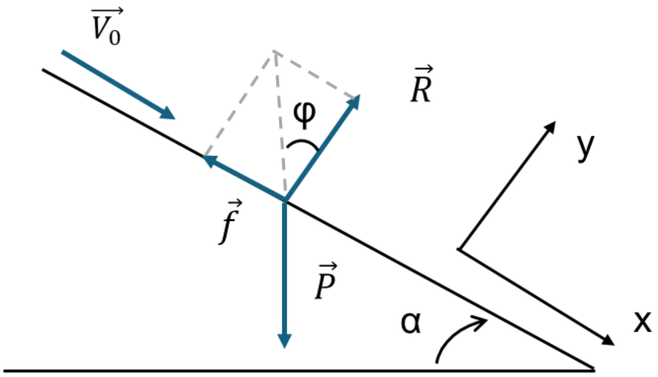
Mécanique du point

\-



Frédéric Menan

https://lesdocsduprof.com/

fmenan@cesi.fr

11/2024

Table des matières

1 Mécanique du point

1.1 Cinématique du point matériel

La cinématique étudie un mouvement sans tenir compte de ses causes.

1.1.1 Définitions

1.1.1.1 Repère d'espace

Un système de coordonnées est lié à un solide quand son origine et les axes sont fixes par-rapport au solide.

Un repère d'espace R lié à un solide est constitué par l'ensemble des systèmes de coordonnées liés au solide.

1.1.1.2 Repère de temps

Le repérage dans le temps se fait sur une échelle de temps obtenue avec une date origine et le choix d'une unité de temps

1.1.1.3 Référentiel

On appelle référentiel lié à un solide l'association d'un repère d'espace lié à ce solide, et d'un repère de temps.

1.1.1.4 Trajectoire

Ensemble des positions occupées successivement par un point mobile au cours du temps.

1.1.2 Notion de vitesse

On se place dans un référentiel $\mathcal{R}$.

Un point matériel M en mouvement dans ce référentiel a une vitesse $\vec{v}$ telle que

$$\vec{v} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$$

1.1.2.1 Coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{u_x} + y.\overrightarrow{u_y} + z.\overrightarrow{u_z}$$

On note $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$. De même pour y et z.

$$\vec{v} = \dot{x}.\overrightarrow{u_x} + x.\frac{d}{dt}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}.\overrightarrow{u_y} + y.\frac{d}{dt}\overrightarrow{u_y} + \dot{z}.\overrightarrow{u_z} + z.\frac{d}{dt}\overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{x}.\overrightarrow{u_x} + \dot{y}.\overrightarrow{u_y} + \dot{z}.\overrightarrow{u_z}}$$

1.1.2.2 Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{u_r} + z.\overrightarrow{u_z}$$

$$\vec{v} = \dot{r}.\overrightarrow{u_r} + r.\frac{d}{dt}\overrightarrow{u_r} + \dot{z}.\overrightarrow{u_z} + z.\frac{d}{dt}\overrightarrow{u_z}$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{u_z} = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{u_r} = \frac{d}{dt}\left(cos\theta.\overrightarrow{u_x} + sin\theta.\overrightarrow{u_y}\right) = -\dot{\theta}.sin\theta.\overrightarrow{u_x} + \dot{\theta}.cos\theta.\overrightarrow{u_y} = \dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}.\overrightarrow{u_r} + r.\dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}.\overrightarrow{u_z}}$$

$\dot{r}$: composante radiale de la vitesse

$r.\dot{\theta}$: composante orthoradiale

1.1.3 Notion d'accélération

1.1.3.1 Définition générale

$$\boxed{\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}}$$

L'accélération a est en m/s².

1.1.3.2 Coordonnées cartésiennes

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{x}.\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}.\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}.\overrightarrow{u_z}}$$

1.1.3.3 Coordonnées cylindriques

$$\vec{a} = \left(\frac{d\dot{r}.\overrightarrow{u_r} + r.\dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}.\overrightarrow{u_z}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \ddot{r}.\overrightarrow{u_r} + \dot{r}.\dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta} + \dot{r}.\dot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta} + r.\ddot{\theta}.\overrightarrow{u_\theta} - r.\dot{\theta}^2.\overrightarrow{u_r} + \ddot{z}.\overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}.\overrightarrow{u_z}}$$

1.1.4 Mouvement accéléré / retardé

Un mouvement est accéléré si le module de la vitesse est croissant. Il est retardé si le module est décroissant.

Soit le produit scalaire $\vec{v}.\vec{v} = v^2$. La dérivée par-rapport au temps de ce produit scalaire est :

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}.\vec{v}) = 2\vec{v}.\frac{d}{dt}\vec{v}$$

Ce produit scalaire est positif si $\vec{v}$ et $\vec{a}$ forment entre eux un angle aigu (inférieur à 90°). Il est négatif si $\vec{v}$ et $\vec{a}$ forment entre eux un angle obtus (supérieur à 90°).

Si $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont orthogonaux ou si $\vec{a} = \vec{0}$, le mouvement est uniforme.

1.2 Dynamique du point matériel dans un référentiel fixe

1.2.1 Référentiel galiléen

Un référentiel galiléen est un référentiel qui permet l'emploi du principe fondamental de la dynamique. Exemple : référentiel de Copernic a a pour origine le centre du système solaire auquel on associe 3 axes pointant vers des étoiles très lointaines. Tout référentiel en translation rectiligne et uniforme par-rapport au référentiel de Copernic est lui-même galiléen. Pour beaucoup de translations, le référentiel terrestre est presque galiléen.

1.2.2 Principe de l'inertie (1ère loi de Newton)

Dans un référentiel galiléen, un point matériel isolé ou pseudo-isolé est soit au repos soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme (Point matériel isolé : point matériel soumis à aucune force. Point matériel pseudo-isolé : la somme des forces appliquées au point matériel est nulle).

Si $\sum \vec{F} = \vec{0}$ alors $\vec{v}$ constante

1.2.3 Forces agissant sur un point matériel

On distingue les interactions à distance (Forces gravitationnelles (Newton), Forces électrostatiques (Coulomb), force de pesanteur (poids), forces magnétiques (Lorentz)) des forces de contact aussi appelées forces de liaison (réaction d'un support, tension d'un ressort, tension d'un fil….).

1.2.4 Principe fondamental de la dynamique (2ème loi de Newton)

1.2.4.1 Quantité de mouvement

Par définition, on appelle quantité de mouvement d'un point matériel de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$ la grandeur vectorielle notée $\vec{p}$ telle que

$$\vec{p} = m.\vec{v}$$

1.2.4.2 Principe fondamental de la dynamique (PFD)

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par-rapport au temps du vecteur quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la somme des forces appliquées au point :

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m.\vec{v})$$

Si la masse m est invariante au cours du temps alors

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}$$

1.2.5 Moment cinétique / Théorème du moment cinétique

1.2.5.1 Moment d'une force

On appelle moment de $\vec{F}$ appliquée en A par-rapport à O le vecteur $\overrightarrow{M_O}$ tel que

$$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$$

$\overrightarrow{M_O}$ est en N.m

En particulier, $\overrightarrow{M_O} = \vec{0}$ si $\overrightarrow{OA}$ parallèle à $\vec{F}$.

1.2.5.2 Moment cinétique

Par définition on appelle moment cinétique d'un point matériel par-rapport à un point O le vecteur $\vec{L}_O$, moment du vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$ de ce point matériel.

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{p}$$

$\vec{p}$ en kg.m/s ; $\overrightarrow{OA}$ en m donc $\vec{L}_O$ en kg.m²/s

1.2.5.3 Théorème du moment cinétique

Dans un référentiel galiléen,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OA} \wedge \vec{p}\right) = \frac{d\left(\overrightarrow{OA}\right)}{dt} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{OA} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{OA} \wedge \sum \vec{F} = \sum \vec{M}_O$$

Or $\vec{v} \wedge \vec{p} = \vec{0}$ car les deux vecteurs sont colinéaires.

Enoncé du théorème cinétique

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par-rapport au temps du vecteur moment cinétique d'un point matériel est égale à la somme des moments des forces appliquées au point matériel.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O$$

1.2.6 Principe de l'action et de la réaction (3ème loi de Newton)

Si un point matériel A exerce une force $\vec{F}_A$ sur un point matériel B, alors B exerce sur A une force $\vec{F}_B$ telle que $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$.

1.2.7 Equilibre d'un point matériel

Dans un référentiel galiléen, l'équilibre suppose

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{0} \\ \vec{p} = \vec{0} \\ \vec{L} = \vec{0} \ en\ tout\ point \\ \sum \vec{F} = \vec{0} \\ \sum \vec{M} = \vec{0} \ en\ tout\ point \end{cases}$$

Attention : $\sum \vec{F} = \vec{0}$ et $\sum \vec{M} = \vec{0}$ n'impliquent pas toujours $\vec{v} = \vec{0}$ (la vitesse peut être constante).

1.2.8 Méthodes de résolution

1. Choisir un référentiel galiléen
2. Faire le bilan des forces
3. Faire un schéma
4. Ecrire le PFD ou le théorème du moment cinétique
5. Exprimer les relations vectorielles dans un repère convenablement choisi

1.3 Travail, puissance, énergie

1.3.1 Définitions

Un système possède de l'énergie s'il peut fournir du travail ou de la chaleur.

Un point matériel possède de l'énergie potentielle s'il peut fournir un travail quand on modifie sa position.

Un point matériel possède de l'énergie cinétique s'il peut fournir un travail quand on modifie sa vitesse.

1.3.2 Puissance - travail

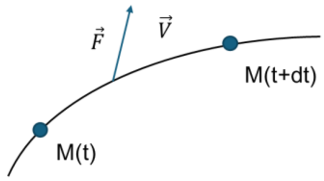
Soit un point matériel de masse m, animé d'une vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel R et soumis à une force $\vec{F}$.

Par définition, on appelle **puissance** de la force $\vec{F}$ la grandeur scalaire

$$\mathrm{P} = \vec{F}.\vec{v}$$

F en N ; v en m/s ; P en Watts

Entre un instant t où le point matériel occupe une position M et un instant t+dt où il occupe une position une position M', le vecteur position passe de $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ à $\overrightarrow{OM'} = \vec{r} + \overrightarrow{dr}$ donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{dr}$.



dt étant infiniment petit on a $\overrightarrow{dr} = \vec{v}.dt$.

Par définition, on appelle **travail élémentaire** de la force $\vec{F}$ la grandeur scalaire

$$\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dr}$$

F en N; dr en m ; δW en Joules

Relation travail puissance

$$\delta W = P.dt$$

Pour un déplacement fini s'effectuant entre deux positions $M_1(t_1)$ et $M_2(t_2)$, le travail de la force $\vec{F}$ a pour expression

$$W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\overrightarrow{dr}$$

Remarque : on appelle circulation d'un vecteur la grandeur scalaire $dC = \vec{A}.\overrightarrow{dl}$. Ainsi le travail d'une force dans un déplacement donné est égal à la circulation du vecteur force sur ce déplacement.

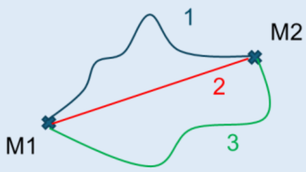
1.3.3 Forces conservatives et non conservatives

Dans le cas général, le travail d'une force pour un déplacement s'effectuant entre deux positions M_1 et M_2 peut dépendre du trajet suivi entre ces deux points.

On dit qu'une force est **conservative** si son travail est indépendant du chemin suivi. Son travail W ne dépend alors que de la position des points M_1 et M_2.

$\vec{F}$ force conservative :

$$W(M_1 \to M_2)_1 = W(M_1 \to M_2)_2 = W(M_1 \to M_2)_3$$



Pour un parcours s'effectuant sur un trajet fermé,

$$W = \oint_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\overrightarrow{dr} = 0$$

Remarque : l'intégrale notée $\oint ⬚$ signifie trajet fermé (les positions M_1 et M_2 sont identiques).

En appelant champ de forces $\vec{F}$ l'ensemble des forces associées à une position M de l'espace, le travail de la force qui s'exerce sur un point matériel est nul pour tout parcours fermé s'effectuant sur un champ de forces conservatif.

<u>Exemple : force élastique exercée par un ressort</u>

$$\overrightarrow{OM} = x.\overrightarrow{e_x}$$

Force exercée par le ressort : $\vec{F} = -k.x.\overrightarrow{e_x}$

$$\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dr} = -k.x.\overrightarrow{e_x}.dx.\overrightarrow{e_x} = -k.x.dx$$

$$W_{1-2} = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx = \frac{1}{2}.k.(x_1^2 - x_2^2)$$

$\vec{F}$ est donc une force conservative car son travail ne dépend que des états 1 et 2.

<u>Exemple : point matériel soumis à des frottements fluides</u>

$$\vec{F} = -k.\vec{v}$$

Avec $\vec{v}$: vitesse du point matériel.

$$\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dr} = -k.\vec{v}.\overrightarrow{dr}$$

$\overrightarrow{dr} = \vec{v}.dt$ donc $\delta W = -\mathrm{k}.\vec{v}.\vec{v}.dt = -k.v^2.dt$

Sur un trajet fermé,

$$W = \oint_{M_1}^{M_2} -k.v^2.dt < 0$$

$W \neq 0$ donc la force de frottement est non conservative.

De façon générale, les forces de frottement ne sont pas conservatives.

1.3.4 Energie cinétique d'un point matériel / théorème de l'énergie cinétique

Considérons un point matériel soumis à une force $\vec{F}$ dans un référentiel galiléen.

$$\mathrm{P} = \vec{F}.\vec{v}$$

D'après le principe fondamental de la dynamique,

$$\mathrm{P} = m.\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v}$$

Or $\vec{v}.\vec{v} = v^2$ donc

$$\frac{d\vec{v}.\vec{v}}{dt} = 2.\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v}$$

Ainsi

$$\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v} = \frac{1}{2}.\frac{dv^2}{dt}$$

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}.\frac{d}{dt}(mv^2)$$

Par définition on appelle énergie cinétique d'un point matériel de masse m animé d'une vitesse v la grandeur Ec telle que

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

De plus,

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(E_C)$$

Ce résultat est appelé théorème de la puissance cinétique.

Plus généralement, dans un référentiel galiléen, la puissance des efforts appliqués à un point matériel est égale à la dérivée par-rapport au temps de l'énergie cinétique du point matériel.

En intégrant entre deux instants t_1 et t_2 on peut écrire :

$$\int_{t_1}^{t_2} P.dt = \int_1^2 dE_c$$

On obtient le théorème de l'énergie cinétique.

Théorème de l'énergie cinétique

Entre un instant initial et un instant final, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel évoluant dans un référentiel galiléen est égale à la somme des travaux des forces appliquées au point matériel entre ces deux instants.

$$W_{1-2} = E_{c2} - E_{c1} = \Delta E_c$$

<u>Exemple : étude d'une chute libre</u>

Le système n'est soumis qu'à son poids $\vec{P} = m.\vec{g}$

$$W_{1-2} = -mg(z_2 - z_1)$$

$$\Delta E_{c(1-2)} = \frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique,

$$V_2^2 - V_1^2 = 2g(z_1 - z_2)$$

Si le solide n'a pas de vitesse initiale ($V_1 = 0$) et que $z_1 - z_2 = h$, on a $V_2 = \sqrt{2gh}$.

1.3.5 Energie potentielle

Soit un point matériel de masse m se déplaçant dans un champ de forces conservatif.

Par définition, on appelle énergie potentielle d'un point matériel la quantité Ep telle que pour tout déplacement du point matériel, le travail élémentaire de $\vec{F}$ est l'opposé de la variation élémentaire de Ep.

$$\delta W = -dE_p$$

Exemple

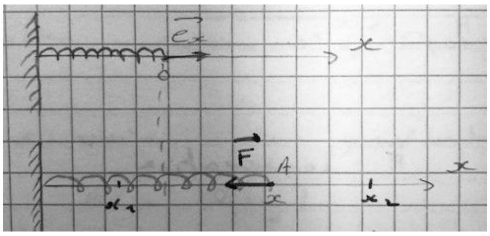
$$W_{1-2} = mg(z_1 - z_2)$$

On définit l'énergie potentielle de pesanteur.

$$E_p = mgz + cste$$

cste : constante réelle.

Exemple : force élastique



La force $\vec{F}$ exercée par le ressort est

$$\vec{F} = -k.x.\overrightarrow{e_x}$$

$\vec{F}$ est conservative.

$$\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = -dE_p$$

$$k.x.dx = dE_p$$

Par intégration,

$$\frac{1}{2}k.x_2^2 - \frac{1}{2}k.x_1^2 = E_{p2} - E_{p1}$$

La force $\vec{F}$ est associée à l'énergie potentielle

$$E_p = \frac{1}{2}k.x^2 + cste$$

cste : constante réelle

Exemple : énergie potentielle électrostatique

Loi de Coulomb : soient deux charges électriques ponctuelles d'intensité Q et q, éloignées d'une distance r. La force électrostatique qui apparait sur ces deux charges a pour expression

$$\vec{F} = k.\frac{Q.q}{r^2}.\overrightarrow{e_x}$$

$\vec{F}$ est conservative. k est la constante de Coulomb.

$$\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = k.\frac{Q.q}{r^2}.dx = -dE_p$$

Par intégration,

$$kQq\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) = E_{p2} - E_{p1}$$

$$\boxed{E_p = \frac{kqG}{x} + cste}$$

cste : constante réelle

Exemple : énergie potentielle gravitationnelle

$$\vec{F} = -G.\frac{m.M}{r^2}.\overrightarrow{e_x}$$

$$\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = -G.\frac{m.M}{r^2}.dx = -dE_p$$

$$GmM\left(-\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}\right) = E_{p2} - E_{p1}$$

$$\boxed{E_p = -\frac{GmM}{x} + cste}$$

1.3.5.1 Cas d'une force conservative (champ de forces conservatif)

Par définition, pour une force conservative, son travail sur un circuit fermé est nul.

$$W = \oint_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\overrightarrow{dr} = 0$$

Alors on montre que :

Pour toute force conservative il existe une fonction scalaire Ep telle que

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_p)$$

Pour une force conservative,

$$W_{1-2} = E_{p1} - E_{p2}$$

Remarque

Soit $\vec{F}$ un champ de force conservatif, alors il existe une fonction scalaire Ep telle que

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_p)$$

Dans une base (x,y,z) cartésienne l'égalité devient

$$\begin{cases} F_x = \dfrac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = \dfrac{\partial E_p}{\partial y} \\ F_z = \dfrac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$

On peut alors énoncer une condition pour que soit $\vec{F}$ un champ de force conservatif.

$\vec{F}$ est un champ de force conservatif si

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = \dfrac{\partial F_x}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_z}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial z} \end{cases}$$

1.3.6 Energie mécanique d'un point matériel

Par définition, l'énergie mécanique Em d'un point matériel est la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique

$$E_m = E_c + E_p$$

Entre deux instants 1 et 2, l'énergie mécanique est susceptible de varier.

$$\Delta E_m(1-2) = \Delta E_c(1-2) + \Delta E_p(1-2)$$

Théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c(1-2) = W_{1-2}(forces\ conservatives) + W_{1-2}(forces\ non\ conservatives)$$

Energie potentielle :

$$W_{1-2}(forces\ conservatives) = -\Delta E_p(1-2)$$

Donc

$$\Delta E_m(1-2) = W_{1-2}(forces\ non\ conservatives)$$

En particulier,

$$\Delta E_m = 0$$

si le point matériel évolue dans un champ de forces conservatif.

Pour des forces de frottement (forces non conservatives), W est négatif donc Em diminue.

1.3.7 Equilibre d'un point matériel

On se limite à l'étude d'un point matériel évoluant selon une dimension de l'espace (par exemple x en coordonnées cartésiennes, θ en coordonnées cylindriques).

Soit un point matériel de masse m en équilibre dans un champ de forces conservatif tel que

$$\vec{F} = F_x.\overrightarrow{e_x}$$

$\vec{F}$ étant une force conservative, Em est constante. Soit

$$E_m = E_c + E_p = K$$

Le point étant en équilibre, $\vec{F} = \vec{0}$.

De plus,

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_p) = -\frac{\partial E_p}{\partial x}.\overrightarrow{e_x} = -\frac{dE_p}{dx}.\overrightarrow{e_x}$$

On a donc

$$\frac{dE_p}{dx} = 0 \implies extremum\ de\ E_p$$

A l'équilibre, Ep est maximum ou minimum.

Supposons alors un petit déplacement dx positif dans le sens de la force.

L'équilibre sera stable si la force $\vec{F}$ tend à ramener le point vers sa position d'équilibre. Dans ce cas, $dF_x < 0$.

Or

$$dF_x = \frac{\partial F_x}{\partial x}dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}\right).dx = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}dx$$

Equilibre si

$$\frac{dE_p}{dx} = 0$$

$\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$: stable / $\frac{d^2E_p}{dx^2} = 0$: indifférent / $\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$: instable

1.4 Cinématique avec changement de référentiel

1.4.1 Définitions et hypothèses

Soit $(\mathcal{R}_A)$ un référentiel fixe O_1xyz.

Soit $(\mathcal{R}_E)$ un référentiel mobile O_2xyz.

Dans chaque référentiel on place un observateur lié au repère et une horloge (mesure du temps). Le temps est universel.

Un point M de l'espace peut être repéré dans $(\mathcal{R}_A)$ et dans $(\mathcal{R}_E)$.

$$M\begin{pmatrix} Dans\ (\mathcal{R}_A): (x,y,z,t) \\ Dans\ (\mathcal{R}_E): (X,Y,Z,t) \end{pmatrix}$$

Le mouvement de M dans $(\mathcal{R}_A)$ est appelé mouvement absolu.

Le mouvement de M dans $(\mathcal{R}_E)$ est appelé mouvement relatif.

Le mouvement de $(\mathcal{R}_E)$ par-rapport à $(\mathcal{R}_A)$ est le mouvement d'entrainement.

1.4.2 Loi de composition des vitesses

Dans $(\mathcal{R}_A)$,

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M} = \overrightarrow{O_1O_2} + X.\vec{I} + Y.\vec{J} + Z.\vec{K}$$

Dans $(\mathcal{R}_E)$,

$$\overrightarrow{O_2M} = X.\vec{I} + Y.\vec{J} + Z.\vec{K}$$

Ainsi,

$$\left(\overrightarrow{V_M}\right)_{\mathcal{R}_A} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_A} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_A} + \dot{X}.\vec{I} + \dot{Y}.\vec{J} + \dot{Z}.\vec{K} + X.\frac{d\vec{I}}{dt} + Y.\frac{d\vec{J}}{dt} + Z.\frac{d\vec{K}}{dt}$$

$$\left(\overrightarrow{V_M}\right)_{\mathcal{R}_E} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_A} = \dot{X}.\vec{I} + \dot{Y}.\vec{J} + \dot{Z}.\vec{K}$$

En effet, $\vec{I}, \vec{J} et \vec{K}$ sont constants dans $(\mathcal{R}_E)$.

Supposons $(\mathcal{R}_E)$ en translation par-rapport à $(\mathcal{R}_A)$, alors $\vec{I}, \vec{J} et \vec{K}$ sont constants dans $(\mathcal{R}_A)$ et

$$\left(\overrightarrow{V_M}\right)_{\mathcal{R}_A} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_A} + \left(\overrightarrow{V_M}\right)_{\mathcal{R}_E}$$

Supposons $(\mathcal{R}_E)$ en rotation autour d'un axe fixe par-rapport à $(\mathcal{R}_A)$ avec $O_1 = O_2$ et la rotation s'effectue autour de O_1z. Alors $\vec{K}$ est constant, $\vec{I}$ et $\vec{J}$ sont fonction du temps

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{I}}{dt} = \dot{\theta}.\vec{J} \\ \dfrac{d\vec{J}}{dt} = -\dot{\theta}.\vec{I} \\ \dfrac{d\vec{K}}{dt} = \vec{0} \end{cases}$$

Alors

$$\left(\overrightarrow{V_M}\right)_{\mathcal{R}_A} = \left(\overrightarrow{V_M}\right)_{\mathcal{R}_E} + X.\dot{\theta}.\vec{J} + Y.\left(-\dot{\theta}.\vec{I}\right)$$

Or $\vec{K} \wedge \vec{I} = \vec{J}$; $\vec{J} \wedge \vec{K} = \vec{I} = -\vec{K} \wedge \vec{J}$

$$\left(\overrightarrow{V_M}\right)_{\mathcal{R}_A} = \left(\overrightarrow{V_M}\right)_{\mathcal{R}_E} + \dot{\theta}.\vec{K} \wedge \left(X.\vec{I} + Y.\vec{J}\right) = \left(\overrightarrow{V_M}\right)_{\mathcal{R}_E} + \dot{\theta}.\vec{K} \wedge \left(X.\vec{I} + Y.\vec{J} + Z.\vec{K}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{V_M}\right)_{\mathcal{R}_A} = \left(\overrightarrow{V_M}\right)_{\mathcal{R}_E} + \dot{\theta}.\vec{K} \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

On définit le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ du référentiel mobile par-rapport au référentiel fixe, tel que

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta}.\vec{K}$$

L'amplitude du vecteur rotation est la vitesse de rotation angulaire $\dot{\theta}$. Le vecteur rotation est porté par l'axe de rotation $\vec{K}$.

Finalement

$$\left(\overrightarrow{V_M}\right)_{\mathcal{R}_A} = \left(\overrightarrow{V_M}\right)_{\mathcal{R}_E} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_E/\mathcal{R}_A} \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

Dans le cas général, on pourra toujours ramener la description d'un mouvement à une combinaison d'une translation et d'une rotation. La loi générale de composition des vitesses pourra ainsi s'écrire

$$\boxed{\left(\overrightarrow{V_M}\right)_{\mathcal{R}_A} = \left(\overrightarrow{V_M}\right)_{\mathcal{R}_E} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_A} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_E/\mathcal{R}_A} \wedge \overrightarrow{O_2M}}$$

$\left(\overrightarrow{V_M}\right)_{\mathcal{R}_A}$: vitesse absolue

$\left(\overrightarrow{V_M}\right)_{\mathcal{R}_E}$: vitesse relative

$\left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_A} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_E/\mathcal{R}_A} \wedge \overrightarrow{O_2M}$: vitesse d'entrainement

On peut aussi écrire

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_r} + \overrightarrow{V_e}$$

- $\overrightarrow{V_a}$: vitesse du point dans le référentiel fixe
- $\overrightarrow{V_r}$: vitesse du point dans le référentiel mobile
- $\overrightarrow{V_e}$: vitesse d'entrainement

1.4.3 Loi de composition des accélérations

1.4.3.1 Formule de dérivation vectorielle

Soient deux points mobiles M et P. écrivons la loi de composition des vitesses pour ces deux points :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O_1\mathrm{M}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_A} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_2\mathrm{M}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_E} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_A} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_E/\mathcal{R}_A} \wedge \overrightarrow{O_2M} \ (1)$$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O_1\mathrm{P}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_A} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_2\mathrm{P}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_E} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_A} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_E/\mathcal{R}_A} \wedge \overrightarrow{O_2P} \ (2)$$

(2)-(1) :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O_1\mathrm{P}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_A} - \left(\frac{d\overrightarrow{O_1\mathrm{M}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_A} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_2\mathrm{P}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_E} - \left(\frac{d\overrightarrow{O_2\mathrm{M}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_E} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_E/\mathcal{R}_A} \wedge \overrightarrow{O_2P} - \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_E/\mathcal{R}_A} \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{MP}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_A} = \left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{MP}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_E} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_E/\mathcal{R}_A} \wedge \overrightarrow{MP}$$

De façon générale, pour un vecteur $\vec{A}$,

$$\left(\frac{d\vec{\mathrm{A}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_A} = \left(\frac{d\vec{\mathrm{A}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_E} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_E/\mathcal{R}_A} \wedge \vec{A}$$

1.4.3.2 Etude des accélérations

On repart de l'expression générale de la vitesse

$$(\overrightarrow{V_M})_{\mathcal{R}_A} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_A} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_2\mathrm{M}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_E} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_E/\mathcal{R}_A} \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

L'accélération de M est donnée par

$$(\overrightarrow{a_M})_{\mathcal{R}_A} = \left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{V_M}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_A}$$

$$(\overrightarrow{a_M})_{\mathcal{R}_A} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_A} + \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_2\mathrm{M}}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_E} + \vec{\Omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O_2\mathrm{M}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_E} + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{\mathrm{dt}} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right)_{\mathcal{R}_E} + \vec{\Omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O_2\mathrm{M}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_E} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_2M})$$

On définit alors

Accélération absolue

$$(\overrightarrow{a_M})_{\mathcal{R}_A}$$

Accélération relative

$$\left(\frac{d^2\overrightarrow{O_2\mathrm{M}}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_E}$$

Accélération d'entrainement $\vec{a}_e$

$$\left(\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_A} + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{\mathrm{dt}} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right)_{\mathcal{R}_E} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_2M})$$

Accélération de Coriolis $\vec{a}_c$

$$2\vec{\Omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O_2\mathrm{M}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_E}$$

1.5 Dynamique dans un référentiel non galiléen

1.5.1 Notion de forces d'inertie

Soit un point matériel de masse m en mouvement et deux référentiels R (fixe) et R' (mobile).

R est supposé galiléen.

Dans R on peut appliquer le PFD :

$$\sum \vec{F} = \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_R = m.(\vec{a})_R$$

(on suppose m constante).

En utilisant la loi de composition des accélérations :

$$(\vec{a})_R = (\vec{a})_{R'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

$$\sum \vec{F} - m.\vec{a}_e - m.\vec{a}_c = m.(\vec{a})_{R'}$$

L'application du PFD dans R' est possible à condition de rajouter à la somme des forces deux termes :

- Force d'inertie d'entrainement $\overrightarrow{F_{ie}} = -m.\vec{a}_e$
- Force d'inertie de Coriolis $\overrightarrow{F_{ic}} = -m.\vec{a}_c$

Dans un référentiel R' non galiléen, le PFD donne

$$\sum \vec{F} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_{ic}} = m.(\vec{a})_{R'}$$

<u>Exemple</u>

R' est en translation verticale par-rapport à R : $\vec{\Omega}_{\mathrm{R}'/\mathrm{R}} = \vec{0}$ donc $\vec{a}_c = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{F_{ic}} = \vec{0}$.

$$\vec{a}_e = \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right)$$

$$\overrightarrow{F_{ie}} = -m.\left(\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right)$$

C’est le mouvement d’une cabine d’ascenseur par-rapport à la Terre. Soit le passager de la cabine assimilé à un point matériel.

Dans R :

$$\vec{P} + \vec{N} = m.(\vec{a})_R$$

Dans R’ :

$$\vec{P} + \vec{N} + \overrightarrow{F_{ie}} = \vec{P} + \vec{N} - m.\overrightarrow{a_e} = m.(\vec{a})_{R'}$$

$\overrightarrow{a_e}$ est l’accélération de la cabine par-rapport à la Terre.

$$(\vec{a})_{R'} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{N} - m.\overrightarrow{a_e} = \vec{0}$$

$$\vec{N} = m.\overrightarrow{a_e} - \vec{P}$$

<u>Pour un mouvement descendant :</u>

Mouvement uniforme : $\overrightarrow{a_e} = \vec{0}$ alors N=mg

Mouvement uniformément accéléré : $\overrightarrow{a_e} = -a.\overrightarrow{e_z}$ alors $\vec{N} = m(-a+g).\overrightarrow{e_z}$ et N<mg (si a=g : impesanteur !)

Mouvement uniformément retardé : $\overrightarrow{a_e} = a.\overrightarrow{e_z}$ alors $\vec{N} = m(a+g).\overrightarrow{e_z}$ et N>mg

1.5.2 Théorème du moment cinétique

$$\sum \vec{F} = m.\vec{a}_e + m.\vec{a}_c + m.(\vec{a})_{R'}$$

Alors

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_R = \overrightarrow{OA} \wedge (m.\vec{a}_e + m.\vec{a}_c + m.(\vec{a})_{R'})$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_R = \overrightarrow{OA} \wedge (m.(\vec{a})_{R'}) + \overrightarrow{OA} \wedge (m.\vec{a}_c) + \overrightarrow{OA} \wedge (m.\vec{a}_e)$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_R - \overrightarrow{OA} \wedge (m.\vec{a}_c) - \overrightarrow{OA} \wedge (m.\vec{a}_e) = \overrightarrow{OA} \wedge (m.(\vec{a})_{R'})$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_R + \vec{M}_{Fe} + \vec{M}_{Fc} = \overrightarrow{OA} \wedge m.(\vec{a})_{R'}$$

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{R'} = \overrightarrow{OA} \wedge \left(\sum \vec{F} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_{ic}}\right)}$$

Dans un référentiel non galiléen, la dérivée par-rapport au temps du vecteur moment cinétique est égale au moment de la somme des forces appliquées auxquelles il convient de rajouter les forces d’inertie.

1.6 Quantité de mouvement – chocs

1.6.1 Quantité de mouvement

Soit un point matériel G de masse m de vitesse $\vec{V}_G$

La quantité de mouvement $\vec{p}$ est définie par :

$$\vec{p} = m.\vec{V}_G$$

1.6.2 Théorème de la quantité de mouvement

Selon le PFD,

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G = m.\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_G\right) = \frac{d}{dt}\left(m.\vec{V}_G\right) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La résultante des forces extérieures est égale à la dérivée par-rapport au temps de la quantité de mouvement.

1.6.3 Impulsion

L'impulsion $\overrightarrow{I_{1-2}}$ donnée à un solide pendant un intervalle de temps entre t_1 et t_2 est égale à la variation de la quantité de mouvement entre ces deux instants.

$$\overrightarrow{I_{1-2}} = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1} = m.\vec{V}_G(2) - m.\vec{V}_G(1) = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}_{ext}$$

$\overrightarrow{I_{1-2}}$ en N.s ou kg.m/s

Si la résultante des forces extérieures est constante au cours du temps, on peut écrire :

$$\overrightarrow{I_{1-2}} = \sum \vec{F}_{ext}\,.(t_2 - t_1) = \sum \vec{F}_{ext}\,.\Delta t$$

1.6.4 Conservation de la quantité de mouvement

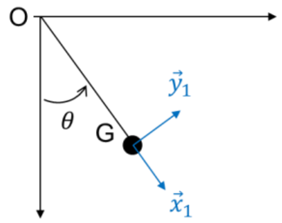
Pour un solide isolé (ou pour un ensemble de solides), si la somme des impulsions fournies par les actions extérieures est nulle, il y a conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique. Ces grandeurs restent constantes au cours du temps.

2 Exercices

2.1 Exercice : pendule simple

Soit un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle de masse m repérée par G, suspendue à un fil de masse négligeable accroché à un bâti en O.

Ecrire le PFD appliqué au pendule dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, en déduire l'équation du mouvement du pendule



Correction

PFD

$$\sum \vec{F} = m\vec{g} + T.\vec{x}_1 = m\vec{a}$$

Vitesse et accélération de G

$$\vec{v} = L.\dot{\theta}.\vec{y}_1$$

$$\vec{a} = L.\ddot{\theta}.\vec{y}_1 - L.\dot{\theta}^2.\vec{x}_1$$

Pesanteur :

$$m.\vec{g} = mg(cos\theta\vec{x}_1 - sin\theta\vec{y}_1)$$

PFD sur y1

$$-mgsin\theta = m.L.\ddot{\theta}$$

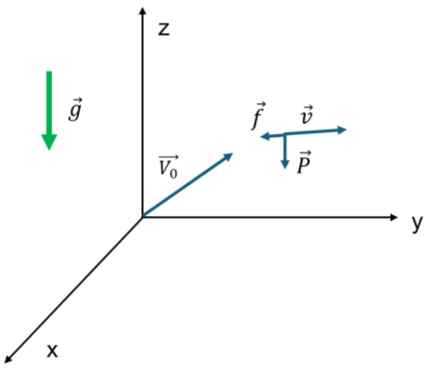
$$l.\ddot{\theta} + g.sin\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}.sin\theta = 0}$$

2.2 Exercice : mouvement d'un projectile dans un champ de pesanteur

Déterminer la vitesse et l'accélération d'un point matériel M de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$, soumis à des frottements $\vec{f}$, de vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$.

Les frottements ont pour expression $\vec{f} = -\lambda.\vec{v}$.



Correction

PFD

$$m.\vec{g} - \lambda.\vec{v} = m.\vec{a} = m.\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\lambda}{m}.\vec{v} = \vec{g}$$

On obtient une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants.

$$\vec{v} = \vec{A}.e^{-\frac{\lambda}{m}.t} + \frac{m}{\lambda}.\vec{g}$$

Avec $\vec{A}$ vecteur constant.

A t=0, la vitesse initiale est $\overrightarrow{v_0}$ donc $\vec{A} = \overrightarrow{v_0} - \frac{m}{\lambda}.\vec{g}$

$$\vec{v} = \left(\overrightarrow{v_0} - \frac{m}{\lambda}.\vec{g}\right).e^{-\frac{\lambda}{m}.t} + \frac{m}{\lambda}.\vec{g}$$

Par intégration

$$\overrightarrow{OM} = -\frac{m}{\lambda}.\left(\overrightarrow{v_0} - \frac{m}{\lambda}.\vec{g}\right).e^{-\frac{\lambda}{m}.t} + \frac{m}{\lambda}.\vec{g}.t + \vec{B}$$

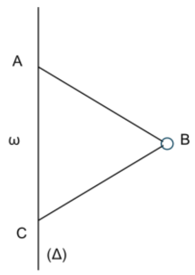
$\vec{B}$ vecteur constant.

A t=0, $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$.

$$\vec{B} = \frac{m}{\lambda}.\left(\overrightarrow{v_0} - \frac{m}{\lambda}.\vec{g}\right)$$

$$\overrightarrow{OM} = -\frac{m}{\lambda}.\left(\overrightarrow{v_0} - \frac{m}{\lambda}.\vec{g}\right).e^{-\frac{\lambda}{m}.t} + \frac{m}{\lambda}.\vec{g}.t + \frac{m}{\lambda}.\left(\overrightarrow{v_0} - \frac{m}{\lambda}.\vec{g}\right)$$

2.3 Exercice : bille suspendue à deux fils



Une bille B de masse m assimilable à un point matériel est reliée à un axe vertical Δ par deux fils de même longueur et de masse négligeable.

AB=BC=L ; AC = a.

La bille a un mouvement circulaire uniforme, vitesse de rotation ω constante, autour de l'axe.

1/ Exprimer les tensions T_A et T_C des deux fils en fonction des données du problème

2/ Montrer qu'il existe une valeur limite de la vitesse angulaire au dessous de laquelle le fil BC n'est plus tendu. Calculer cette valeur.

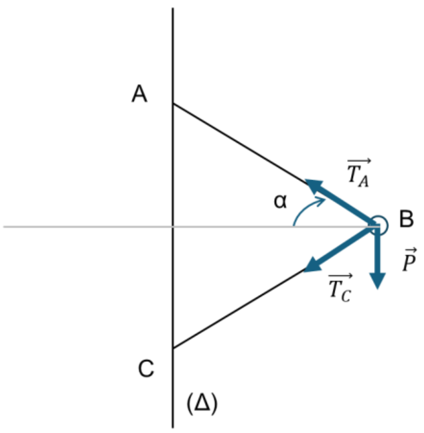
On donne $\omega = 8\, rad/s$; $m = 0,6\, kg$; $L = 0,7\, m$; $g = 9,8\, m/s^2$; $a = 1m$

Correction

On suppose la bille dans le référentiel terrestre considéré galiléen.

$$\vec{a} = -m.\omega^2.R.\overrightarrow{e_r}$$

Bilan des forces



PFD

$$\vec{P} + \overrightarrow{T_A} + \overrightarrow{T_C} = m.\vec{a}$$

Projection sur l'axe $\overrightarrow{e_r}$

$$-T_A.cos\alpha - T_C.cos\alpha = -m.\omega^2.R$$

$$T_A + T_C = \frac{m.\omega^2.R}{cos\alpha}$$

R est la distance de la bille à l'axe.

Projection sur l'axe z

$$-mg + T_A.sin\alpha - T_C.sin\alpha = 0$$

$$T_A - T_C = \frac{m.g}{sin\alpha}$$

Par addition,

$$\boxed{T_A = \frac{1}{2}m.\left(\frac{\omega^2.R}{cos\alpha} + \frac{g}{sin\alpha}\right)}$$

Par différence,

$$\boxed{T_C = \frac{1}{2}m.\left(\frac{\omega^2.R}{cos\alpha} - \frac{g}{sin\alpha}\right)}$$

Application numérique : $T_A = 17{,}6\ N$ $T_C = 9{,}3\ N$

2/

$$\frac{dT_C}{d\omega} = \frac{mR}{cos\alpha}.\omega > 0$$

Donc quand ω diminue, Tc diminue.

$$\boxed{T_C = 0 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g}{a}}}$$

Application numérique : $\omega = 4{,}43\ rad/s$

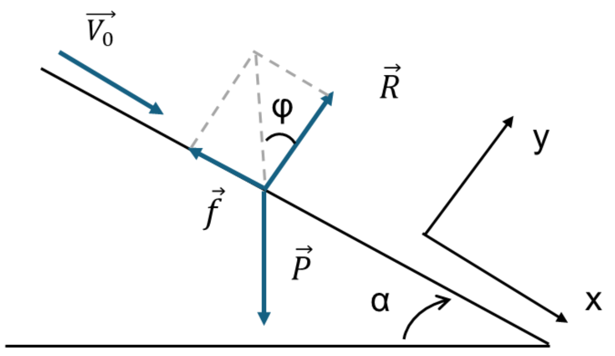
2.4 Exercice : mouvement d'un solide sur un plan incliné

Un objet assimilable à un point matériel de masse m est lancé avec une vitesse Vo, vers le bas, suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale.

Le frottement entre le solide et le plan incliné est caractérisé par le coefficient $h = tan\varphi = constante$.

On admettra par ailleurs que les coefficients de frottement dynamique et statique sont confondus.

Discuter du mouvement du plan matériel le long du plan incliné suivant les valeurs de frottement et de l'inclinaison du plan incliné. On précisera dans chaque cas la nature du mouvement.



Correction

Sur x

$$mgsin\alpha - h.R = m.a_x$$

Sur y

$$-mgcos\alpha + R = 0$$

Donc

$$a_x = g.sin\alpha - h.g.cos\alpha = g.cos\alpha.(tan\alpha - h)$$

Si $h = tan\alpha$, alors $a_x = 0$: mouvement rectiligne uniforme (vitesse constante)

Si $h < tan\alpha$, alors $a_x > 0$: mouvement rectiligne uniformément accéléré

Si $h > tan\alpha$, alors $a_x < 0$: mouvement rectiligne uniformément retardé

2.5 Exercice : travail d'une force le long d'un cercle

Dans un plan xOy on considère le cercle de centre O, de rayon R et le champ de forces

$$\vec{f} = (2x - y + z)\vec{\imath} + (x + y - z^2)\vec{\jmath} + (3x - 2y + 4z)\vec{k}$$

Calculer le travail fourni en déplaçant un point M le long de la circonférence pour un tour.

Correction

Soit M(x ;y ;z) sur le cercle, alors

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} Rcos\theta \\ Rsin\theta \\ constante \end{cases}$$

Le travail W du champ de forces le long d'un tour a pour expression :

$$W = \int_{tour} \vec{f}.\overrightarrow{dl}$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} -Rsin\theta d\theta \\ Rcos\theta d\theta \\ 0 \end{cases}$$

En effet, une petite variation dx a pour expression $dx = \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta$. De même en y et z.

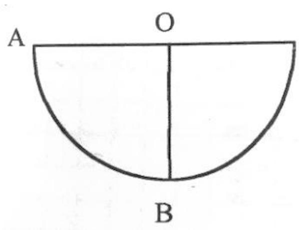
On écrit le champ de forces en coordonnées polaires (en fonction de R et θ).

Finalement,

$$W = \int_0^{2\pi} R^2 \left(1 - \frac{1}{2} sin2\theta\right) d\theta = 2\pi R^2$$

2.6 Exercice : bille sur un plan incliné

Une bille assimilable à un point matériel de masse m=1g est mobile à l'intérieur d'une demie-sphère de centre O et de rayon R=1m. On lâche la bille sans vitesse initiale du point A et elle parvient en B avec une vitesse de 4m/s.



Montrer que la bille est soumise à des forces de frottement et calculer le travail de ces forces.

Correction

On peut calculer la vitesse théorique d'arrivée en B

$$E_c(A) = 0$$

En B,

$$W_{A-B}(Poids) = E_{cB} - E_{cA} = E_{cB} = \frac{1}{2} m V_B{}^2$$

Nota : la réaction du support ne travaille pas car à tout moment elle est normale au vecteur vitesse.

$$z_B = 0$$

$$z_A = R$$

$$W_{A-B}(Poids) = mg(z_A - z_B) = mgR$$

Donc sans frottements,

$$V_B = \sqrt{2gR} \approx 4{,}43\ m/s$$

La vitesse réelle est inférieure à cette vitesse théorique donc la bille est soumise à des forces de frottement.

Théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = W(poids) + W(reaction\ du\ support) + W(frottements)$$

$$W(frottements) = mgR - \frac{1}{2}.mV_B^2 \approx -1{,}8.10^{-3}\ J$$

2.7 Exercice : champ de forces non conservatif

Montrer que le champ de forces ci-dessous ne dérive pas d'un potentiel scalaire.

$$\vec{f} = x^2yz.\vec{\imath} - xyz^2.\vec{k}$$

Correction

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = x^2.z \neq \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0$$

$\vec{f}$ est un champ de forces non conservatif.

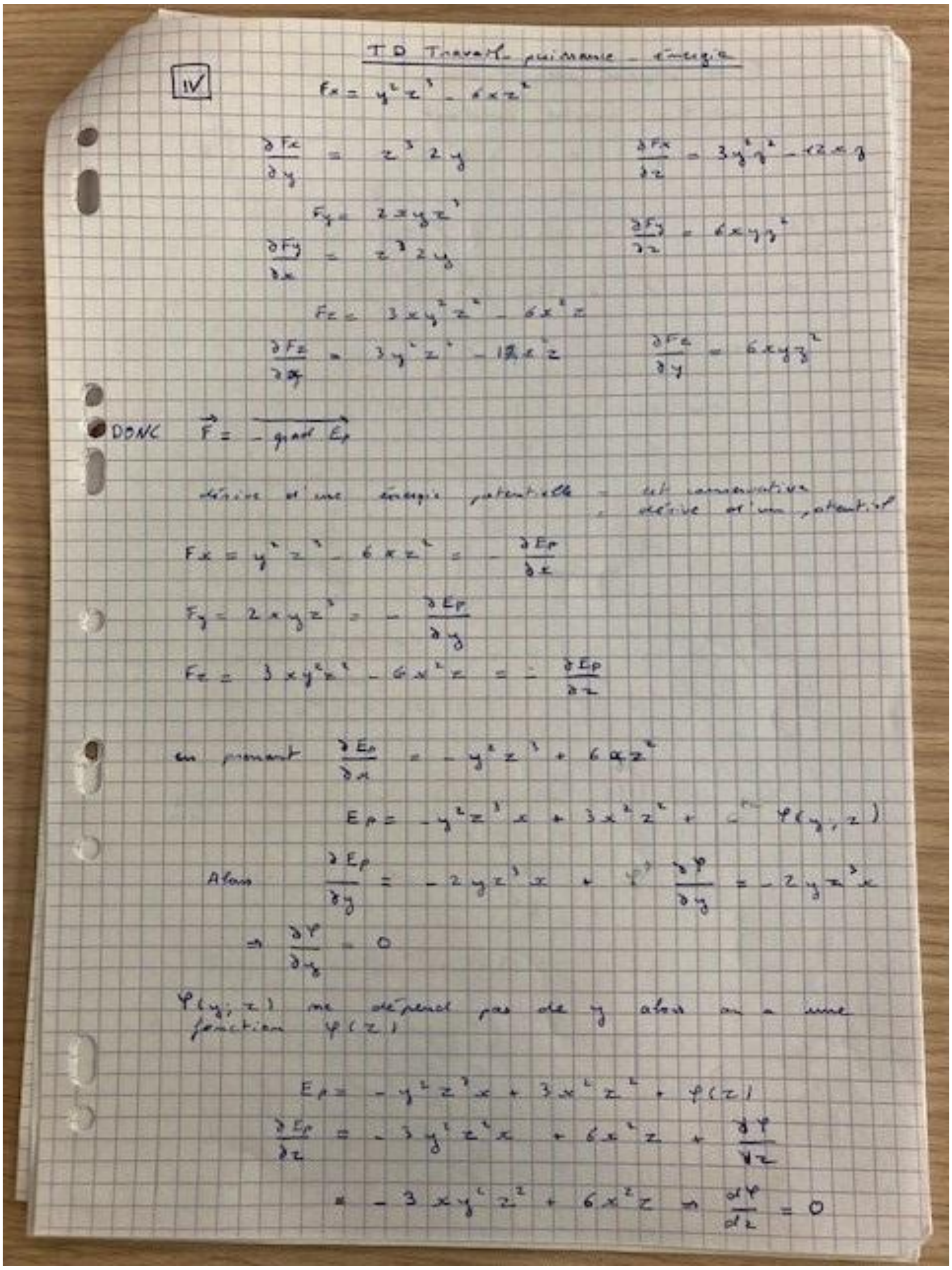
2.8 Exercice : champ de forces conservatif

Montrer que le champ de forces

$$\vec{f} = (y^2z^3 - 6xz^2).\vec{\imath} + 2xyz^3.\vec{\jmath} + (3xy^2z^2 - 6x^2z).\vec{k}$$

dérive d'un potentiel et calculer ce potentiel.

Correction



TD Travail puissance énergie

IV

$F_x = y^2z^3 - 6xz^2$

$\frac{\partial F_x}{\partial y} = z^3\,2y$ $\quad$ $\frac{\partial F_x}{\partial z} = 3y^2z^2 - 12xz$

$F_y = 2xyz^3$

$\frac{\partial F_y}{\partial x} = z^3\,2y$ $\quad$ $\frac{\partial F_y}{\partial z} = 6xyz^2$

$F_z = 3xy^2z^2 - 6x^2z$

$\frac{\partial F_z}{\partial x} = 3y^2z^2 - 12xz$ $\quad$ $\frac{\partial F_z}{\partial y} = 6xyz^2$

DONC $\vec{F} = -\overrightarrow{grad\,E_p}$

dérive d'une énergie potentielle = est conservative = dérive d'un potentiel

$F_x = y^2z^3 - 6xz^2 = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$

$F_y = 2xyz^3 = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$

$F_z = 3xy^2z^2 - 6x^2z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$

en prenant $\frac{\partial E_p}{\partial x} = -y^2z^3 + 6xz^2$

$E_p = -y^2z^3x + 3x^2z^2 + \varphi(y,z)$

Alors $\frac{\partial E_p}{\partial y} = -2yz^3x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2yz^3x$

$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$

$\varphi(y;z)$ ne dépend pas de y alors on a une fonction $\varphi(z)$

$E_p = -y^2z^3x + 3x^2z^2 + \varphi(z)$

$\frac{\partial E_p}{\partial z} = -3y^2z^2x + 6x^2z + \frac{\partial \varphi}{\partial z}$

$= -3xy^2z^2 + 6x^2z \Rightarrow \frac{d\varphi}{dz} = 0$

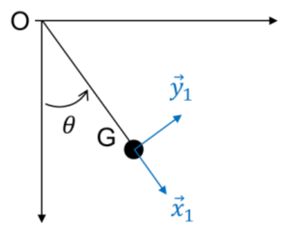
φ ne dépend pas de z donc c'est une constante

$$E_p = -y^2.z^3.x + 3x^2z^2 + constante$$

2.9 Exercice : pendule simple

Soit un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle de masse m repérée par G, suspendue à un fil de masse négligeable accroché à un bâti en O.

Retrouver l'équation du mouvement du pendule par le théorème de l'énergie cinétique.



Correction

Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = P$$

Pesanteur :

$$m.\vec{g} = mg(cos\theta\vec{x}_1 - sin\theta\vec{y}_1)$$

Vecteur vitesse

$$\vec{V} = L.\dot{\theta}.\vec{y}_1$$

Puissance de l'action de pesanteur :

$$P = \vec{P}.\vec{V} = -mgsin\theta.L.\dot{\theta}$$

Energie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2}.m.V^2 = \frac{1}{2}.mL^2.\dot{\theta}^2$$

$$\frac{dE_c}{dt} = mL^2.\ddot{\theta}.\dot{\theta}$$

Donc

$$mL^2.\ddot{\theta}.\dot{\theta} = -mgsin\theta.L.\dot{\theta}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}sin\theta = 0}$$

3 Références Bibliographiques

Brémont, Y. and Réocreux, P. (1995) *Mécanique du solide indéformable: calcul vectoriel, cinématique cours et exercices résolus classes préparatoires aux grandes écoles*. Paris: Ellipses (Mécanique, 1).

Brémont, Y. and Réocreux, P. (1996) *Mécanique du solide indéformable: statique cours et exercices résolus classes préparatoires aux grandes écoles, MPSI, PTSI, PSI, PSI*, MP, MP*, PT, PT*, premier cycle universitaire*. Paris: Ellipses (Mécanique, 2).

Brémont, Y. and Réocreux, P. (1998) *Mécanique du solide indéformable: cinétique, dynamique cours et exercices résolus classes préparatoires aux grandes écoles, PSI, PSI*, MP, MP*, PT, PT*, premier cycle universitaire*. Paris: Ellipses (Mécanique, 3).

Brossard, J.-P. (1996) 'Mécanique générale - Développement de la cinématique', *Physique Chimie* [Preprint]. Available at: https://doi.org/10.51257/a-v1-a1663.

Chaichian, M., Merches, I. and Tureanu, A. (2012) 'Principles of Analytical Mechanics', in Chaichian, M., Merches, I., and Tureanu, A., *Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 27–95. Available at: https://doi.org/10.1007/978-3-642-17234-2_2.

Fanchon, J.-L. (1996) *Guide de mécanique: sciences et technologies industrielles*. Paris: Nathan.

Nadot, Y. (2003) 'Cours mécanique analytique'. ISAE-ENSMA.

Sitographie

- https://eduscol.education.fr/sti/sites/eduscol.education.fr.sti/files/ressources/techniques/1286/1286-151-p46.pdf
- http://userpages.umbc.edu/~rostamia/2014-09-math490/lecture-notes.pdf
- www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/jmr/analytique.pdf