ - $S_3$ . On note S le solide  $S_2 \cup S_3$ .

*Actions de liaisons entre solides:*

$B_0$ - $S_1$ : liaison pivot sans frottement d'axe  $Oz_0$ .

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{M}(O, B_0 \rightarrow S_1) = 0$$

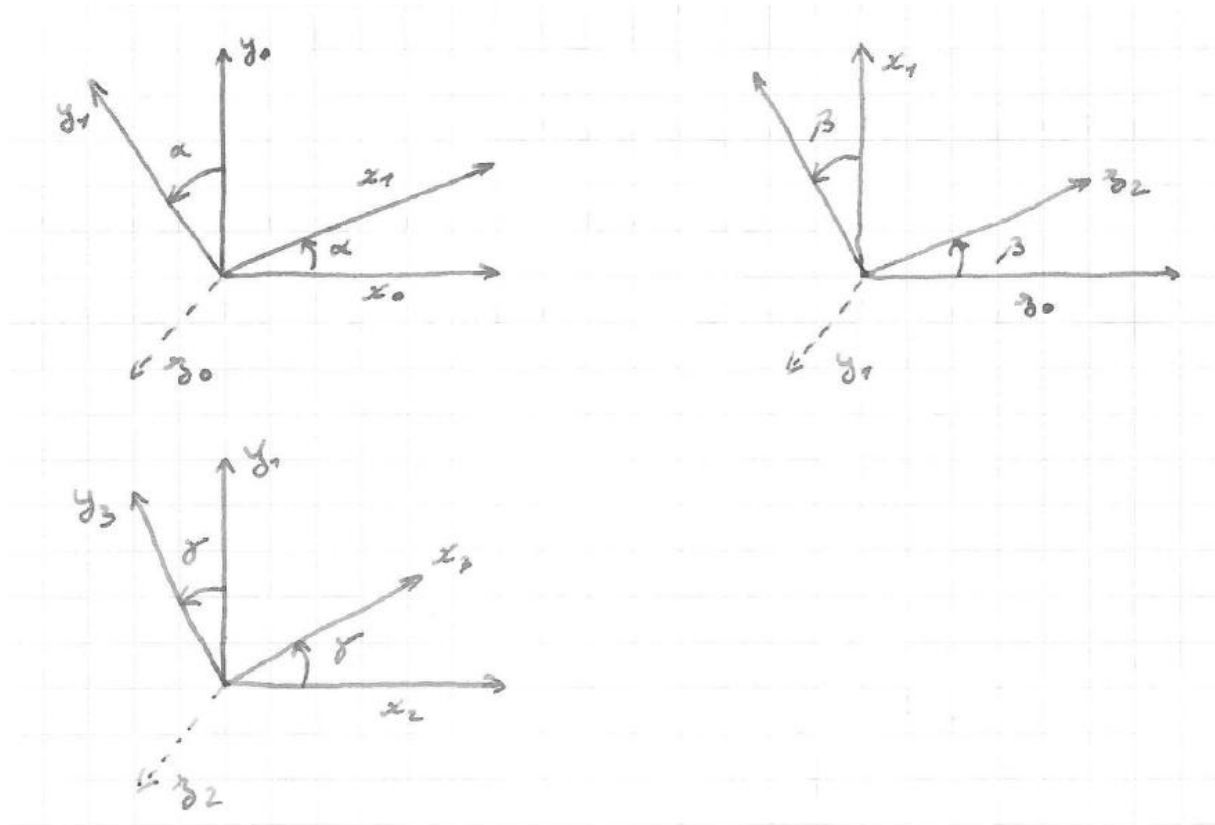
$S_1$ -S: liaison pivot sans frottement d'axe  $Hy_1$ .

$$\vec{y}_1 \cdot \vec{M}(H, S_1 \rightarrow S) = 0$$

*Actions motrices:*

$M_{01} \rightarrow S_1$  est un couple de moment  $C_{01}\vec{z}_0$ .

$M_{12} \rightarrow S$  est un couple de moment  $C_{12}\vec{y}_1$ .



$$\vec{z}_0 = \cos\beta \vec{z}_2 - \sin\beta \vec{x}_2$$

$$\vec{x}_2 \cdot \vec{z}_0 = -\sin\beta$$

$$\vec{y}_1 \cdot \vec{z}_0 = 0$$

$$\vec{z}_2 \cdot \vec{z}_0 = \cos\beta$$

### Expression du couple moteur $C_{01}$

1. A l'aide du théorème du moment dynamique, exprimer  $C_{01}$  en fonction des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et de leurs dérivées

1/ Montrer que

$$\vec{\sigma}_0(2/0) \cdot \vec{z}_0 = (A \cdot \sin^2\beta + C \cdot \cos^2\beta + m_2 \cdot h^2) \dot{\alpha}$$

2/ Montrer que

$$\vec{\sigma}_0(3/0) \cdot \vec{z}_0 = (D \cdot \sin^2\beta + E \cdot \cos^2\beta + m_3 \cdot (h + r \sin\beta)^2) \cdot \dot{\alpha}$$

3/ Montrer que

Moment dynamique  $\vec{\sigma}_0(2/0)$

$$\vec{\sigma}_0(2/0) \cdot \vec{z}_0 = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_0(2/0) \cdot \vec{z}_0]$$

Moment dynamique  $\vec{\sigma}_0(3/0)$

$$\vec{\delta}_0(3/0) \cdot \vec{z}_0 = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_0(3/0) \cdot \vec{z}_0]$$

4/ Montrer que

$$C_{01} = \frac{d}{dt} [(I_1 + (A + D) \cdot \sin^2 \beta + (C + E) \cdot \cos^2 \beta + m_2 \cdot h^2 + m_3 \cdot (h + r \sin \beta)^2) \cdot \dot{\alpha}]$$

#### Exploitation 1 : inertie du système

Par dérivation on montre que

$$C_{01} = [(A + D) \dot{\beta} 2 \cos \beta \sin \beta - (C + E) \dot{\beta} 2 \cos \beta \sin \beta + m_3 \cdot 2 \dot{\beta} \cdot (h + r \sin \beta) r \cdot \cos \beta] \cdot \dot{\alpha} + (I_1 + (A + D) \cdot \sin^2 \beta + (C + E) \cdot \cos^2 \beta + m_2 \cdot h^2 + m_3 \cdot (h + r \sin \beta)^2) \cdot \ddot{\alpha}$$

On appelle  $I_{\text{eq1}}$  l'inertie équivalente 1 et  $I_{\text{eq2}}$  l'inertie équivalente 2 de l'ensemble 1-2-3 telles que

$$C_{01} = I_{\text{eq1}} \cdot \dot{\alpha} + I_{\text{eq2}} \cdot \ddot{\alpha}$$

1/ On considère  $\beta$  Constant. Que vaut  $I_{\text{eq1}}$  ?

2/ Tracer sous EXCEL l'évolution de  $I_{\text{eq2}}$  en fonction de  $\beta$ .

Pour simplifier, on prendra

$$A = C = D = E = 1$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = 1$$

$$H = r = 1$$

3/ Lors d'une rotation du robot autour de l'axe  $(0; \vec{z}_0)$ , dans quelle position est-il préférable de placer le bras 2 afin de minimiser le couple et l'énergie nécessaires au déplacement ?

4/ On considère  $\beta$  variable et  $\dot{\beta} = 1$ . Tracer sous EXCEL l'évolution de  $I_{\text{eq1}}$  en fonction de  $\beta$ .

5/ Peut-on négliger l'influence de l'inertie équivalente 1  $I_{\text{eq1}}$  sur le couple moteur  $C_{01}$  ? Est-il ainsi judicieux de faire bouger le bras 2 pendant que l'on fait tourner l'ensemble 1-2-3 autour de l'axe  $(0; \vec{z}_0)$  ?

#### Exploitation 2 : mouvement du robot

On rappelle que

$$C_{01} = [(A + D) \dot{\beta} 2 \cos \beta \sin \beta - (C + E) \dot{\beta} 2 \cos \beta \sin \beta + m_3 \cdot 2 \dot{\beta} \cdot (h + r \sin \beta) r \cdot \cos \beta] \cdot \dot{\alpha} + (I_1 + (A + D) \cdot \sin^2 \beta + (C + E) \cdot \cos^2 \beta + m_2 \cdot h^2 + m_3 \cdot (h + r \sin \beta)^2) \cdot \ddot{\alpha}$$

$$C_{01} = I_{\text{eq1}} \cdot \dot{\alpha} + I_{\text{eq2}} \cdot \ddot{\alpha}$$

On souhaite se déplacer de  $\theta=120^\circ$  en 5s.

On choisit une loi trapèze 1/3;1/3;1/3.

1/ Calculer l'accélération angulaire maximale

et la vitesse angulaire maximale.

2/ Tracer sous EXCEL l'accélération  $\ddot{\alpha}$ , la vitesse  $\dot{\alpha}$

et la position angulaire  $\alpha$  en fonction du temps

3/ Tracer sous EXCEL :

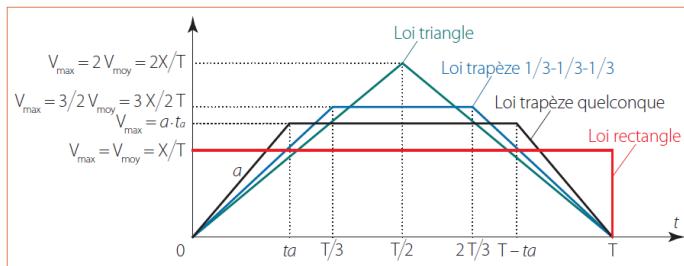
$C_{01}$  en fonction du temps pour  $\beta = 0$

$C_{01}$  en fonction du temps pour  $\beta$  variable autour de la position 0 (Pour  $I_{\dot{e}q1}$ , on prendra la valeur maximale obtenue dans la partie « Exploitation 1 : inertie du système »)

La puissance moteur nécessaire  $P = C_{01} \cdot \dot{\alpha}$  en fonction du temps pour  $\beta = 0$

La puissance moteur nécessaire  $P = C_{01} \cdot \dot{\alpha}$  en fonction du temps pour  $\beta$  variable

Commenter



4 Les lois de vitesse en trapèze pour un déplacement X en un temps T

Technoguide

Exploitation 3 : on considère maintenant que l'angle  $\gamma$  varie.

Dans ce cas, on montre que

$$C_{01} = \frac{d}{dt} [(I_1 + (A + D) \cdot \sin^2 \beta + (C + E) \cdot \cos^2 \beta + m_2 \cdot h^2 + m_3 \cdot (h + r \sin \beta)^2) \cdot \dot{\alpha} + E \cdot \dot{\gamma} \cdot \cos \beta]$$

On dérive l'expression de  $C_{01}$  ci-dessus.

$$C_{01} = [(A + D) \dot{\beta} 2 \cos \beta \sin \beta - (C + E) \dot{\beta} 2 \cos \beta \sin \beta + m_3 \cdot 2 \dot{\beta} \cdot (h + r \sin \beta) r \cdot \cos \beta] \cdot \dot{\alpha} + (I_1 + (A + D) \cdot \sin^2 \beta + (C + E) \cdot \cos^2 \beta + m_2 \cdot h^2 + m_3 \cdot (h + r \sin \beta)^2) \cdot \ddot{\alpha} + E \cdot \ddot{\gamma} \cdot \cos \beta - E \cdot \dot{\beta} \cdot \dot{\gamma} \cdot \sin \beta$$

## Correction

### Expression du couple moteur $C_{01}$

#### Moment cinétique $\vec{\sigma}_O(1/0)$

$$\vec{\sigma}(O, S1) = I_O(1) \cdot \vec{\Omega}(1/0)$$

donc

$$\vec{\sigma}(O, S1) \cdot \vec{z}_0 = I_1 \cdot \dot{\alpha}$$

#### Moment cinétique $\vec{\sigma}_O(2/0)$

$$\vec{\sigma}_O(2/0) = \vec{\sigma}_H(2/0) + m_2 \overrightarrow{OH} \wedge \vec{V}(H \in 2/0)$$

Car on considère que H est centre d'inertie de 2

$$\vec{\sigma}_H(2/0) = I_H(2) \cdot \vec{\Omega}(2/0)$$

$$\vec{\Omega}(2/0) = \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0) = \dot{\beta} \cdot \vec{y}_1 + \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0 = \begin{pmatrix} -\sin\beta \cdot \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \cos\beta \cdot \dot{\alpha} \end{pmatrix}_{(x_2, y_1, z_2)}$$

$$\text{Car } \vec{z}_0 = \cos\beta \vec{z}_2 - \sin\beta \vec{x}_2$$

$$\vec{\sigma}_H(2/0) = -A \cdot \sin\beta \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_2 + B \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_1 + C \cdot \cos\beta \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_2$$

$$\vec{x}_2 \cdot \vec{z}_0 = -\sin\beta$$

$$\vec{y}_1 \cdot \vec{z}_0 = 0$$

$$\vec{z}_2 \cdot \vec{z}_0 = \cos\beta$$

donc

$$\vec{\sigma}_H(2/0) \cdot \vec{z}_0 = A \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin^2\beta + C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos^2\beta$$

De plus

$$m_2 \overrightarrow{OH} \wedge \vec{V}(H \in 2/0) = m_2 \cdot h \cdot \vec{x}_1 \wedge h \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 = m_2 \cdot h^2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0$$

donc

$$\vec{\sigma}_O(2/0) \cdot \vec{z}_0 = A \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin^2\beta + C \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos^2\beta + m_2 \cdot h^2 \cdot \dot{\alpha}$$

$$\vec{\sigma}_O(2/0) \cdot \vec{z}_0 = (A \cdot \sin^2\beta + C \cdot \cos^2\beta + m_2 \cdot h^2) \dot{\alpha}$$

Moment cinétique  $\vec{\sigma}_O(3/0)$

$$\vec{\sigma}_O(3/0) = \vec{\sigma}_G(3/0) + \overrightarrow{OG} \wedge m_3 \cdot \vec{V}(G)$$

$$\vec{\sigma}_G(3/0) = I_G(3) \cdot \vec{\Omega}(3/0)$$

$$\vec{\Omega}(3/0) = \vec{\Omega}(3/2) + \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0) = \dot{\gamma} \cdot \vec{z}_2 + \dot{\beta} \cdot \vec{y}_1 + \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{\sigma}_G(3/0) = \begin{pmatrix} D & \square & \square \\ \square & D & \square \\ \square & \square & E \end{pmatrix}_{(x_3, y_3, z_2)} \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} \cdot \sin\beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cdot \cos\beta + \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\beta \\ D \cdot \dot{\beta} \\ E \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\beta + E \dot{\gamma} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_G(3/0) \cdot \vec{z}_0 = \begin{pmatrix} -D \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\beta \\ D \cdot \dot{\beta} \\ E \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\beta + E \dot{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\beta \\ 0 \\ \cos\beta \end{pmatrix} = D \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin^2\beta + E \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos^2\beta + E \dot{\gamma} \cos\beta$$

$$\vec{z}_0 = \cos\beta \vec{z}_2 - \sin\beta \vec{x}_2$$

Moment cinétique  $\vec{\sigma}_O(3/0)$

Terme  $m_3 \cdot \overrightarrow{OG} \wedge \vec{V}(G)$

$$\overrightarrow{OG} = h \cdot \vec{x}_1 + r \cdot \vec{z}_2$$

$$\begin{aligned} \vec{V}(G) &= h \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 + \overrightarrow{GH} \wedge \vec{\Omega}(2/0) = h \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 - r \cdot \vec{z}_2 \wedge (\dot{\alpha} \cdot \vec{z}_0 + \dot{\beta} \cdot \vec{y}_1) \\ &= h \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 + r \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\beta \cdot \vec{y}_1 + r \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_3. \overrightarrow{OG} \wedge \vec{V}(G) &= m_3. (h. \vec{x}_1 + r. \vec{z}_2) \wedge ((h + r. \sin\beta). \dot{\alpha}. \vec{y}_1 + r\dot{\beta}. \vec{x}_2) \\
 &= m_3(h. (h + r. \sin\beta). \dot{\alpha}. \vec{z}_0 + hr\dot{\beta}\sin\beta\vec{y}_1 - r(h + r. \sin\beta). \dot{\alpha}. \vec{x}_2 + r^2\dot{\beta}. \vec{y}_2)
 \end{aligned}$$

Or

$$\vec{x}_2 = \cos\beta. x_1 - \sin\beta z_0$$

Donc le terme  $-r(h + r. \sin\beta). \dot{\alpha}. \vec{x}_2$  devient

$$-r(h + r. \sin\beta). \dot{\alpha}. \vec{x}_2 = -r(h + r. \sin\beta). \dot{\alpha}. (\cos\beta. x_1 - \sin\beta z_0)$$

$$(m_3. \overrightarrow{OG} \wedge \vec{V}(G)). \vec{z}_0 = m_3. (h. (h + r. \sin\beta) + r. \sin\beta. h. (h + r. \sin\beta)) \dot{\alpha} = m_3(h + r\sin\beta)^2. \dot{\alpha}$$

Finalement

$$\vec{\sigma}_0(3/0). \vec{z}_0 = D. \dot{\alpha}. \sin^2\beta + E. \dot{\alpha}. \cos^2\beta + E\dot{\gamma}\cos\beta + m_3. (h + r\sin\beta)^2. \dot{\alpha}$$

$$\vec{\sigma}_0(3/0). \vec{z}_0 = (D. \sin^2\beta + E. \cos^2\beta + m_3. (h + r\sin\beta)^2). \dot{\alpha} + E\dot{\gamma}\cos\beta$$

Moment dynamique  $\vec{\delta}_0(1/0)$

$$\vec{\delta}_0(1/0). \vec{z}_0 = \frac{d}{dt} I_1. \dot{\alpha}$$

Moment dynamique  $\vec{\delta}_0(2/0)$

$$\vec{\delta}_0(2/0). \vec{z}_0 = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_0(2/0). \vec{z}_0]$$

Moment dynamique  $\vec{\delta}_0(3/0)$

$$\vec{\delta}_0(3/0). \vec{z}_0 = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_0(3/0). \vec{z}_0]$$

Bilan des actions mécaniques en O

- Poids sur 1 : pas d'action en  $\vec{z}_0$
- Poids sur 2 : pas d'action en  $\vec{z}_0$
- Poids sur 3 : pas d'action en  $\vec{z}_0$
- Couple moteur  $C_{01}$

PFD en  $\vec{z}_0$

$$C_{01} = \vec{\delta}(O, 1U2U3). \vec{z}_0$$

$$C_{01} = \frac{d}{dt} [(I_1 + (A + D). \sin^2\beta + (C + E). \cos^2\beta + m_2. h^2 + m_3. (h + r\sin\beta)^2). \dot{\alpha} + E. \dot{\gamma}. \cos\beta]$$

### Exploitation 2 : mouvement du robot

On pose  $\beta = 0$ , alors

$$C_{01} = (I_1 + (C + E) + m_2. h^2 + m_3. h^2). \ddot{\alpha}$$

1/ Déterminer l'accélération angulaire maximale et la vitesse angulaire maximale.

$$V_{max} = \frac{3X}{2T}$$

$$A_{max} = \frac{9X}{2T^2}$$



## 13 Références Bibliographiques

Brémont, Y. and Réocreux, P. (1995) *Mécanique du solide indéformable: calcul vectoriel, cinématique cours et exercices résolus classes préparatoires aux grandes écoles*. Paris: Ellipses (Mécanique, 1).

Brémont, Y. and Réocreux, P. (1996) *Mécanique du solide indéformable: statique cours et exercices résolus classes préparatoires aux grandes écoles, MPSI, PTSI, PSI, PSI\*, MP, MP\*, PT, PT\*, premier cycle universitaire*. Paris: Ellipses (Mécanique, 2).

Brémont, Y. and Réocreux, P. (1998) *Mécanique du solide indéformable: cinétique, dynamique cours et exercices résolus classes préparatoires aux grandes écoles, PSI, PSI\*, MP, MP\*, PT, PT\*, premier cycle universitaire*. Paris: Ellipses (Mécanique, 3).

Brossard, J.-P. (1996) ‘Mécanique générale - Développement de la cinématique’, *Physique Chimie* [Preprint]. Available at: <https://doi.org/10.51257/a-v1-a1663>.

Chaichian, M., Merches, I. and Tureanu, A. (2012) ‘Principles of Analytical Mechanics’, in Chaichian, M., Merches, I., and Tureanu, A., *Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 27–95. Available at: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-17234-2\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-17234-2_2).

Fanchon, J.-L. (1996) *Guide de mécanique: sciences et technologies industrielles*. Paris: Nathan.

Nadot, Y. (2003) ‘Cours mécanique analytique’. ISAE-ENSMA.

### Sitographie

- <https://eduscol.education.fr/sti/sites/eduscol.education.fr/sti/files/ressources/techniques/1286/1286-151-p46.pdf>
- <http://userpages.umbc.edu/~rostamia/2014-09-math490/lecture-notes.pdf>
- [www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/jmr/analytique.pdf](http://www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/jmr/analytique.pdf)