Dimensionnement du viaduc de Garabit

-

Calcul de l'arc central

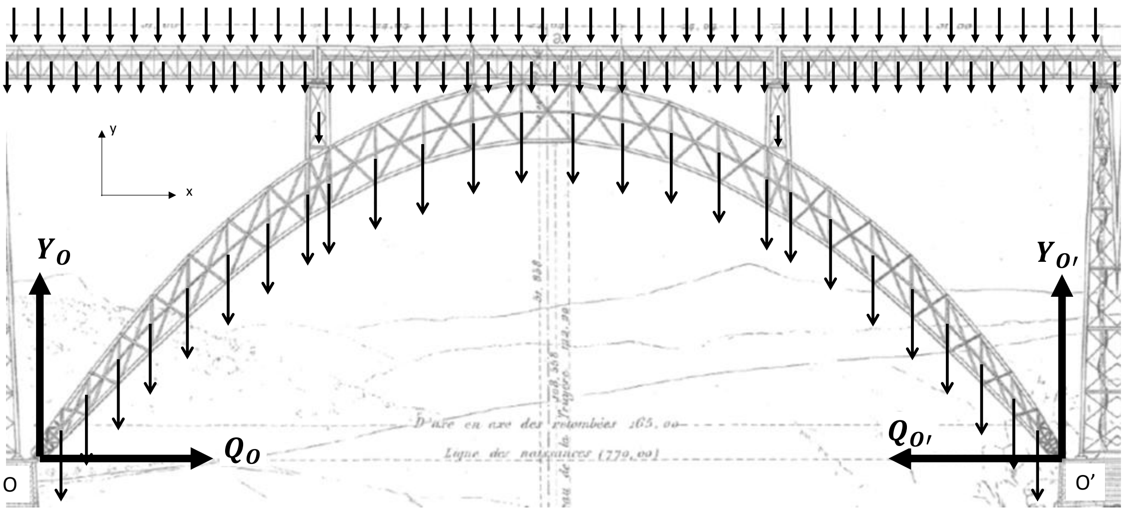


Table des Matières

1 De l'intérêt d'un arc pour le franchissement de la Truyère

Quand l'obstacle à franchir est profond, un pont à poutres muni de piles verticales peut ne pas être la solution la plus adaptée : les coûts et temps de construction de hautes piles sont importants, l'accessibilité du chantier en fond de vallée sera *de facto* complexe, et l'esthétique peut ne pas être au rendez-vous… Par ailleurs, un sol trop meuble en fond de rivière ou le passage de bateaux peuvent empêcher la construction d'une pile immergée.

Une solution économique et élégante est la réalisation d'un arc central franchissant la vallée d'une seule portée. L'arc est principalement sollicité en compression et transmet les charges extérieures aux fondations au niveau de ses naissances (Ducout, 1997). C'est la solution proposée par le jeune ingénier Léon Boyer, pour franchir la vallée de la Truyère et faire gagner de précieux dénivelés et kilomètres au projet de la ligne ferroviaire Neussargues-Marvejols (Eiffel, 1888a, p. 172).

Figure 1. Exemple de structure en arc. Image générée par intelligence artificielle

Or Eiffel et son associé Théophile Seyrig venaient de construire le pont sur le Douro constitué d'une grande arche de 160 m, et c'est grâce à cette réussite qu'il fut contacté pour réaliser le viaduc de Garabit : *« Considérant que le type du pont du Douro étant admis, M. Eiffel, qui l'a conçu et exécuté, est évidemment plus apte que tout autre constructeur à en faire une seconde application, en profitant de l'expérience qu'il a personnellement acquise dans la première ;qu'il serait d'ailleurs peu équitable, dans l'espèce, de confier les travaux à d'autres qu'à M. Eiffel, quand c'est son pont du Douro qui a donné aux Ingénieurs l'idée de franchir la vallée de la Truyère* *par un nouveau tracé dont l'État doit retirer finalement une économie de plusieurs millions »* (Duverger, 1888, p. 175).

On ne s'étonnera donc pas de trouver une justification poussée de la solution en arc central dans le mémoire de Seyrig sur le pont sur le Douro publié à la Société des Ingénieurs Civils en 1878 (Seyrig, 1878, p. 749).

2 Description

« *La grande arche présente une corde de 165 m de longueur ; la flèche d'intrados est de 51,858 m et sa hauteur à la clef de 10 m*. » (Eiffel, 1888a, p. 112) (Figure 2).

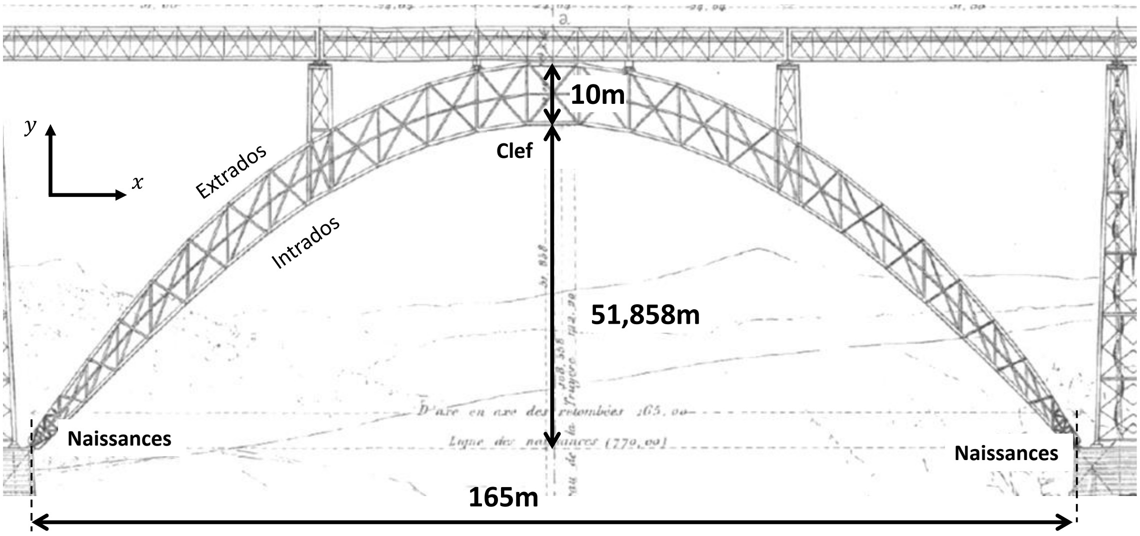


Figure 2. Arche centrale (Eiffel, 1888a)

« Elle se compose de deux fermes principales en treillis placées symétriquement, par rapport au plan médian de l'arche, dans des plans obliques à ce dernier. Il en résulte que leur écartement, qui est de 20 m aux naissances, va en diminuant à mesure qu'on se rapproche de la clef où il n'est plus que de 6,2815 m mesuré à l'extrados. […] Cette disposition a pour effet de donner une grande stabilité à l'arche, pour lui permettre de résister à des vents violents ». (Eiffel, 1888a, p. 112) (Figure 3 et Figure 4).

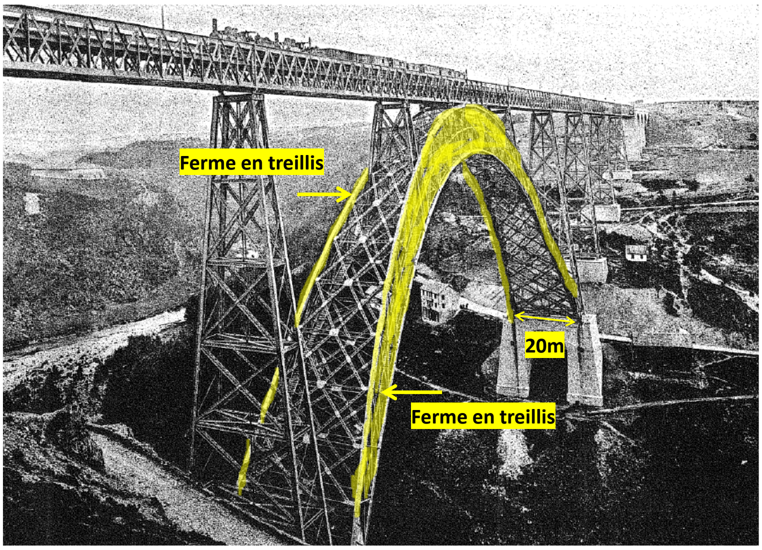


Figure 3. Fermes en treillis de l'arche

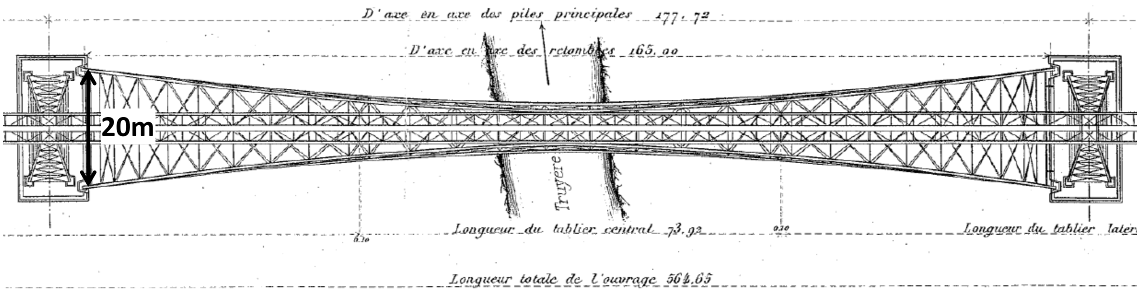


Figure 4. Arche centrale (Eiffel, 1888a, p. Planche 172)

L'arc est constitué de membrures, de barres de treillis et de caissons de contreventement (Figure 5).

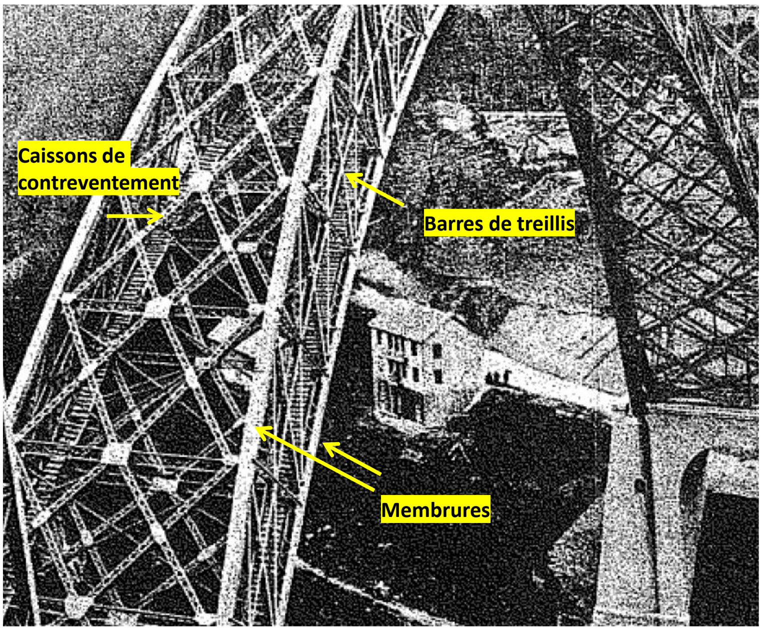


Figure 5. Eléments structurels de l'arche

« *Les fermes principales affectent la forme d'un croissant dont la fibre moyenne est une parabole […] elles s'appuient sur les retombées par l'intermédiaire de rotules* ». (Eiffel, 1888a, p. 112) (. Les avantages avancés par Eiffel pour ce choix de conception sont listés ci-dessous :

- Suppression des tympans, difficiles à calculer et demandant une grande quantité de métal
- Meilleure rigidité
- Connaissance précise des points d'appui de l'arche, facilitant les calculs

L'arche comporte 27 sections séparées par 26 montants (Figure 6). Les sections sont numérotées de 1 à 14 sur la partie gauche. Les montants sur la moitié gauche sont numérotés de I à XIII, et de I' à XIII' sur la moitié droite.

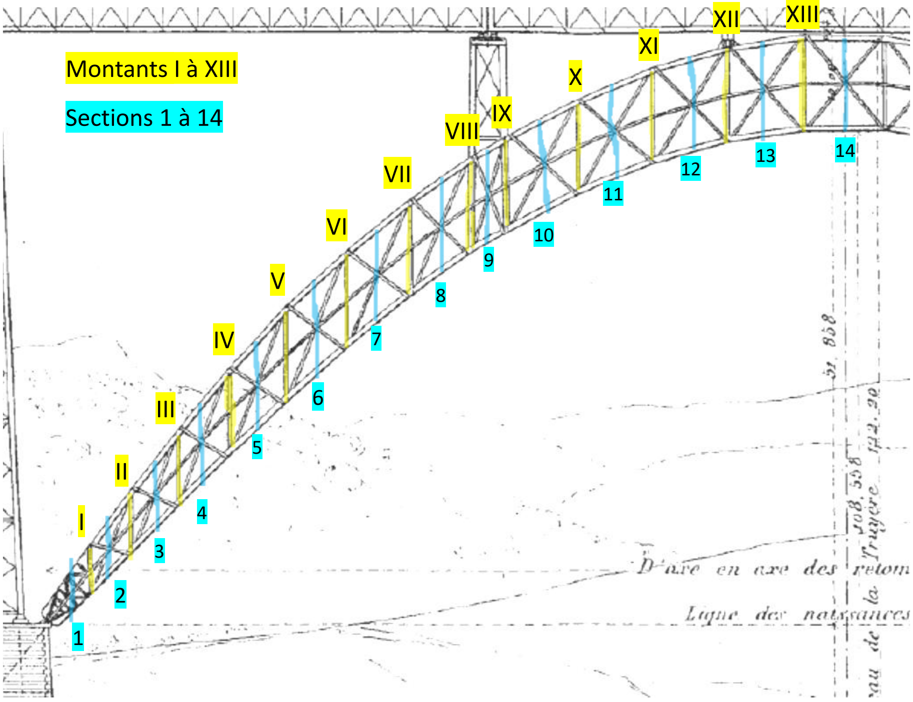


Figure 6. Montants et sections de l'arche (Eiffel, 1888a, p. Planche 172)

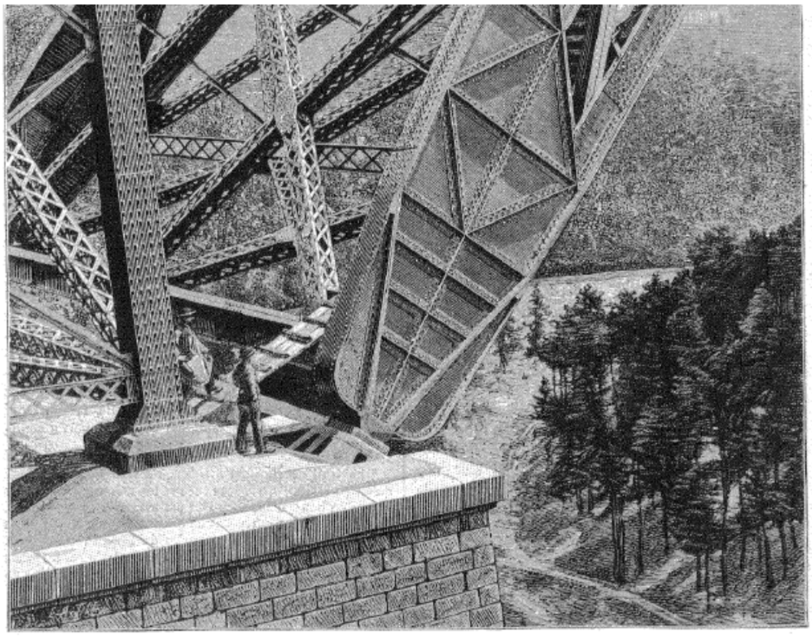


Figure 7. Rotules aux naissances de l'arche (Tissandier, 1888, p. 393)

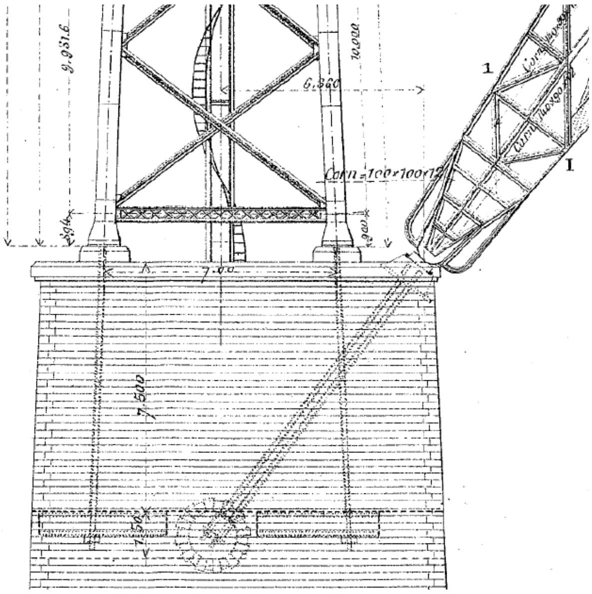


Figure 8. Schéma des naissances de l'arche, amarrages et maçonneries (Eiffel, 1888a, p. Planche 175)

L'abscisse x des montants, l'ordonnée y des centres des montants, la hauteur des montants, la longueur des sections suivant la fibre moyenne sont données dans le mémoire (Figure 9).

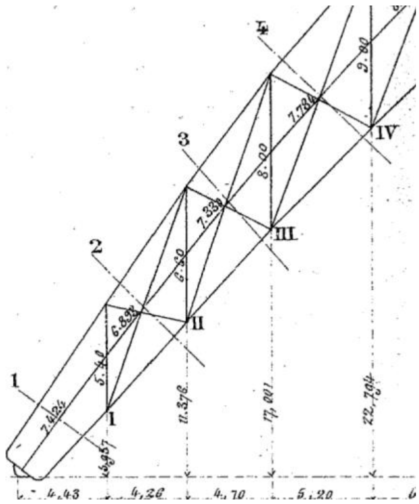


Figure 9. Montants et sections de l'arche (Eiffel, 1888a, p. Planche 181)

Les caissons de contreventement ont la section ci-dessous.

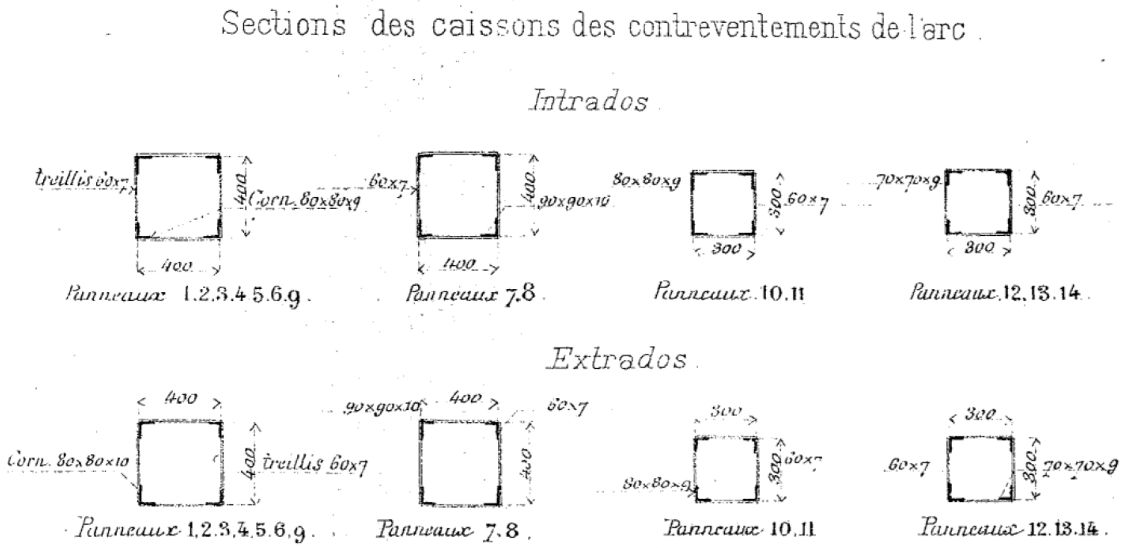


Figure 10. Caissons de contreventements (Eiffel, 1888a, p. Planche 175)

Les sections des barres de treillis sont présentées ci-dessous.

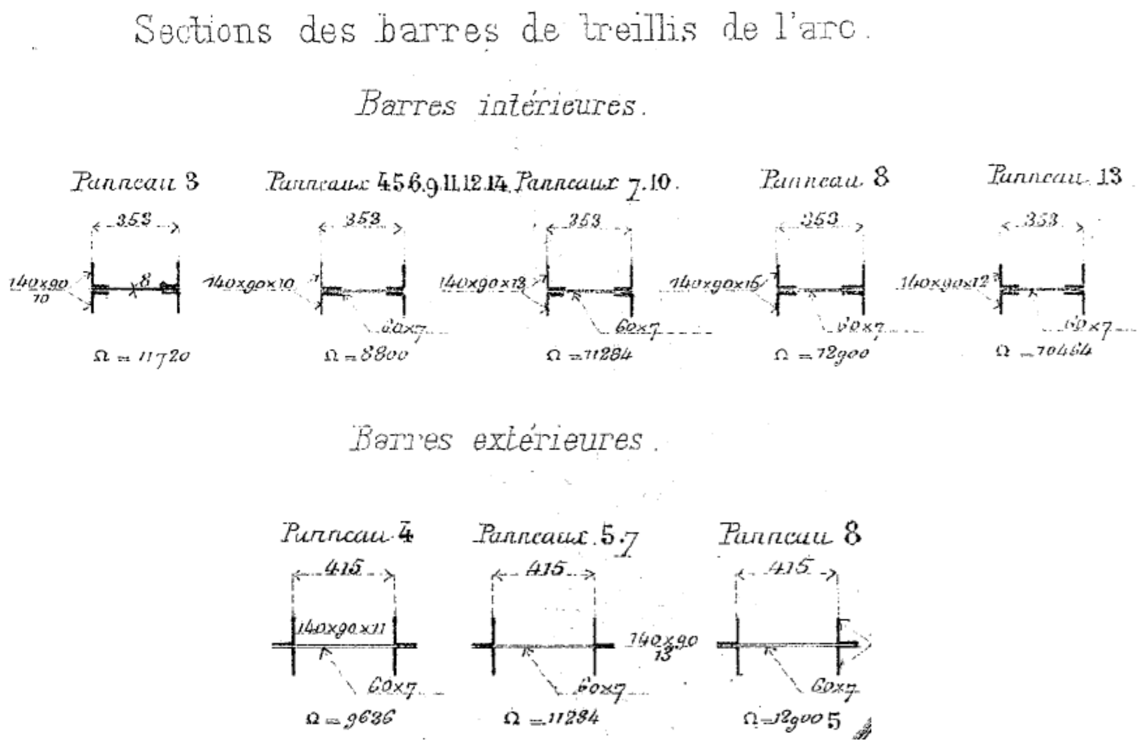


Figure 11. Sections des barres de treillis (Eiffel, 1888a, p. Planche 175)

Les sections des membrures sont présentées ci-dessous.

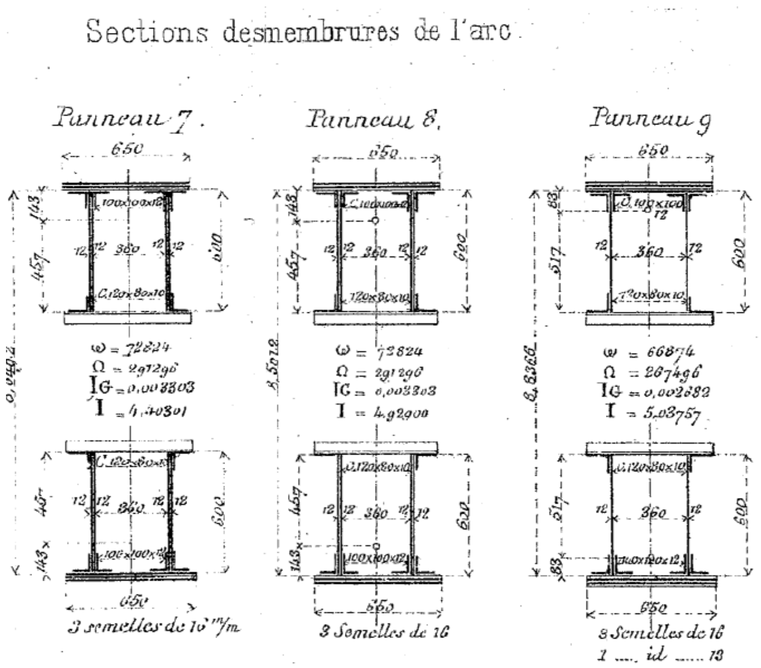


Figure 12. Sections des membrures (Eiffel, 1888a, p. Planche 175)

On trouvera tous les détails de l'arche dans les planches 172 à 183 du mémoire.

3 Démarche générale de justification de l'arc

La note de calcul porte sur la **justification** des éléments de l'arc : les efforts, géométrie et matériaux sont connus ; l'objectif est de vérifier la résistance mécanique de la structure.

La démarche est longue car Eiffel étudie plusieurs cas de charges, étudie l'influence du vent (avec et sans passage du train) et l'influence de la température, et parce que le nombre d'éléments à dimensionner est important : 14 montants (tronçons de l'arc) comptant chacun des membrures, des contreventements et des treillis, ainsi que les appuis (ancrages, maçonneries). Cependant la démarche de calcul est classique :

1/ Bilan des efforts extérieurs

- Identification des cas de charges
- Descente de charges pour la charge (poids propres des éléments) et la surcharge due au train (charge d'exploitation) pour chaque cas de charge
- Efforts dus au vent

2/ Calcul des réactions aux appuis

- Calcul de la poussée de l'arc pour chaque cas de charge

3/ Calcul des efforts internes

- Effort normal et moment fléchissant repris par les membrures
- Effort tranchant et torsion repris par les treillis et les contreventemens

4/ Calcul des contraintes et vérification de la résistance de la structure

- Vérification de membrures, contreventements, treillis

5/ Vérification de la stabilité de l'arc sous l'action du vent (renversement) et vérification des ancrages et maçonneries

On détaille ci-dessous l'ensemble de la démarche de dimensionnement de l'arc.

<table>
<tr><td colspan="3">Détermination des efforts extérieurs (descente de charges)</td></tr>
<tr><td>↓</td><td>↓</td><td>↓</td></tr>
<tr><td>Calcul des charges verticales (descente de charges)
Charge permanente : poids des tabliers
Charge permanente : poids de l'arc
3 cas de surcharge : passage du train</td><td>Vent
$270kg/m^2$ sans train
$150kg/m^2$ avec train</td><td>Température
$\Delta T = \pm 30°C$</td></tr>
<tr><td>↓</td><td>↓</td><td>↓</td></tr>
<tr><td>Calcul de la poussée Q (réactions aux appuis)
Poussée Q pour la charge permanente et les 3 cas de surcharge $\Delta x_1 = 0 \Longrightarrow Q = \cdots$ (tab. 3 à 6)</td><td></td><td>Poussée Q due à la dilatation thermique</td></tr>
<tr><td>↓</td><td>↓</td><td>↓</td></tr>
<tr><td>Détermination des efforts internes
Coupure dans les montants I à XIII
Membrures : effort normal $N = N' + Q.\cos\alpha$
Membrures : Moment fléchissant µ (tab. 7 à 10)
Treillis : effort tranchant (tab. 11 p159)</td><td>Détermination des efforts internes
Moment fléchissant, moment de torsion, effort tranchant</td><td></td></tr>
<tr><td>↓</td><td>↓</td><td>↓</td></tr>
<tr><td>Coefficients de travail (contraintes)
Membrures (tab. 7 à 10) : charge permanente ajoutée à chaque cas de surcharge (colonnes 13-14 des tab. 8,9,10)
Treillis (tab. 11 p159)</td><td>Contraintes
Membrures (tab. 17)
Contreventements (tab. 18)
Treillis (tab. 19)</td><td>Contraintes
Tab. 12</td></tr>
<tr><td>↓</td><td>↓</td><td>↓</td></tr>
<tr><td colspan="3">Contraintes finales
Membrures : (charge + vent 270kg/m²) et (charge + surcharge + vent 150kg/m²) (tab. 20-21).
Contreventements
Treillis : (charge + vent 270kg/m²) et (charge + surcharge + vent 150kg/m²) (tab. 11+19 = tab. 22)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Vérification de la résistance mécanique de la structure : $\sigma_{max} < \sigma_{admissible}$
$\sigma_{max} = max\{charge + vent\ 270\ kg;\ surcharge\ cas\ i + vent\ 150\ kg\}$

Membrures et contreventements : $\sigma_{admissible} = 6kg/mm^2$; Treillis : $\sigma_{admissible} = 5kg/mm^2$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Vérification du renversement sous l'effet du vent
Calcul des efforts de traction / compression aux naissances de l'arc
Si le poids propre de la structure ne suffit pas à éviter le renversement, alors vérification de la résistance des tirants d'amarrages et des maçonneries</td></tr>
</table>

Tableau 1. Démarche de dimensionnement de l'arc

4 Effets des charges verticales sur l’arc

4.1 Descentes de charges

4.1.1 Origine des charges verticales, hypothèses de surcharge, valeurs des charges

4.1.1.1 Origine des charges verticales, hypothèses de surcharge

Les charges verticales ont deux origines : les charges provenant des tabliers (poids propre des tabliers, train, poids des appuis et palées) et le poids propre de l’arc.

Eiffel considère 4 hypothèses, tels que ci-dessous (Figure 13 à Figure 16).

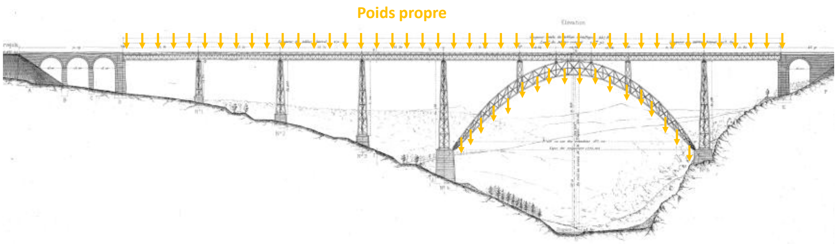


Figure 13. Hypothèse 1. L’arc ne porte aucune surcharge et n’est soumis qu’au poids propre de la construction.

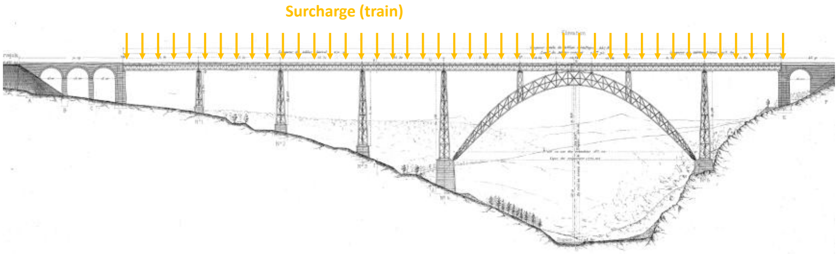


Figure 14. Hypothèse 2. La surcharge s’étend sur toute la longueur du tablier, comprise entre les deux grandes piles-culées.

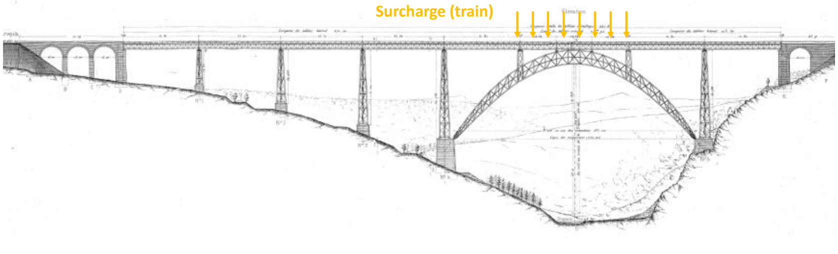


Figure 15. Hypothèse 3. La surcharge s’étend seulement sur le tablier central d’une palée à l’autre

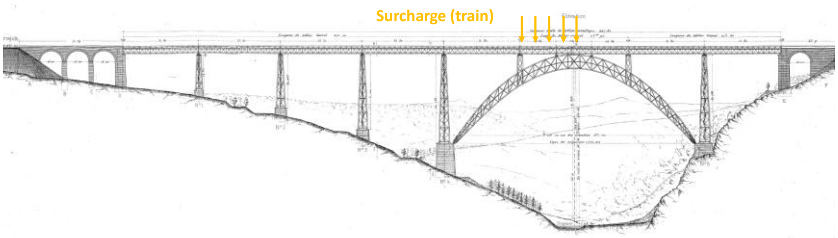


Figure 16. Hypothèse 4. La surcharge ne s'étend que sur une des moitiés du tablier, comprise entre la clef de l'arc et l'une des pile-culées

4.1.1.2 Surcharge due au train

« *Les surcharges par mètre courant de la circulaire ministérielle du 9 juillet 1877 s'élèvent pour les tabliers latéraux, dont les travées ont une longueur de 51,80 m, à 3900 kg et pour le tablier central, dont les travées ont une longueur de 24,64 m, à 4500 kg.* » (Eiffel, 1888a, p. 114)

Les surcharges utilisées pour l'arche diffèrent donc de la surcharge utilisée pour les tabliers qui est de $4\,800\ kg/m$ (Eiffel, 1888a, p. 69). On n'explique pas la différence d'hypothèses sur les surcharges.

On notera que le sujet des surcharges a été plusieurs fois débattu ; dans la décision ministérielle du 23 juillet 1880, le ministre des travaux publics note que « *on a admis une surcharge du tablier de 4800 kg par mètre courant, bien supérieure à celle de 3800 kg fixée par la circulaire du 9 juillet 1877 pour des travées métalliques de 55m de portée, supérieure aussi à celle que produirait le passage des trains les plus pesants. Cette surcharge a été déterminée par la condition que les trains d'épreuve seront composés entièrement de machines du type 1001 de la compagnie du Midi, d'un poids total de 74 800 t donnant un poids moyen de 4800 kg par mètre courant* » (Eiffel, 1888a, p. 179). Par ailleurs « *la Compagnie a critiqué les données des calculs de résistance des fers […] La Compagnie voudrait, aussi, que l'on élevât la surcharge d'épreuve, sur les travées centrales qui ont 24,64 m de portée, au poids de 5 875 kg, au lieu de celui de 4 500 kg, fixé par la circulaire du 9 juillet 1877* » (Eiffel, 1888a, p. 182). Mais selon la Commission, « *il n'y a pas d'intérêt […] à rechercher le travail des fers pour les surcharges exceptionnelles provenant d'une composition de trains qui ne se réalisera pas* ».

4.1.1.3 Poids propre des tabliers

A partir des métrés du projet, le poids propre des tabliers est donné Tableau 2. A cela il faut ajouter le poids des rails, des traverses de la voie et des trottoirs, soit 300 kg/m. Les valeurs sont résumées dans le Tableau 3.

DÉSIGNATION	POIDS DU MÉTAL Y COMPRIS LA PASSERELLE	LONGUEUR DU TABLIER	POIDS PAR MÈTRE COURANT DE TABLIER
Tablier Marvejols . . .	835 351 *kg*	270,340 *m*	3 090 *kg*
Tablier Central	192 192 *kg*	73,920 *m*	2 600 *kg*
Tablier Neussargues . .	326 083 *kg*	103,840 *m*	3 140 *kg*

Tableau 2. Poids propre de l'ouvrage par mètre courant de tablier

	Tabliers Marvejols	Tablier central	Tabliers Neussargues
Charge (poids propre)	3390 kg/m	2900 kg/m	3440 kg/m
Surcharge (train)	3900 kg/m	4500 kg/m	3900 kg/m

Tableau 3. Poids propre de chaque tablier et surcharge due au train

Les efforts venant du tablier « descendent » sur l’arc par les points B, C, D et E de la Figure 17.

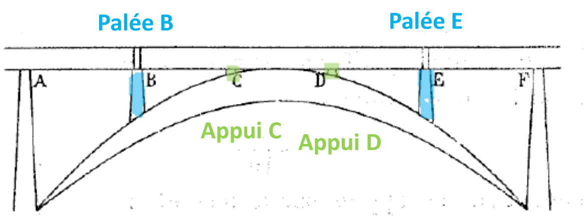


Figure 17. Vue de l’arc et de ses connexions avec le tablier. La partie AB du tablier est une partie du tablier Marvejols. La partie BE est le tablier central et la partie EF est une partie du tablier Neussargues (Eiffel, 1888a, p. 115)

Au poids propre des tabliers et à la surcharge due au train, il faut ajouter les poids propres des palées B et E et des appuis des tabliers. « *Le poids de chacune de ces palées est, d’après le métré, de 35 823 kg celui des deux appuis du tablier latéral est de 2 000 kg celui des deux appuis du tablier central est de 1 048 kg. Poids total de la palée 38 3871 kg.* » (Eiffel, 1888a, p. 120).

« *Les réactions des tabliers en B et en E, augmentées du poids propre des palées, se répartissent également entre les montants VIII et IX ou VIII’ et IX’ ; les réactions en C et D se portent sur les montants XII et XII’* » (Eiffel, 1888a, p. 120) (Figure 18).

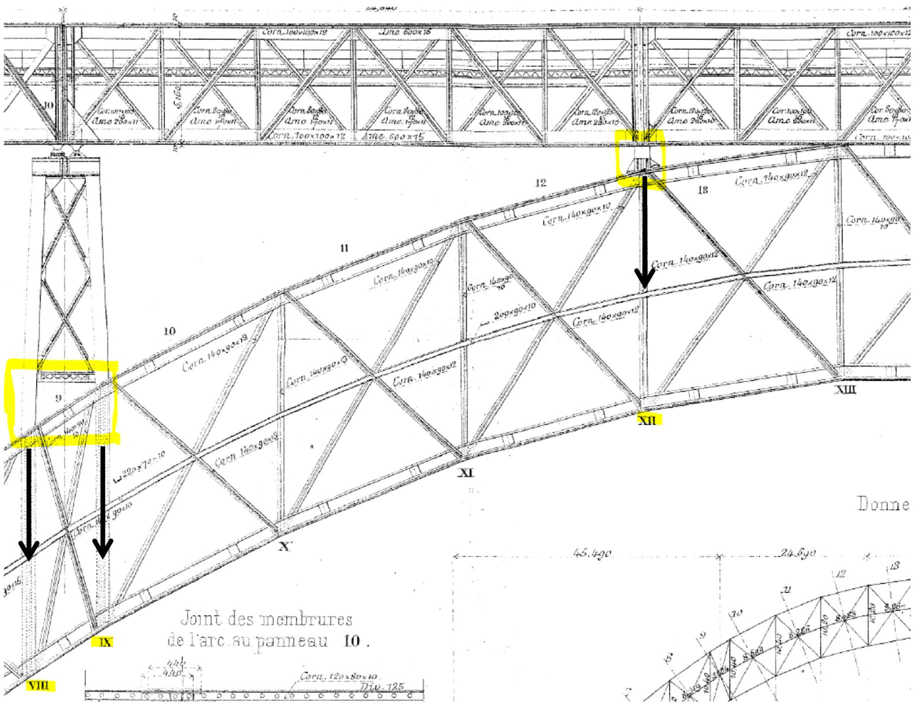


Figure 18. Descente de charges des tabliers vers l'arc, réactions définitives entrant dans les calculs

4.1.2 Descentes de charges des tabliers vers l'arc

4.1.2.1 Charges en B provenant du Tablier Marvejols

Sur la Figure 17, la partie AB est une partie du tablier Marvejols. On cherche la réaction To sur la palée B, due à la charge sur le Tablier Marvejols, car elle constituera une charge sur l'arc. Soit μ le moment fléchissant sur la palée A. Quand on isole la travée AB, le schéma du problème est le suivant :

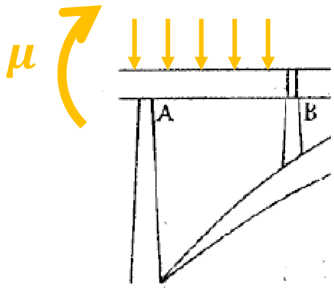


Figure 19. Calcul du moment en A sur la travée AB (travée 5 du tablier Marvejols (M_B=0 car à droite de B c'est une autre poutre, le tablier central)

Le tablier Marvejols étant un tablier à cinq travées, μ a pour expression (Eiffel, 1888a, p. 115; Koechlin, 1898, p. 621) :

$$M_1 = \frac{p_1\,(30 l_1^4 + 26 l_1^3 l_2) + p_2\,(22 l_1 l_2^3 + 19 l_2^4) - p_3\,(6 l_1 l_2^3 + 5 l_2^4) +}{4\,(60 l_1^2 + 104 l_1 l_2 + 45 l_2^2)}$$
$$\frac{+\, p_4\,(2 l_1 l_2^3 + l_2^4) - p_5 l_1^3 l_2}{4\,(60 l_1^2 + 104 l_1 l_2 + 45 l_2^2)}$$

Figure 20. Moment sur appui poutre à cinq travées (Koechlin, 1898, p. 621)

Avec p_i charge linéique dans la travée i ; l_i longueur de la travée i.

La somme des moments en A indique :

$$\mu + T_o.L - p.\frac{L^2}{2} = 0 \Rightarrow T_0 = p.\frac{L}{2} - \frac{\mu}{L}$$

Pour étudier les 4 hypothèses de charge énoncées pour l'arche, Eiffel réalise les calculs suivant sur le tablier Marvejols :

Hypothèse sur l'arc	Calcul tablier Marvejols	Résultats du mémoire
1. L'arc ne porte aucune surcharge et n'est soumis qu'au poids propre de la construction.	$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5$ $= 3390\ kg/m$	$T_0 = 68\,382\ kg$
2. La surcharge s'étend sur toute la longueur du tablier, comprise entre les deux grandes piles-culées.	$p_1 = 3900\ kg/m$ $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0$	$T_0 = 87\,910\ kg$
3. La surcharge s'étend seulement sur le tablier central d'une palée à l'autre	Pas de calcul pour le tablier Marvejols	/
4. La surcharge ne s'étend que sur une des moitiés du tablier, comprise entre la clef de l'arc et l'une des pile-culées	$p_1 = 3900\ kg/m$ $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0$	$T_0 = 87\,910\ kg$

Figure 21. Calculs sur le tablier Marvejols pour la descente de charges sur l'arc. Soit p_i charge sur la travée i

On propose d'illustrer les calculs réalisés par Eiffel puis de discuter des cas de charges choisis pour le tablier Marvejols.

<u>Modélisation RSA</u>

Le cas 2 est illustré en Figure 22.

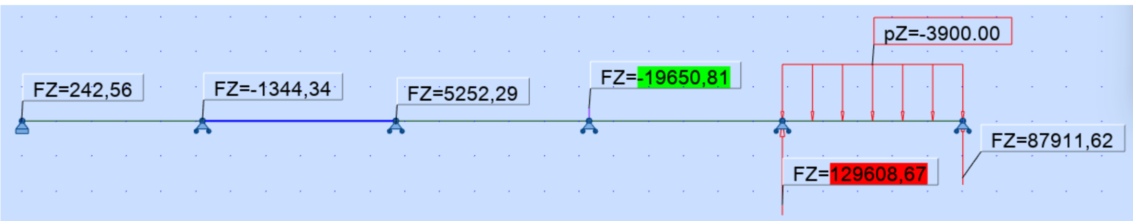


Figure 22. Tablier Marvejols. Cas 2

Les résultats sont synthétisés dans le Tableau 4.

Cas	Article	Analytique	RSA
$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 3390\ kg/m$	$68\ 382\ kg$	$68\ 380\ kg$	$68\ 380\ kg$
$p_1 = 3900\ kg/m$ $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0$	$87\ 910\ kg$	$87\ 912\ kg$	$87\ 912\ kg$

Tableau 4. Tablier Marvejols. Réactions aux appuis

<u>Discussion des cas de charges étudiés par Eiffel</u>

On ne discute pas du calcul pour l'hypothèse où la charge permanente agit seule. Pour les hypothèses 2 et 4, Eiffel choisit d'étudier le tablier Marvejols avec la travée 1 chargée seulement alors que ces hypothèses supposent que tout ou la moitié du tablier est chargée. Eiffel suppose une charge roulante, donc une charge linéique qui pourrait occuper tout ou partie du tablier, et une charge continue, car le train sera continu. Dans ce cas, la réaction d'appui maximale en B est pour le cas où seule la travée AB est chargée.

4.1.2.2 Charges en B, C, D et E provenant du tablier central

Le tablier central est la partie BE de la Figure 17.

Le tablier central est une poutre continue de trois travées de longueur égale

$$L_1 = L_2 = L_3 = L = 24{,}64\ m$$

Soient T_0 la réaction aux palées B et E et Y_C et Y_D les réactions aux appuis C et D.

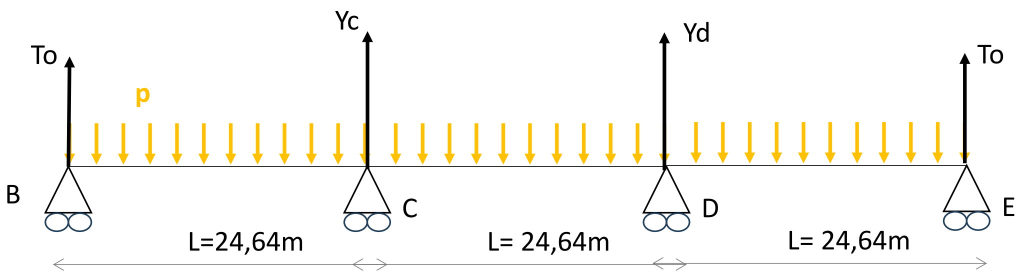


Figure 23. Tablier central pour le calcul de descente de charges vers l'arc

Hypothèse sur l'arc	Calcul tablier central	Résultats du mémoire
1. L'arc ne porte aucune surcharge et n'est soumis qu'au poids propre de la construction.	$p = 2900\ kg/m$ sur tout le tablier	$T_0 = 28\ 853\ kg$ $R = 78\ 570\ kg$
2. La surcharge s'étend sur toute la longueur du tablier, comprise entre les deux grandes piles-culées.		$T_0 = 44\ 352\ kg$

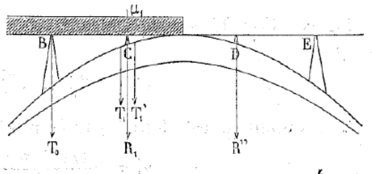
3. La surcharge s'étend seulement sur le tablier central d'une palée à l'autre	$p = 4500\ kg/m$ sur tout le tablier	$R = 121\ 968\ kg$
4. La surcharge ne s'étend que sur une des moitiés du tablier, comprise entre la clef de l'arc et l'une des pile-culées	Les formules habituellement employées ne sont pas établies pour ce cas : il est facile, néanmoins, d'avoir les valeurs approchées de chacune des réactions ; on peut supposer, en effet, que la réaction T_0 reste la même  que dans le cas de la surcharge générale et est égale à $\frac{4}{10}pl$, ce qui donne pour μ_1 la valeur précédente.	

Figure 24. Calculs sur le tablier Marvejols pour la descente de charges sur l'arc.

<u>Explication des calculs réalisés</u>

La formule ci-dessous donne le moment sur les deux appuis centraux (Eiffel, 1888a, p. 621) :

2° *Poutres à trois travées dont les deux extrêmes sont égales.*

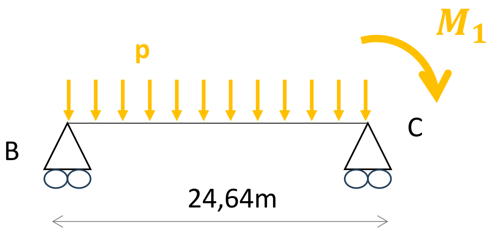
$$M_1 = \frac{2p_1\,(l_1^4 + l_1^3 l_2) + p_2\,(l_2^4 + 2l_1 l_2^3) - p_3\,(l_1^3 l_2)}{4\,(4l_1^2 + 8l_1 l_2 + 3l_2^2)}$$

$$M_2 = \frac{-\,p_1 l_1^3 l_2 + p_2\,(l_2^4 + 2l_1 l_2^3) + 2p_3\,(l_1^4 + l_1^3 l_2)}{4\,(4l_1^2 + 8l_1 l_2 + 3l_2^2)}.$$

M_1 est le moment fléchissant en C et M_2 le moment en D. On simplifie ces formules avec $L_1 = L_2 = L_3 = L$ et $p_1 = p_2 = p_3 = p$. Dans les conventions que l'on choisit, ces moments sont négatifs donc

$$M_c = \mathrm{M_D} = -\frac{p.L^2}{10}$$

On isole la travée BC. To est la réaction en B.



Principe Fondamental de la Statique

$$T_0 + Y_{C\_gauche} - pL = 0$$

$$Y_{C\_gauche}.L - p.\frac{L^2}{2} + M_1 = 0$$

Donc

$$T_0 = \frac{4pL}{10}$$

Les réactions Y_C et Y_D sont à déduire par équilibre de tout le tablier

$$2T_o + Y_C + Y_D - 3pL = 0$$

Par symétrie, $Y_C = Y_D$ donc

$$Y_C = Y_D = \frac{3}{2}pL - T_0$$

Synthèse

Cas		Article	Analytique	RSA
Cas 1 : la charge permanente agit seule	Palées B et E	28 583 kg	28 582 kg	28 582 kg
	Palées C et D	78 570 kg	78 602 kg	78 602 kg
Cas 2 : la surcharge agit seule sur les trois travées	Palées B et E	44 352 kg	44 352 kg	44 352 kg
	Palées C et D	121 968 kg	121 968 kg	121 968 kg
Cas 3 : la surcharge agit seule sur la moitié du tablier	Palée B	44 730 kg^*		44 698 kg
	Palée C	118 240 kg^*		118 156 kg
	Palée D	3 340 kg^*		3 811 kg
	Palée E	/	/	$-346\ kg$

*Figure 25. Tablier central. Synthèse des réactions sur les appuis. *Statique graphique*

Détails des calculs RSA

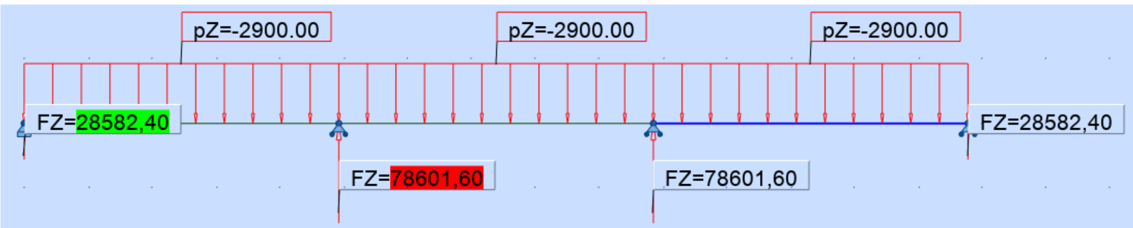


Figure 26. Cas 1. La charge permanente agit seule. P=2900 kg/m

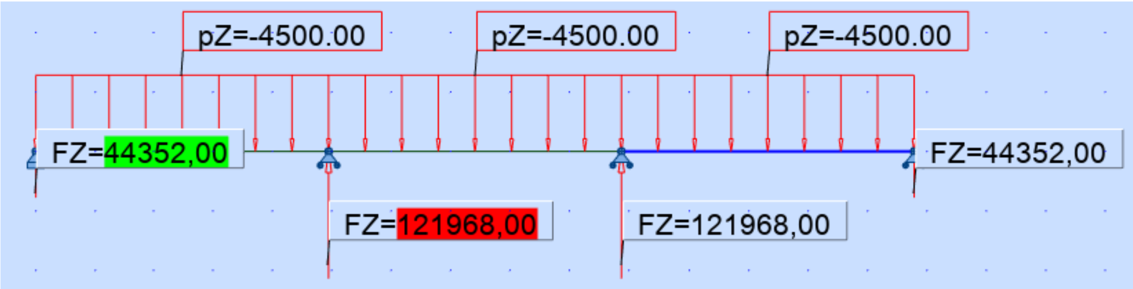


Figure 27. Cas 2. La surcharge agit seule. P=4500 kg/m

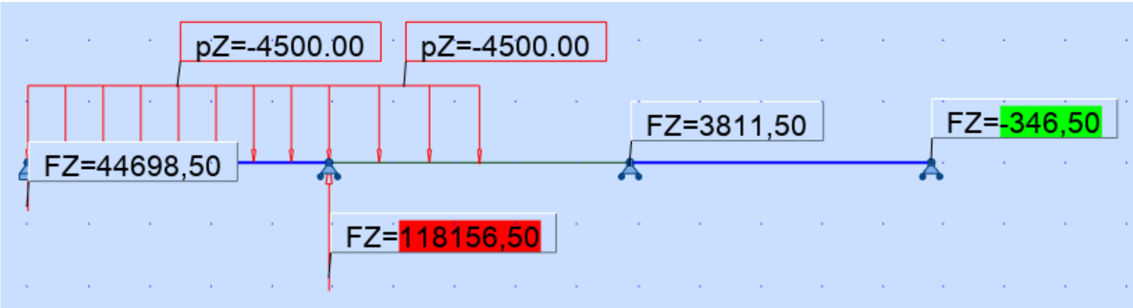


Figure 28. Cas 3. La surcharge agit seule sur la moitié du tablier

<u>Remarque sur le cas de charge 3</u>

Dans le cas de charge 3, la surcharge agit seule sur la moitié du tablier.

Pour ce cas, « *les formules habituellement employées ne sont pas établies pour ce cas* ». Pour simplifier, Eiffel suppose que la réaction en B a la même valeur To que pour le cas 2.

Pour une poutre continue, l'effort tranchant dans la travée i est donné par :

$$V(x) = V_0(x) + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_i}$$

$V_0(x)$ est l'effort tranchant dans la travée isostatique associée. M_{i-1} est le moment fléchissant sur l'appui de gauche de la travée. M_i est le moment fléchissant sur l'appui de droite de la travée.

Dans le cas de la travée BC, M_{i-1} est le moment fléchissant en B donc $M_{i-1} = 0$.

$V_0(x)$ ne dépend que du chargement extérieur sur la travée BC. Il a donc la même expression pour les deux cas de charge.

Finalement,

$$V(x) = V_0(x) + \frac{-M_i}{L_i}$$

Seul le terme $\frac{-M_i}{L_i}$ varie entre les deux cas. Or par le théorème des 3 moments, on montre que

- Dans le cas 2, $M_i = -264\ 670\ kg.m$ et $\frac{-M_i}{L_i} = 10\ 741\ kg$
- Dans le cas 3, $M_i = -273\ 208\ kg.m$ et $\frac{-M_i}{L_i} = 11\ 088\ kg$

La différence entre les deux termes est de 347 kg environ. Or on a pour les cas :

- Cas 2 : $T_0 = 44\ 352\ kg$
- Cas 3 : $T_0 = 44\ 698\ kg$

La différence entre les deux réactions est de 346 kg, ce qui correspond bien à la différence sur le terme entre les termes $\frac{-M_i}{L_i}$. L'hypothèse d'Eiffel est donc fondée.

4.1.2.3 Charges en E provenant du Tablier Neussargues

Sur la Figure 17, la partie EF est une partie du tablier Neussargues.

Les différents cas de charge sont décrits ci-dessous (Eiffel, 1888a, p. 119).

Cas 1 : la charge permanente agit seule	$p_1 = p_2 = 3440\ kg/m$
Cas 2 : la surcharge agit seule, dans la travée EF	$p_1 = 3900\ kg/m\ ;\ p_2 = 0$

Tableau 5. Cas de charges pour le calcul des charges en E provenant du Tablier Neussargues

Les calculs sur Robot Structural Analysis sont présentés ci-dessous et résumés dans le Tableau 6.

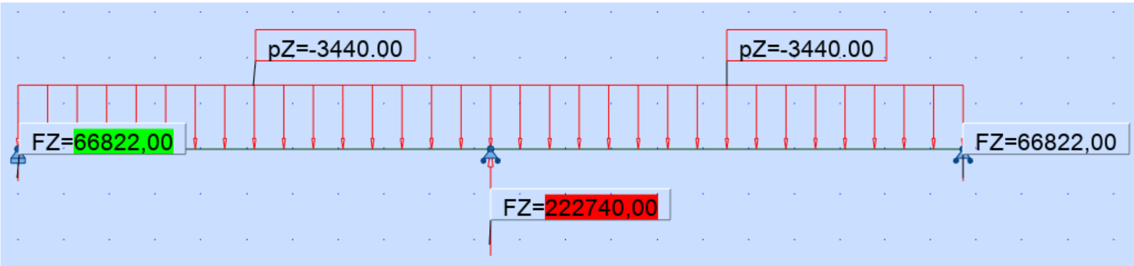


Figure 29. Tablier Neussargues. Cas 1. Réaction en E

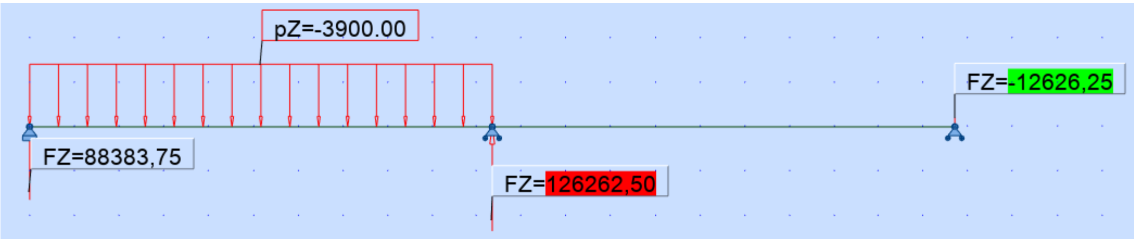


Figure 30. Tablier Neussargues. Cas 2. Réaction en E

	Mémoire p119 Réaction appui E	RDM7 Réaction appui E
Cas 1 : la charge permanente agit seule	$66\ 822\ kg$	$66\ 822\ kg$

Cas 2 : la surcharge agit seule et dans la travée EF	88 386 kg	88 384 kg

Tableau 6. Tablier Neussargues. Réaction en E

4.1.3 Poids propre de l'arc

« *L'avant-métré donne pour le grand arc un poids total de 1 055 054 kg. Ce poids, réparti suivant chacun des montants, donne les charges suivantes sur chacun d'eux.* » (Eiffel, 1888a, p. 121). Le poids propre de l'arc se répartit sur les montants comme ci-dessous.

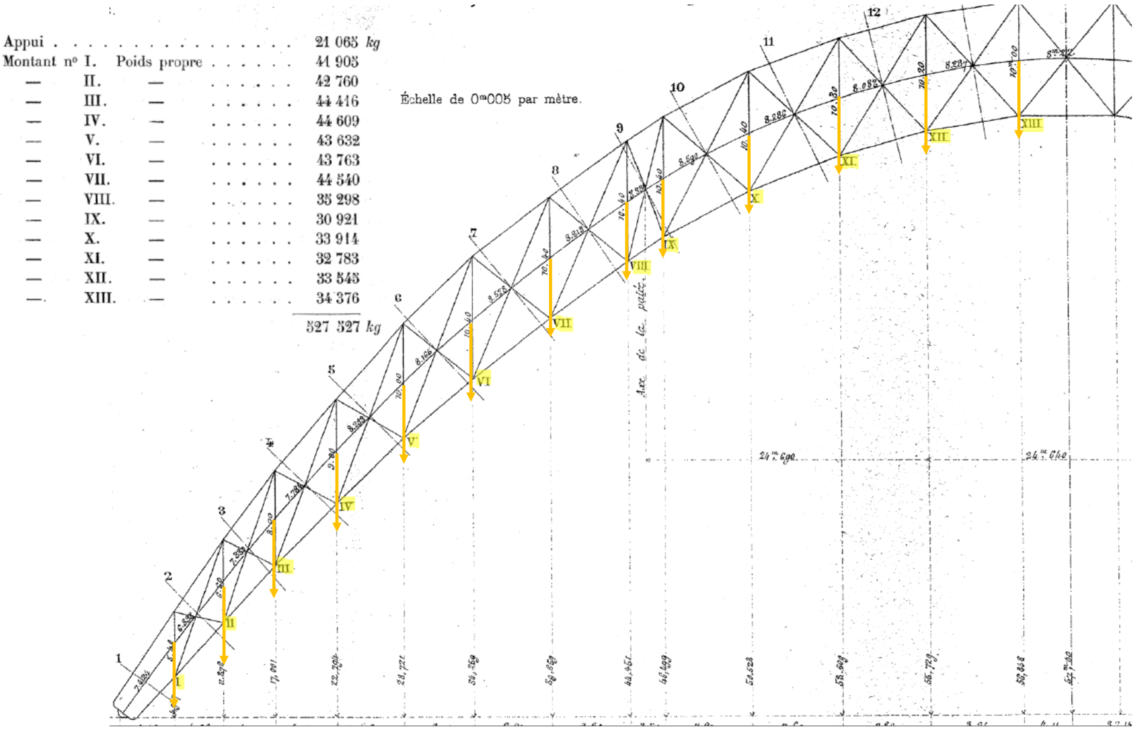


Figure 31. Poids propre de l'arc, représentation des charges : poids propre arc

4.1.4 Synthèse

Eiffel synthétise ci-dessous les réactions aux points B, C, D et E pour chaque hypothèse de surcharge. Les réactions aux points B, C, D et E sont ensuite transmises aux montants de l'arc. Ce sont ces efforts **sur les montants** qui vont permettre le calcul de l'arc (Figure 32).

Tableau des réactions agissant sur l'arc dans les différentes hypothèses de charges.

	B	C	D	E
1re HYPOTHÈSE				
Charge permanente seule.				
Tablier Marvejols	68 382 *kg*	»	»	»
Tablier Central	28 583	78 570 *kg*	78 570 *kg*	28 583 *kg*
Tablier Neussargues	»	»	»	66 822
TOTAUX	96 965 *kg*	78 570 *kg*	78 570 *kg*	95 405 *kg*
2e HYPOTHÈSE				
Surcharge sur toute l'étendue de l'arc.				
Tablier Marvejols	87 910 *kg*	»	»	»
Tablier Central	44 352	121 968 *kg*	121 968 *kg*	44 352 *kg*
Tablier Neussargues	»	»	»	88 386
TOTAUX	132 262 *kg*	121 968 *kg*	121 968 *kg*	132 738 *kg*
3e HYPOTHÈSE				
Surcharge du tablier central.				
Tablier Central	44 352 *kg*	121 968 *kg*	121 968 *kg*	44 352 *kg*
4e HYPOTHÈSE				
Surcharge sur la moitié de l'arc.				
Tablier Marvejols	87 910 *kg*	»	»	»
Tablier Central	44 730	118 240 *kg*	3 340 *kg*	»
TOTAUX	132 640 *kg*	118 240 *kg*	3 340 *kg*	»

Tableau 7. Synthèse des charges sur l'arc dues aux tabliers (Eiffel, 1888a, p. 119)

Dans la première hypothèse :

Montants VIII et IX ; $\frac{1}{2}$ (96 965 *kg* + 38 871 *kg*) = 67 918 *kg*.

Montant XII . . . . = 78 570 *kg*.

De même pour les points symétriques.

Dans la deuxième hypothèse :

Montants VIII et IX ; $\frac{1}{2}$ 132 262 *kg*. . . . . . = 66 131 *kg*.

Montant XII. . . . . = 121 968 *kg*.

Dans la troisième hypothèse :

Montants VIII et IX ; $\frac{1}{2}$ 44 352 *kg* . . . . . . = 22 176 *kg*.

Montant XII. . . . . = 121 968 *kg*.

Il en est de même pour les points symétriques.

Dans la quatrième hypothèse :

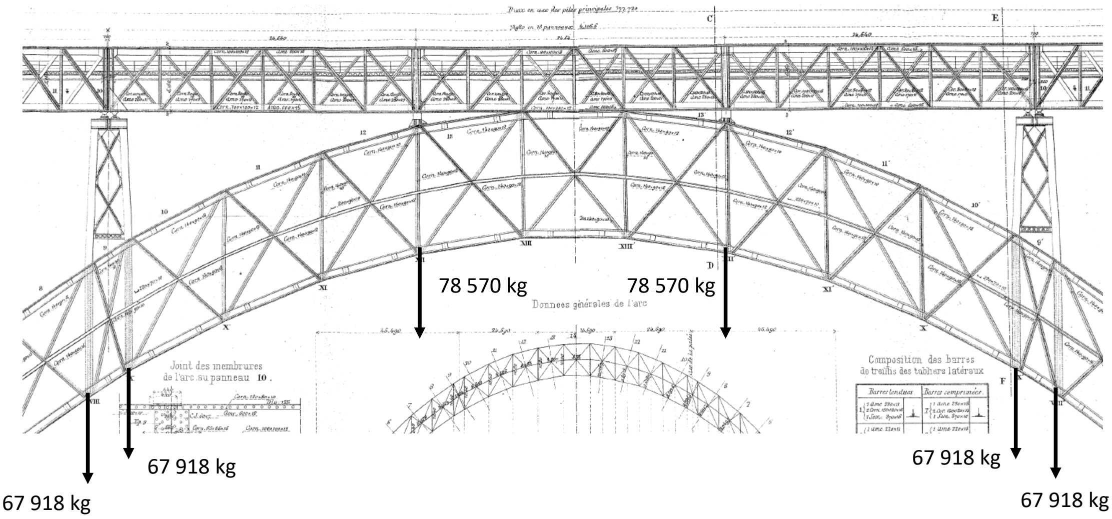
Montants VIII et IX ; $\frac{1}{2}$ (132 640). . . . . . . = 66 320 *kg*.

Montant XII . . . . = 118 240 *kg*.

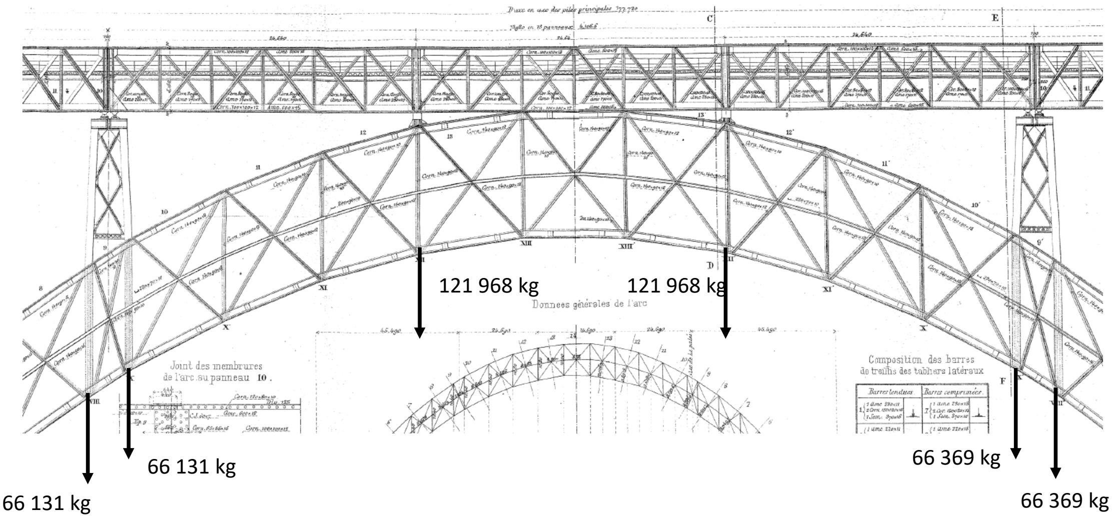
Montant XII' . . . . = 3 340 *kg*

Figure 32. Descente de charges des tabliers vers l'arc : efforts sur les montants (Eiffel, 1888a, p. 120)

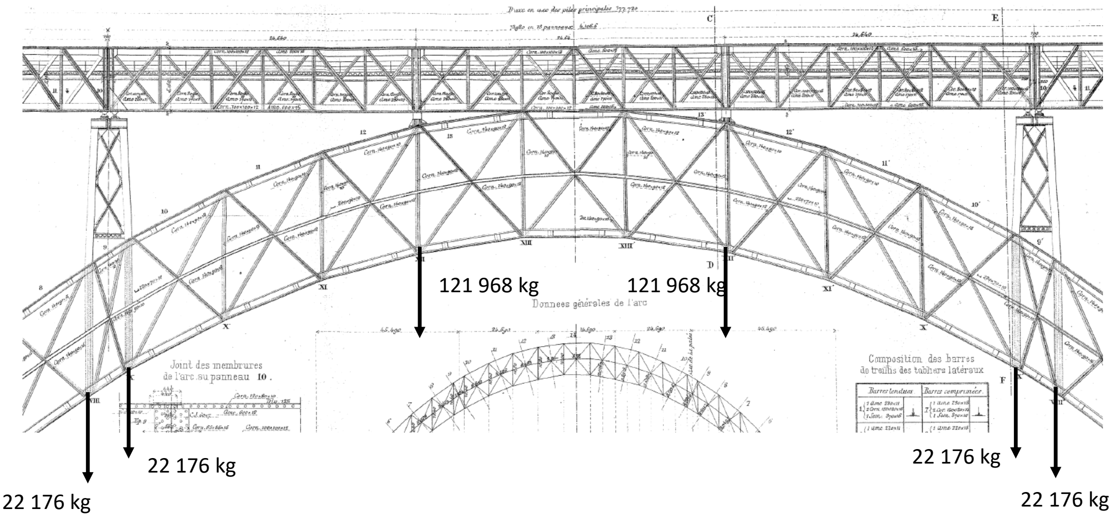
On illustre ci-dessous la descente de charges des tabliers vers l'arc pour les 4 hypothèses.



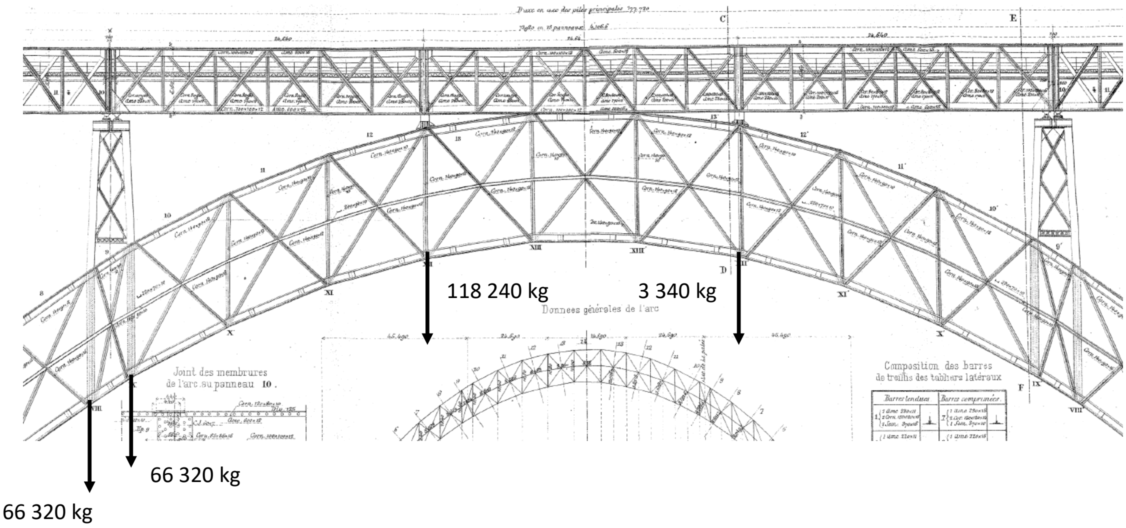
(a) Hypothèse 1 L’arc ne porte aucune surcharge et n’est soumis qu’au poids propre de la construction



(b) Hypothèse 2 La surcharge s’étend sur toute la longueur du tablier, comprise entre les deux grandes piles-culées



(c) Hypothèse 3. Surcharge du tablier central



(d) Hypothèse 4. Surcharge sur la moitié de l'arc

Figure 33. Descente de charges des tabliers vers l'arc : efforts sur les montants

C'est avec tous ces éléments qu'Eiffel établit les calculs de l'arc, en commençant par la détermination de la poussée.

4.2 Réactions aux appuis : calcul de la poussée Q

4.2.1 Formule de Bresse

On connait dorénavant les efforts extérieurs sur l'arc, provenant des charges verticales. On peut donc maintenant calculer les réactions d'appui aux naissances O et O' de l'arc. La réaction suivant l'axe $\vec{x}$ est appelée la poussée Q de l'arc (Figure 34).

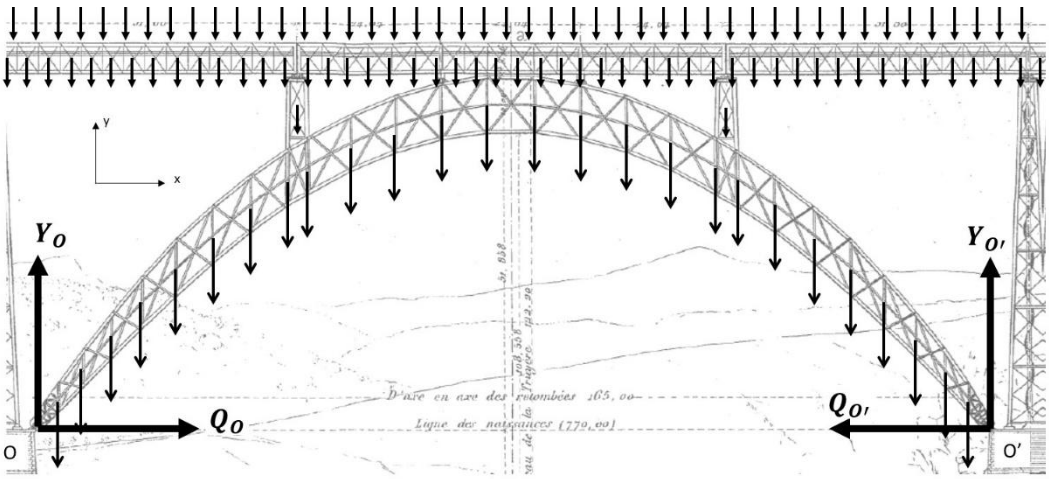


Figure 34. Schématisation de la poussée sur l'arc

Si l'on considère que les naissances de l'arc (appuis au sol) sont en liaison rotule avec le sol, alors l'arc est hyperstatique de degré 1. Les seules équations d'équilibre ne sont pas suffisantes pour déterminer les réactions aux appuis de l'arc. On doit considérer la déformée de la structure pour fonder une équation supplémentaire. Eiffel choisit d'écrire que le déplacement horizontal Δx_1 de la naissance O' est nul :

$$\Delta x_{O'} = 0$$

Eiffel exploite alors la formule de Bresse[1] (Bresse, 1859, p. 89) qui donne le déplacement Δx_1 d'un point de l'arc d'abscisse curviligne s_1, en fonction du déplacement Δx_0 d'un point de l'arc d'abscisse curviligne s_0.

$$\Delta x_1 = \Delta x_0 - p_0.(y_1 - y_0) + \tau.(x_1 - x_0) + \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{N}{e} - \frac{P.dy}{K.e.dx}\right) dx - \int_{s_0}^{s_1} (y_1 - y).\frac{Xsin\delta.cosv}{e.r^2} ds$$

Avec

- x et y coordonnées de la fibre moyenne
- s : longueur mesurée suivant la fibre moyenne entre la section et l'origine
- N : effort normal / P : effort tranchant / X : moment fléchissant
- $e = E.\Omega$ avec E : module d'Young du matériau. $E = 16 \times 10^9$ (Eiffel, 1888a, p. 123) (l'unité n'est pas précisée, on peut imaginer $160\ 000\ MPa$) et Ω : section
- τ : coefficient de dilatation linéaire du matériau multiplié par ΔT
- $e.r^2 = E.I$ avec I moment quadratique de la section
- K : rapport du module d'élasticité transversale $G = E/3$ (Eiffel, 1888a, p. 126) au module d'élasticité longitudinale E

4.2.1.1 Hypothèses d'Eiffel concernant l'arc

Pour l'arc, Eiffel suppose que les charges sont verticales et agissent dans le plan (O,$\vec{x}$,$\vec{y}$) :

$$\begin{cases} \sin \delta = 1 \\ \cos v = 1 \end{cases}$$

Si la corde de l'arc entre O et O' est L, alors

$$\begin{cases} x_0 = 0 & y_0 = 0 \\ x_1 = L & y_1 = 0 \end{cases}$$

[1] Pour l'anecdote, Bresse, inspecteur général des Ponts et Chaussées a présidé le jury qui a autorisé Eiffel à construire le viaduc de Garabit (source https://fr.wikipedia.org/wiki/Jacques_Antoine_Charles_Bresse). Dans son cours de mécanique, Bresse décrit cette équation dans son chapitre « *formules générales pour calculer les variations des coordonnées d'un point quelconque de la fibre moyenne* » (Bresse, 1859, p. 80).

Dans un premier temps, Eiffel néglige l'influence de la température : $\tau = 0$.

Eiffel change aussi les notations de l'équation :

$$X = \mu; e = E.\Omega; e.r^2 = E.I$$

Finalement, Eiffel applique la formule de Bresse entre la naissance O de l'arc et la naissance O'. Or il suppose que le point O ne se déplace pas, donc

$$\Delta x_0 = 0$$

Avec toutes ces hypothèses et nouvelles notations, la formule devient

$$\Delta x_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{N}{E.\Omega} dx - \int_{x_0}^{x_1} \frac{P}{G.\Omega} . \frac{dy}{dx} dx + \int_{O}^{O'} \frac{\mu}{E.I} . y \, ds$$

Les grandeurs E, et G sont des données matériaux. Les grandeurs dx, dy, y, Ω et I sont des données géométriques sur les sections ; elles sont connues. N, P et μ sont les efforts internes, qui dépendent des charges verticales connues et de la poussée Q. Par conséquent, dans la formule de Bresse, **seule la variable Q est inconnue**. La formule de Bresse permet bien de déterminer la poussée Q.

TABLEAU N° I

Éléments relatifs aux différentes sections de l'arc.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
NUMÉROS des Sections	LONGUEUR des ÉLÉMENTS	PROJECTION Horizontale de Δ s	PROJECTION Verticale de Δ s	ORDONNÉES des Sections	SECTION d'une Membrure	SECTION des quatre Membrures	ÉPAISSEUR des Semelles	DISTANCES des Membrures au plan moyen
	Δs	Δx	Δy	y	ω	$\Omega = 4\,\omega$	e	r
	m	m	m	m	mm^2	mm^2	mm	
1	7,424	4,43	5,957	2,9785	86,924	347,696	70	
2	6,893	4,26	5,419	8,6665	89,724	358,896	74	1,75
3	7,330	4,70	5,625	14,1885	84,524	338,096	66	2,225
4	7,784	5,20	5,793	19,8975	84,524	338,096	66	2,724
5	8,293	5,80	5,927	25,7575	80,624	322,496	60	3,199
6	8,165	6,00	5,538	31,4900	76,724	306,896	54	3,623
7	8,528	6,60	5,400	36,9590	72,824	291,296	48	3,882
8	8,319	6,80	4,792	42,0550	72,824	291,296	48	4,108
9	3,884	3,30	2,048	45,4750	66,874	267,496	64	4,335
10	8,599	7,60	4,024	48,5110	56,474	225,896	45	4,487
11	8,286	7,69	3,087	52,0664	56,474	225,896	43	4,694
12	8,083	7,80	2,119	54,6693	56,474	225,896	45	4,837
13	8,287	8,21	1,130	56,2937	53,224	212,896	40	4,884
14	4,110	4,11	0,000	56,8586	53,224	212,896	40	4,881

1	10	11	12	13	14	15	16	17
NUMÉROS des Sections	MOMENT D'INERTIE d'une membrure	MOMENT D'INERTIE DE L'ARC	SECTION DES TREILLIS ω' intérieur	SECTION DES TREILLIS ω'' extérieur	Σ (ω sin ${}^2\beta$ cos β)	lg sin α	lg. cos α	v
	I_G	I						
			mm^2	mm^2				
1		0,490 906			0,043 200	$\bar{1}$,904 408 7	$\bar{1}$,775 786 9	1,420
2	0,0042 697	1,11 620	14.114	10.464	0,010 000	$\bar{1}$,893 509 1	$\bar{1}$,791 001 8	1,928
3	0,0037 040	1,68 859	11.720	8.800	0,007 500	$\bar{1}$,885 012 1	$\bar{1}$,806 986 2	2,406 3
4	0,0037 040	2,52 342	8.800	9.636	0,007 000	$\bar{1}$,871 671 6	$\bar{1}$,824 770 8	2,904 9
5	0,0035 749	3,31 459	8.800	8.800	0,006 200	$\bar{1}$,854.135 3	$\bar{1}$,844 733 0	3,382 2
6	0,0034 460	4,04 213	8.800	8.800	0,006 000	$\bar{1}$,831 389 7	$\bar{1}$,866 187 7	3,801 6
7	0,0033 034	4,40 301	11.284	11.284	0,010 000	$\bar{1}$,801 556 9	$\bar{1}$,888 716 8	4,072 6
8	0,0033 034	4,92 900	12.900	12.900	0,012 000	$\bar{1}$,760 448 2	$\bar{1}$,912 446 8	4,298 6
9	0,00268 238	5,03 757	8.800	8.800	0,009 300	$\bar{1}$,722 027 0	$\bar{1}$,929 252 4	4,479 3
10	0,00238 300	4,55 754	12.900	12.900	0,147 00	$\bar{1}$,670 189 9	$\bar{1}$,946 334 6	4,640 8
11	0,00238 300	4,98 683	8.800	10.464	0,012 300	$\bar{1}$,571 107 0	$\bar{1}$,967 562 6	4,847 6
12	0,00238 300	5,29 470	8.800	10 464	0,013 500	$\bar{1}$,418.593 0	$\bar{1}$,984 536 8	4,990 7
13	0,00230 000	5,08 750	11.284	11.284	0,016 500	$\bar{1}$,134 545 2	$\bar{1}$,995 927 0	5,042 8
14	0,00230 000	5,08 1256	10.464	10.464	0,015 000			5,040 0

Tableau 8. Éléments relatifs aux différentes sections de l'arc (Eiffel, 1888a, p. 149)

« *Dans cette formule, le premier terme représente la déformation produite par les efforts normaux à la section ; le deuxième, celle due aux efforts tranchants ; le troisième, celle due aux moments* » (Eiffel, 1888a, p. 123) (Figure 35).

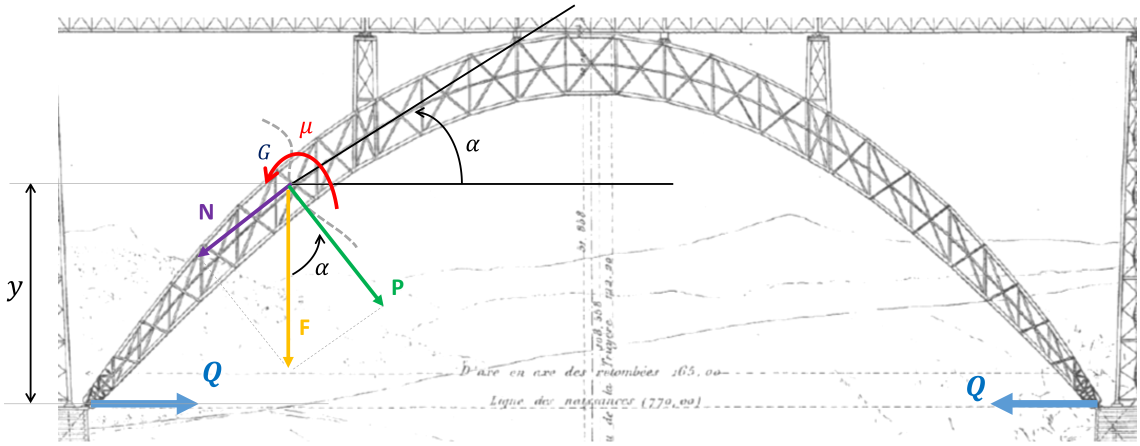


Figure 35. Schéma des actions sur une section de l'arc

4.2.1.2 Quelques éclairages sur la formule de Bresse

$$\Delta x_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{N}{E.\Omega} dx - \int_{x_0}^{x_1} \frac{P}{G.\Omega} . \frac{dy}{dx} dx + \int_{O}^{O'} \frac{\mu}{E.I} . y\, ds$$

On propose ci-dessous quelques éclairages sur cette formule.

<u>1er terme</u>

Loi de Hooke

$$\sigma = E.\varepsilon$$

Donc pour un effort normal N, une section Ω, une longueur dx, un allongement dl

$$\frac{N}{\Omega} = E.\frac{dl}{dx} \Longrightarrow dl = \frac{N}{E.\Omega} dx$$

L'allongement entre deux points situés aux abscisses x_0 et x_1 est la somme des allongements élémentaires dl entre ces deux points, donc l'intégrale de ces allongements entre ces deux points.

<u>Deuxième terme</u>

Soit un élément de poutre de longueur dx, soumis à un effort tranchant P, de module de cisaillement G et de section Ω. La loi de comportement d'un élément en cisaillement est

$$P = G.S.\gamma$$

Avec γ déformation angulaire telle que

$$\tan \gamma = \frac{dy}{dx}$$

Si la déformation angulaire est faible, alors $\tan\gamma \approx \gamma$ et

$$\gamma = \frac{dy}{dx}$$

Donc

$$dy = \gamma . dx = \frac{P}{GS} . dx$$

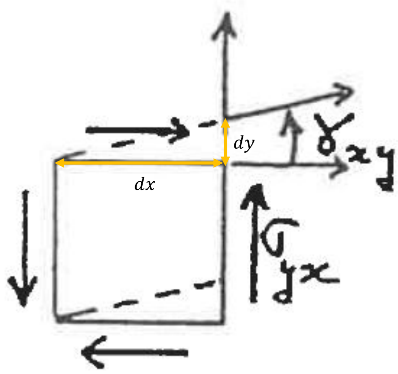


Figure 36. Représentation de la déformation angulaire γ

Ainsi pour un élément de longueur ds, le déplacement suivant l'effort tranchant P a pour expression

$$\frac{P}{GS} . ds$$

Etant donné l'angle α entre l'effort P et l'axe x, la projection du déplacement $\frac{P}{GS} . ds$ a pour expression

$$\frac{P}{GS} . ds . \cos\alpha$$

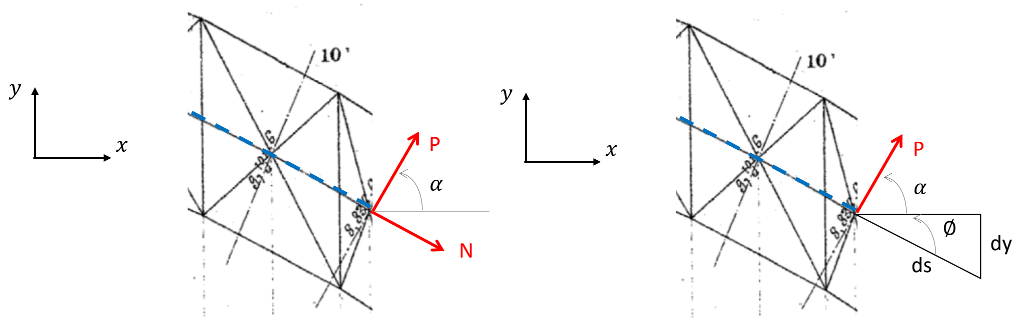


Figure 37. Effort normal N et tranchant P dans une section de l'arc

Or on montre que

$$\cos\alpha = \frac{dy}{ds}$$

En effet sur la figure ci-dessous

$$\sin\emptyset = \frac{dy}{ds}$$

avec

$$\sin\emptyset = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

Donc la projection sur l'axe x du déplacement dû à l'effort tranchant a pour expression

$$\frac{P}{GS}.ds.\cos\alpha = \frac{P}{GS}.dy$$

Pour intégrer sur l'ensemble de l'arc et obtenir le déplacement total dû à l'effort tranchant on écrira

$$\Delta x = \int_{x_0}^{x_1} \frac{P}{GS}.\frac{dy}{dx}.dx$$

<u>Cas d'une arche à treillis : terme dû à l'effort tranchant</u>

« *Dans les cas d'arc à treillis, […] les efforts tranchants […] peuvent être considérés comme agissant dans le treillis ; par conséquent, si nous voulons introduire dans notre formule la déformation produite par les efforts tranchants, il faudra faire intervenir les sections des treillis* ». (Eiffel, 1888a, p. 123)

Le treillis de l'arc est schématisé en Figure 38. L'axe discontinu est la fibre moyenne de l'arc. Au sein d'un panneau, la fibre moyenne de l'arc est une droite, entre mn et m'n'. Sous l'action de l'effort tranchant P, le point B se déplace et prend la position B' telle que $BB' = \lambda$. Soient :

- F l'effort dans la barre AB
- $B'B''$ l'allongement de la barre (on le note ΔL dans les calculs modernes)
- ω la section de la barre
- E le module d'Young de la barre
- L longueur de la barre AB
- Δs la longueur de l'arc entre les sections mn et m'n'
- β l'angle entre la barre de treillis et la fibre moyenne de l'arc.

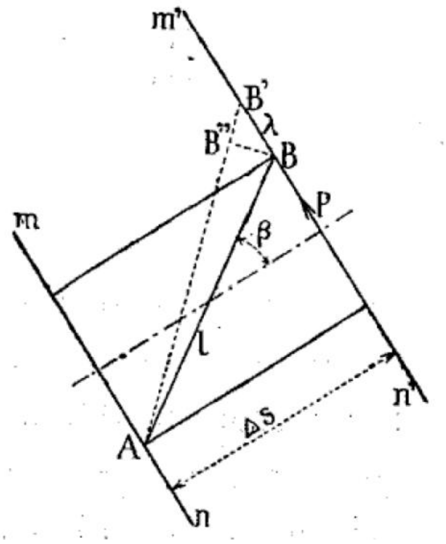


Figure 38. Schéma d'un panneau de l'arc. AB est une barre du treillis de longueur L. P est l'effort tranchant.

$$\sigma = E.\varepsilon = \frac{F}{\omega} = E.\frac{B'B''}{L}$$

$$B'B'' = \frac{F.L}{\omega.E}$$

Par trigonométrie

$$B'B'' = \lambda.\sin\beta$$

$$L = \frac{\Delta s}{\cos\beta}$$

Finalement on a

$$\frac{F}{\omega.E}.\frac{\Delta s}{\cos\beta} = \lambda.\sin\beta$$

Donc

$$F = \frac{\lambda.sin\,\beta.\cos\beta\,.\omega.E}{\Delta s}$$

Par trigonométrie

$$P = F.\sin\beta$$

Finalement, pour une arche à treillis

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{P}{G.\Omega}.\frac{dy}{dx}dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{P.dy}{E.\sum(sin^2\beta.cos\beta.\omega)}$$

4.2.2 Expression finale de la poussée Q

L'effort normal N, l'effort tranchant P et le moment fléchissant μ proviennent des charges verticales dans les montants et de la poussée Q.

Soient N', $-P'$ et $-\mu'$ les actions provenant des charges verticales seulement, alors dans une section de coordonnées (x,y) où la fibre moyenne de l'arche fait un angle α avec l'horizontale (Figure 35), Eiffel écrit

$$\begin{cases} N = N' + Q.cos\alpha \\ P = -P' + Q.sin\alpha \\ \mu = -\mu' + Q.y \end{cases}$$

On peut alors décomposer l'expression du déplacement Δx_1 et isoler la poussée Q :

$$\Delta x_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{N'\,dx}{E\Omega} - \int_{o}^{o'} \frac{P'\,dy}{E\Sigma\,(\sin^2\beta\,.\,\cos\beta\,.\,\omega)} - \int_{o}^{o'} \frac{\mu\,.\,y\,.\,ds}{EI}$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1} \frac{Q\,.\cos\alpha\,.\,dx}{E\Omega} + \int_{o}^{o'} \frac{Q\,.\,\sin\alpha\,.\,dy}{E\Sigma\,(\sin^2\beta\,.\,\cos\beta\,.\,\omega)} + \int_{o}^{o'} \frac{Q\,y^2\,ds}{EI}.$$

De cette expression nous tirons la valeur de la poussée :

$$Q = \frac{-\int_{x_0}^{x_1} \frac{N\,dx}{E\Omega} + \int_{o}^{o} \frac{P'\,dy}{E\Sigma\,(\sin^2\beta\,.\,\cos\beta\,.\,\omega)} + \int_{o}^{o'} \frac{\mu'\,y\,ds}{EI}}{\int_{x_0}^{o_1'} \frac{\cos\alpha\,dx}{E\Omega} + \int^{o'} \frac{\sin\alpha\,dy}{E\Sigma\,(\sin^2\beta\,\cos\beta\,\omega)} + \int_{o}^{o'} \frac{y^2\,ds}{EI}}$$

Figure 39. Expression de la poussée Q (Eiffel, 1888a, p. 125)

Remarque : on voit que pour le calcul de la poussée, la valeur exacte du module d'élasticité E importera peu car le terme 1/E s'annule au numérateur et au dénominateur. La valeur mesurée et exploitée par Eiffel, $E = 160\ 000\ MPa$ n'a donc pas besoin d'être débattue.

« *Pour ces calculs, les* $\int \square$ *ont été remplacées par des Σ et les dx et ds par Δx et Δs. A cet effet, l'arc a été partagé en 27 éléments donnant 27 sections* » (Eiffel, 1888a, p. 125).

4.2.2.1 Dénominateur

Le dénominateur ne dépend que de la géométrie. Son calcul est synthétisé dans le tableau 2 du mémoire p150.

TABLEAU N° 2

Calcul du dénominateur de l'expression de la poussée.

N°s des sections	$\frac{\Delta x \cos \alpha}{E\,\Omega}$	$\frac{\Delta y \sin \alpha}{E\,\Sigma\,(\cos \beta \sin^2 \beta\, \omega)}$	$\frac{y^2 \Delta s}{EI}$
1	0,000 000 000 47 520	0,000 000 0 069 156	0,000 000 0 083 851
2	0, ... 45 848	0, ... 266 260	0, ... 289 890
3	0, ... 55 709	0, ... 359 710	0, ... 546 170
4	0, ... 64 212	0, ... 384 910	0, ... 763 330
5	0, ... 78 617	0, ... 427 030	0, . . . 1 037 440
6	0, ... 89 790	0, ... 391 270	0, . . . 1 251 910
7	0, ... 109 590	0, ... 213 710	0, . . . 1 653 550
8	0, ... 119 260	0, ... 143 770	0, . . . 1 865 640
9	0, ... 65 513	0, ... 72 569	0, ... 996 514
10	0, ... 185 830	0, ... 80 059	0, . . . 2 775 100
11	0, ... 197 450	0, ... 58 422	0, . . . 2 815 240
12	0, ... 208 260	0, ... 25 722	0, . . . 2 851 600
13	0, ... 238 770	0, ... 5 833	0. . . . 3 226 200
14	0, ... 120 660	0, ...	0, . . . 1 634 350
	0,000 000 0 1627 039	0,000 000 2 498 421	0,000 00 21 790 785

Tableau 9. Calcul du dénominateur de l'expression de la poussée (Eiffel, 1888a, p. 150)

Les dimensions Δx, Δy, Δs et y sont fournies dans l'épure de la planche 181 du mémoire. Nous y reviendrons.

L'angle α (Figure 37) peut être calculé par :

$$\alpha = \operatorname{atan}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Les moments quadratiques I des membrures sont donnés par la formule :

$$I = 4.(\omega . r^2 + I_G)$$

Avec ω section d'une membrure, r distance du centre de gravité à l'axe passant par le centre de gravité d'une section et I_G moment quadratique de la membrure par-rapport à un axe passant par son centre de gravité et parallèle à l'axe de la section de l'arc. On retrouve classiquement le théorème de Huygens. Le facteur 4 vient de la présence des 4 membrures.

La section totale des 4 membrures Ω, et les moments quadratiques des membrures sont détaillés dans la planche 181 du mémoire (Figure 40).

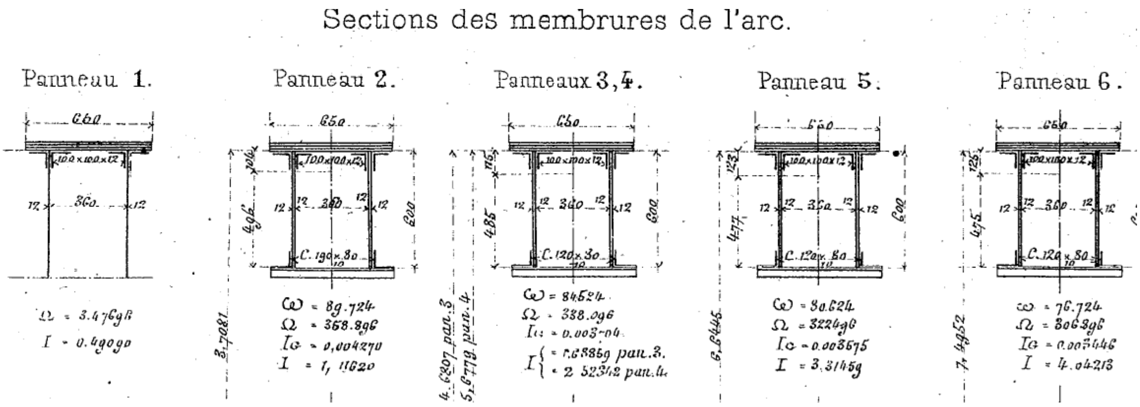


Figure 40. Aperçu des données fournies sur les membrures de l'arc (Eiffel, 1888a, p. Planche 181)

Il nous reste un terme à déterminer pour le calcul du dénominateur : le terme relatif aux barres de treillis

$$\sum \cos\beta\,.\,sin^2\beta.\,\omega$$

L'angle β est l'angle entre la barre de treillis et la fibre moyenne de l'arc (Figure 38).

L'angle β est différent pour chaque panneau. Recenser pour chaque panneau l'angle β, son cosinus, son sinus, et les multiplier par la section ω de la barre est un travail fastidieux. Eiffel choisit donc une méthode graphique particulièrement ingénieuse (Figure 41) : « *L'expression a été construite […] en portant une longueur AB représentation la section, sur la direction de la barre, en la projetant sur la direction de la fibre moyenne, et l'on obtient ainsi :*

$$\overline{AB'} = \overline{AB}.\,cos\,\beta.$$

En projetant ensuite le point B' sur la direction AB, nous avons obtenu :

$$\overline{B'B''} = \overline{AB}.\,cos\,\beta\,.\,sin\,\beta = \overline{AB'}.\,sin\,\beta$$

En menant enfin B''B''' parallèle à AB', nous avons obtenu pour chaque barre

$$\overline{B''B'''} = \overline{AB}.\cos\beta\,.\,sin^2\beta = \omega.\cos\beta\,.\,sin^2\beta \text{ »}$$

Les ingénieurs du XIXe siècle ne vivaient pas sous la tutelle de leur ordinateur et pourtant il semble qu'ils s'en sortaient plutôt bien……

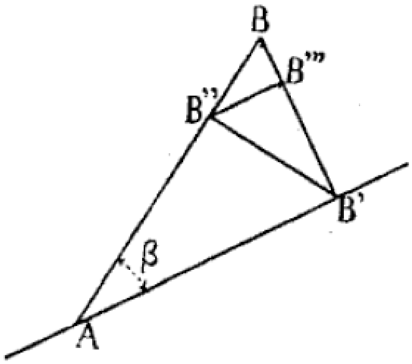


Figure 41. Estimation par méthode graphique du terme $cos\,\beta\,.\,sin^2\beta.\,\omega$ (Eiffel, 1888a, p. 126)

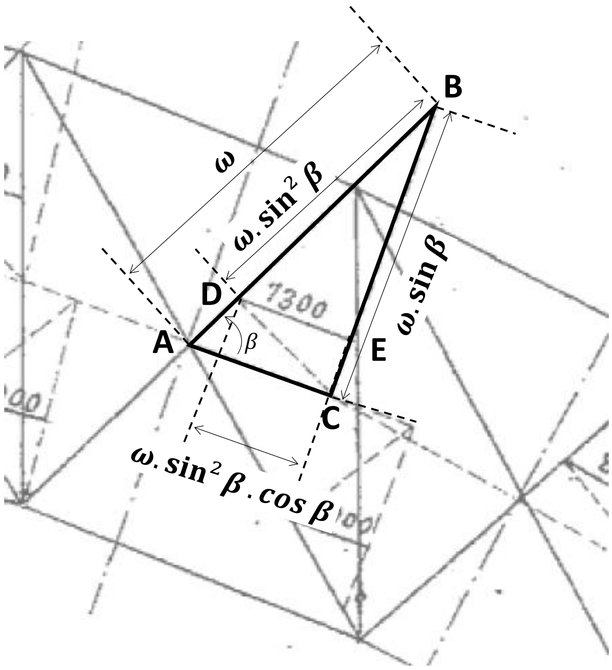


Figure 42. Arc. Estimation par méthode graphique du terme $cos\,\beta\,.\,sin^2\beta.\,\omega$ (Eiffel, 1888a, p. Planche 182)

<u>Exemple de la section 3</u>

Pour la section 3, le tableau 1 du mémoire indique :

$$\sum \cos\beta\,.\,sin^2\beta.\,\omega = \frac{2500 + 5000}{10^6} = 0{,}007\ 500\ m^2$$

C'est bien ce que l'on observe sur la planche 182 :

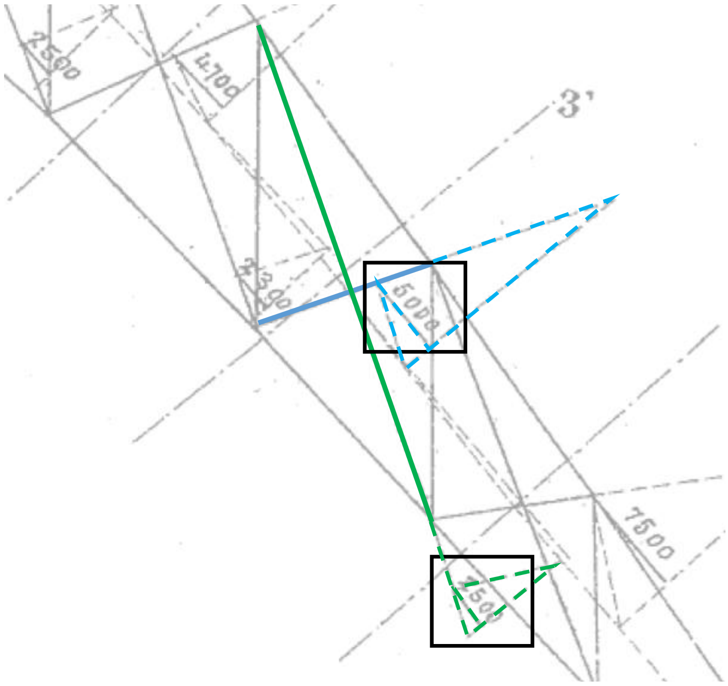


Figure 43. Arc. Estimation par méthode graphique du terme cosβ.sin² β.ω pour la section 3

4.2.2.2 Numérateur

Au numérateur, les variables N', F' et μ' sont à déterminer.

<u>Exemple pour la section 3</u>

On présente ici un exemple de calcul de F', N', P', μ' pour une section. Prenons la section 3 (figure ci-dessous) et le cas de la charge permanente seule ((Eiffel, 1888a, p. 151)). On présente ci-dessous les forces extérieures à gauche de la section 3 :

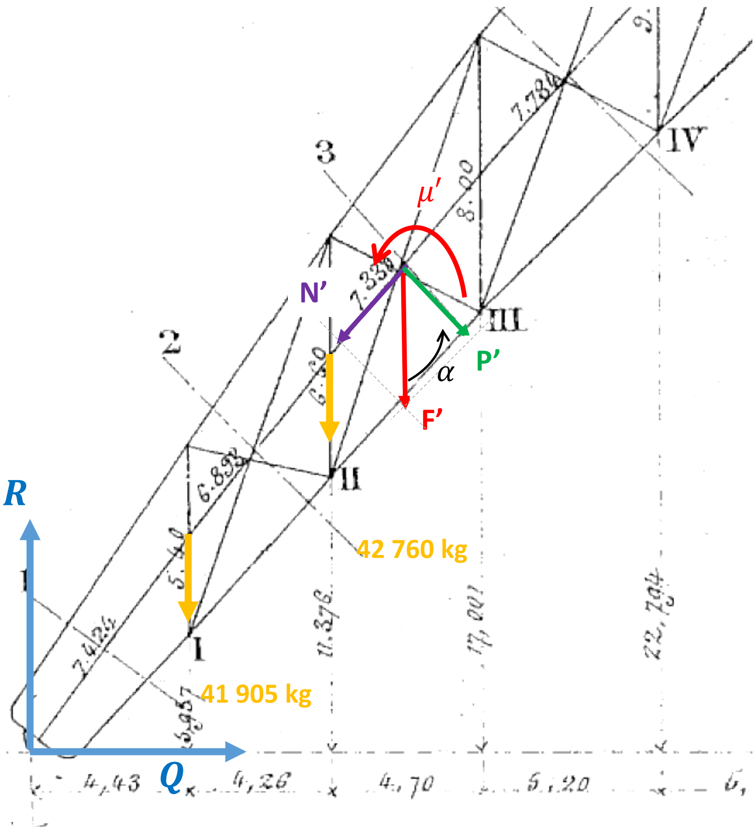


Figure 44. Efforts dans la section 3 pour le calcul de la poussée Q

On sait que :

$$R = 720\,870\ kg$$

C'est la moitié du poids propre de l'arche, ainsi que les charges provenant du tablier sur les montants I à XIII. On a donc :

$$F' = -(720870 - 41905 - 42760) = -636\,205\ kg$$

Pour l'angle α, voir dans le tableau 1 du mémoire p149, les valeurs de Δx et Δy.

$$\alpha = \text{atan}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \text{atan}\left(\frac{17{,}001 - 11{,}376}{4{,}70} = \frac{5{,}625}{4{,}70}\right) \approx 0{,}875$$

$$N' = F'.\sin\alpha = 488\,212\ kg$$

$$P' = F'.\cos\alpha = 395\,310\ kg$$

Le moment μ' a pour expression :

$$\mu' = 720870 \times \left(4{,}43 + 4{,}26 + \frac{4{,}70}{2}\right) - 41905 \times \left(4{,}26 + \frac{4{,}70}{2}\right) - 42760 \times \left(\frac{4{,}70}{2}\right)$$

$$\mu' = 7\,580\,927\ kg$$

On retrouve des valeurs similaires dans le tableau 3 de l'article.

TABLEAU N° 3

Calcul de la poussée pour la charge permanente seule.

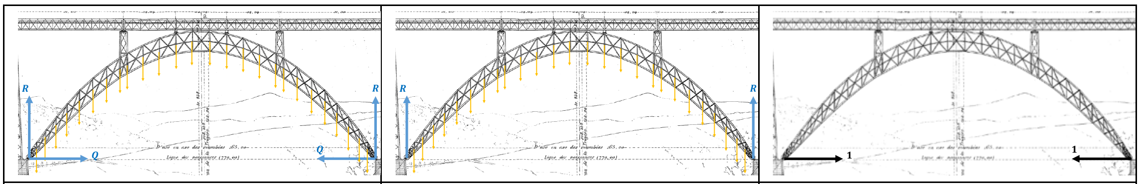
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nos des SECTIONS	POIDS PROPRE de L'ARC	RÉACTION DU TABLIER et des palées	CHARGE TOTALE	FORCE EXTÉRIEURE F'	EFFORT de compression $N' = F' \sin \alpha$	EFFORT TRANCHANT $P' = F' \cos \alpha$	MOMENT μ'	$\frac{N' \Delta x}{E \Omega}$	$\frac{P' \Delta y}{E \Sigma (\omega \sin^2\beta \cos \beta)}$	$\frac{\mu' y \Delta s}{E I}$
1				720 870	578 450	430 170	1 596 727	0,000 460 6273	0,00370 738	0,00449 515
2	41 905		41 905	678 965	533 770	419 610	4 639 649	0,000 395 9840	0,01421 178	0,01551 941
3	42 760		42 760	636 205	$\boxed{488\ 210}$	$\boxed{407\ 930}$	$\boxed{7\ 580\ 926}$	0,000 424 1770	0,01912 157	0,02918 206
4	44 416		44 416	591 789	440 390	395 310	1 061 4659	0,000 423 3327	0,02044 670	0,04072 146
5	44 609		44 609	547 180	391 080	382 710	1 374 0132	0,000 439 5914	0,02286 580	0,05534 206
6	43 632		43 632	503 548	341 530	370 020	1 683 7598	0,000 417 3215	0,02134 570	0,06693 890
7	43 763		43 763	459 785	291 150	355 850	1 986 5532	0,000 412 2883	0,01201 004	0,08887 875
8	44 540		44 540	415 245	239 190	339 430	2 279 4655	0,000 348 9852	0,00847 165	0,10112 100
9	35 298	67 918	103 216	312 029	164 520	265 120	2 472 1336	0,000 126 8523	0,00364 901	0,05417 300

— 151 —

Figure 45. Arc central. Efforts internes dus aux charges verticales. Exemple de la section 3

<u>Remarque</u>

Le calcul de la poussée est opéré par superposition. On présente ci-dessous un formalisme plus contemporain de ce calcul.



S_0	S_1	S_2
$S_0 = S_1 + Q.S_2$ $u_{x0} = u_{x1} + Q.u_{x2}$		

Figure 46. Principe de superposition pour le calcul de Q. Déplacement horizontal sur la structure hyperstatique avec cas de charge réel : $u_{x0} = 0$. Déplacement horizontal sur la structure isostatique associée avec cas de charge réel : u_{x1}. Déplacement horizontal sur la structure isostatique associée avec F=1N en O' : u_{x2}

Si $u_x = 0$ alors

$$Q = -\frac{u_{x1}}{u_{x2}}$$

u_{x1} est bien le terme ci-dessous

$$-\int_{x_0}^{x_1} \frac{\mathrm{N}\,dx}{\mathrm{E}\,\Omega} + \int_0^{o} \frac{\mathrm{P}'\,dy}{\mathrm{E}\,\Sigma\,(\sin^2\beta\ .\ \cos\beta\ .\ \omega)} + \int_0^{o'} \frac{\mu'\ y\ ds}{\mathrm{E\,I}}$$

u_{x2} est le terme ci-dessous, soit le déplacement pour F=1N

$$\int_{x_0}^{o_1'} \frac{\cos \alpha \, dx}{E\,\Omega} + \int^{o'} \frac{\sin \alpha \, dy}{E\,\Sigma\,(\sin^2\beta \cos \beta \ \omega)} + \int_{0}^{o'} \frac{y^2 d s}{E I}$$

4.2.3 Calcul des poussées correspondant aux 4 hypothèses

Pour la charge permanente seule, les résultats sont résumés dans le tableau 3 de l'article.

TABLEAU N° 3

Calcul de la poussée pour la charge permanente seule.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nos des SECTIONS	POIDS PROPRE de L'ARC	RÉACTION DU TABLIER et des palées	CHARGE TOTALE	FORCE EXTÉRIEURE F'	EFFORT de compression $N' = F' \sin \alpha$	EFFORT TRANCHANT $P' = F' \cos \alpha$	MOMENT μ'	$\frac{N' \Delta x}{E \Omega}$	$\frac{P' \Delta y}{E \Sigma (\omega \sin^2\beta \cos\beta)}$	$\frac{\mu' y \Delta s}{E I}$
1				720 870	578 450	430 170	1 596 727	0,000 460 6273	0,00370 738	0,00449 515
2	41 905		41 905	678 965	533 770	419 610	4 639 649	0,000 395 9840	0,01421 178	0,01551 941
3	42 760		42 760	636 205	488 210	407 930	7 580 926	0,000 424 1770	0,01912 157	0,02918 206
4	44 416		44 416	591 789	440 390	395 310	1 061 4659	0,000 423 3327	0,02044 670	0,04072 146
5	44 609		44 609	547 180	391 080	382 710	1 374 0132	0,000 439 5914	0,02286 580	0,05534 206
6	43 632		43 632	503 548	341 530	370 020	1 683 7598	0,000 417 3215	0,02134 570	0,06693 890
7	43 763		43 763	459 785	291 150	355 850	1 986 5532	0,000 412 2883	0,01201 004	0,08887 875
8	44 540		44 540	415 245	239 190	339 430	2 279 4655	0,000 348 9852	0,00847 165	0,10112 100
9	35 298	67 918	103 216	312 029	164 520	265 120	2 472 1336	0,000 126 8523	0,00364 901	0,05417 300
10	30 921	67 918	98 839	213 190	99 760	188 410	2 604 6306	0,000 209 769[illegible]	0,00322 346	0,14900 000
11	33 914		33 914	179 276	66 777	166 370	2 754 5744	0,000 142 0780	0,00260 950	0,14894 000
12	32 783		32 783	146 493	38 407	141 360	2 880 6383	0,000 082 8850	0,00138 690	0,15025 660
13	33 545	78 570	112 115	34 378	4 686	34 057	2 951 8827	0,000 011 2951	0,00014 573	0,16917 700
14	34 376		34 378	0	0	0	2 965 9957			0,08525 440
							SOMMES	0,003 895 187	0,133 195 22	1,158 999 79

NUMÉRATEUR. . . . = 1,158 999 79 + 0,133 195 22 — 0,003 895 187
= 1,288 299 823

POUSSÉE $Q = \dfrac{1,288\ 299\ 823}{0,00000\ 244\ 519\ 09} = 526\ 871$

Figure 47. Calcul de la poussée réalisé dans le mémoire, pour la charge permanente seule (Eiffel, 1888a, p. 151)

« *Pour les différents cas de surcharges, le calcul a été fait en supposant que la surcharge agissait seule ; les poussées ont été déterminées exactement de la même manière que pour la charge permanente, les éléments des calculs sont donnés dans les trois tableaux n° 4,5,6.* » (Eiffel, 1888a, p. 127)

TABLEAU N° 4

Calcul de la poussée dans le cas de la surcharge agissant seule.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nos des SECTIONS	CHARGES	FORCE EXTÉRIEURE F'	EFFORT de compresion $N' = F' \sin \alpha$	EFFORT TRANCHANT $P' = F' \cos \alpha$	MOMENT μ'	$\frac{N' \Delta x}{E \Omega}$	$\frac{P' \Delta y}{E \Sigma (\omega \sin^2 \beta \cos \beta)}$	$\frac{\mu' y \Delta s}{EI}$
1		254 230	204 002	151 710	563 129	0.000 162 450	0.001 307 488	0.001 585 310
2		254 230	199 865	157 119	1 667 750	148 270	0.005 321 423	5 578 541
3		254 230	195 091	163 010	2 806 700	169 500	7 641 070	0.010 804 130
4		254 230	189 190	169 824	4 065 140	181 862	8 783 814	15 595 210
5		254 230	181 703	177 811	5 463 403	204 242	0.010 623 870	22 005 310
6		254 230	172 431	186 816	6 963 358	210 696	0.010 777 000	27 683 270
7		254 230	160 984	196 764	8 565 008	227 970	0.006 640 708	38 320 000
8	66 131	254 230	146 445	207 813	10 268 326	213 663	5 186 680	45 552 340
9	66 141	188 099	99 178	159 822	11 443 094	0.000 076 470	2 199 743	25 075 880
10		121 968	57 074	107 790	12 216 930	0.000 120 011	1 844 171	69 887 540
11		121 968	45 431	113 190	13 153 367	0.000 096 661	1 775 325	71 120 500
12	121 968	121 968	31 977	117 702	14 094 063	0.000 069 009	1 154 700	73 515 820
13		0	0	0	14 569 700			83 499 400
14		0	0	0	14 569 700			41 879 340
					SOMMES	0.001 880 804	0.063 255 992	0.532 102 491

NUMÉRATEUR = 0.532 102 491 + 0.063 255 992. — 0.001 880 804 = 0.593 477 679

$$\text{POUSSÉE } Q = -\frac{0.593\ 477\ 679}{0.00\ 0002\ 445\ 191} = 242\ 712$$

— 152 —

Figure 48. Calcul de la poussée, surcharge agissant seule (Eiffel, 1888a, p. 152)

TABLEAU N° 5

Calcul de la poussée dans le cas où la surcharge s'étend seulement sur le tablier central.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
NUMÉROS des SECTIONS	CHARGES	FORCE EXTÉRIEURE F'	EFFORT de compression $N = F' \sin \alpha$	EFFORT TRANCHANT $P = F' \cos \alpha$	MOMENT μ'	$\frac{N' \Delta x}{E \Omega}$	$\frac{P' \Delta y}{E \Sigma (\omega \sin^2 \beta \cos \beta)}$	$\frac{\mu' y \Delta s}{E I}$
				kg				
1		166 320	133 460	99 250	368 400	0,0 001 062 760	0,008 553 720	0,001 037 127
2		166 320	130 753	102 789	10 910 600	0,0 000 970 000	0,003 481 332	0,003 649 540
3		166 320	127 630	106 642	1 836 135	0,0 001 108 900	0,004 998 871	0,007 068 177
4		166 320	123 770	111 100	2 659 457	1 189 730	5 746 466	10 202 600
5		166 320	118 872	116 326	3 574 216	1 336 175	6 950 285	14 396 110
6		166 320	112 806	122 217	4 555 505	1 378 400	7 050 400	18 110 700
7		166 320	105 320	128 724	5 603 321	1 491 390	4 344 423	25 069 360
8	22 176	166 320	95 806	135 954	6 717 690	1 397 807	3 393 180	29 800 830
9	22 176	144 144	76 002	122 475	7 520 990	586 005	1 685 683	16 481 080
10		121 968	57 073	107 790	8 222 305	1 200 110	1 844 172	47 036 090
11		121 968	45 431	113 190	9 154 753	966 610	1 775 652	49 499 970
12	121 968	121 968	31 977	117 702	10 099 405	690 090	1 154 700	52 679 350
13		0	0	0	10 575 069			60 606 020
14		0	0	0	10 575 069			30 396 910
					SOMMES . .	0,0 013 377 977	0,043 280 536	0,366 033 864

NUMÉRATEUR = 0,366 033 864 + 0,043 280 536 — 0,0 013 377 977 = 0,407 976 602

$$\text{POUSSÉE } Q = \frac{0,407\ 976\ 602}{0,000\ 002\ 445\ 191} = 166\ 848\ kg$$

— 153 —

Figure 49. Calcul de la poussée, la surcharge s'étend seulement sur le tablier central (Eiffel, 1888a, p. 153)

TABLEAU N° 6

Calcul de la poussée dans le cas de la demi-surcharge.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nos des SECTIONS	CHARGES	FORCE EXTÉRIEURE	EFFORT DE COMPRESSION $N' = F' \sin \alpha$	EFFORT TRANCHANT $P' = F' \cos \alpha$	MOMENT μ'	$\frac{N' \Delta x}{E\ \Omega}$	$\frac{P' \Delta y}{E\ \Sigma (\omega \sin^2 \beta \cos \beta)}$	$\frac{\mu' y \Delta s}{E\ I}$
	kg	*kg*	*kg*	*kg*	*kg*	*kg*	*kg*	*kg*
1		165 482	132 788	98 750	366 543	0,000105741	0,0008510628	0,001031903
2		165 482	130 095	102 271	1 085 562	0,000096512	0,0034637920	3631153
3		165 482	126 990	106 105	1 826 923	0,000110332	49736850	7032563
4		165 482	123 147	110 541	2 646 057	118376	57173120	0,010151150
5		165 482	118 273	115 740	3 356 208	132944	69152360	14323580
6		165 482	112 239	121 601	4 532 552	137145	70148800	18019440
7		165 482	104 787	128 076	5 375 090	148388	43225340	24942730
8	66 320	165 482	95 323	135 270	6 683 820	139076	33760060	29650700
9	66 320	99 162	52 285	84 255	7 410 074	0,000040313	11596440	16238030
10		32 842	15 368	29 024	7 698 494	32315	0,0004965751	44039810
11		32 842	12 233	30 478	7 940 570	26027	4780370	42983470
12	118 240	32 842	8 610	31 693	8 203 943	18582	3109313	42792470
13		— 85 398	— 11 641	— 84 601	7 981 455	— 28057	— 0,0003620211	45742210
14		— 85 398	0	— 85 398	7 279 734	0	0	41849640
13′	3 340	— 85 398	11 641	— 84 601	6 578 492	0,000028057	0,0003620211	37699800
12′		— 88 738	23 265	— 85 634	5 881 554	50207	8401204	30678700
11′		— 88 738	33 053	— 82 352	5 194 280	70326	0,001291640	28085560
10′		— 88 738	41 524	— 78 423	4 515 880	87314	13417300	25833300
9′		— 88 738	46 788	— 75 399	4 032 255	36076	10377408	0,008836062
8′		— 78 738	51 146	— 72 536	3 584 429	74578	18103900	0,015899860
7′		— 88 738	56 191	— 68 679	2 980 514	79571	23179140	13375450
6′		— 88 738	60 186	— 65 207	2 430 533	73542	37616550	0,009662736
5′		— 88 738	63 423	— 62 065	1 906 979	71290	37082220	0,007680867
4′		— 88 738	66 036	— 59 276	1 418 920	63478	30659550	5443451
3′		— 88 738	68 096	— 56 898	979 665	59164	26670860	3771399
2′		— 88 738	69 762	— 54 842	582 121	51753	18374230	1947170
1′		— 88 738	71 206	— 52 953	196 554	56703	0,0004363736	0,000553346
					TOTAUX.	0,001879753	0,063236145	0,531896541

NUMÉRATEUR = 0,531896541 + 0,063236145 — 0,001879753 = 0,593252933

$$\text{POUSSÉE } Q = \frac{0,593252933}{2 \times 0,0000024451 9099} = 121\ 310\ kg$$

— 154 —

Figure 50. Calcul de la poussée, demi-surcharge (Eiffel, 1888a, p. 154)

<u>Remarque : cas particulier de la demi-surcharge</u>

Dans ce cas, le chargement n'est pas symétrique et la réaction verticale R aux appuis n'est pas la moitié de la somme des charges verticales. On présente ci-dessous la situation :

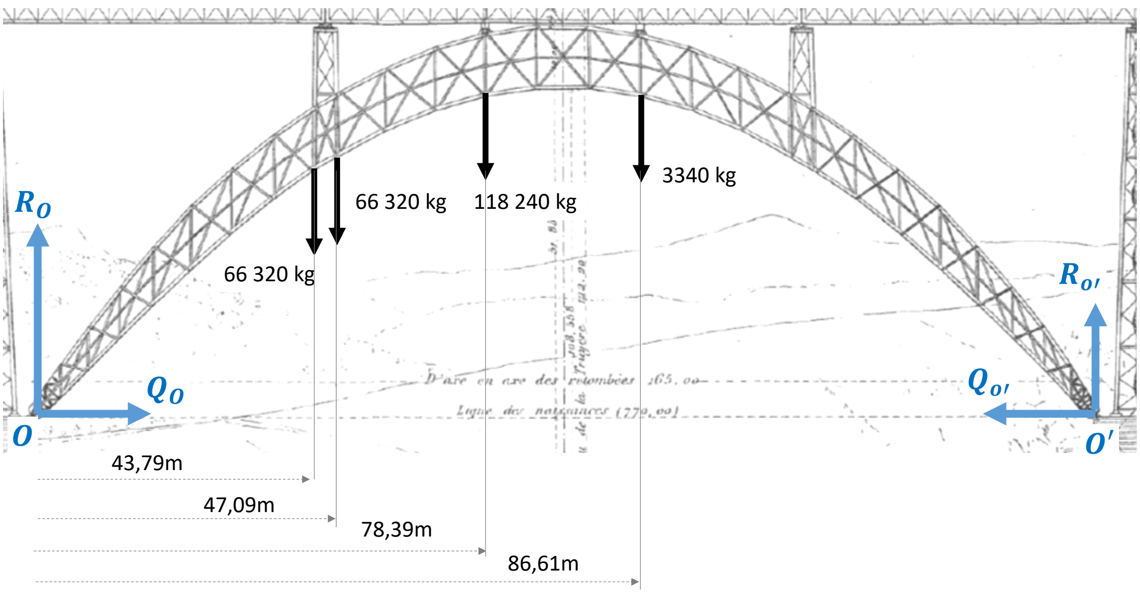


Figure 51. Schéma RDM pour le cas "demi-surcharge", pour calcul de la poussée Q

Le principe fondamental de la statique énonce :

$$Q_O + Q'_O = 0$$

La poussée sera donc, en valeur absolue, la même de chaque côté, comme pour les autres cas.

De plus,

$$R_{o'} + R_o - 66\,320 - 66\,320 - 118\,240 - 3\,340 = 0$$

Somme des moments en O :

$$R_{o'} \times 165 - 43{,}79 \times 66320 - 47{,}09 \times 66320 - 78{,}39 \times 118240 - 86{,}61 \times 3340 = 0$$

$$R_{o'} = \frac{43{,}79 \times 66320 + 47{,}09 \times 66320 + 78{,}39 \times 118240 + 86{,}61 \times 3340}{165} = 94\,457\ kg$$

$$R_o = 66\,320 + 66\,320 - 118\,240 - 3\,340 = 159\,763\ kg$$

Dans le tableau 6 du mémoire (p154), on a les résultats obtenus par Eiffel. On les compare ci-dessous avec nos calculs.

	Calcul analytique	Calcul Eiffel
Réaction en Y, appui gauche (kg)	159 763	165 482
Réaction en Y, appui droit (kg)	94 457	88 738

Calcul de la pou

1	2	3	4
Nos des SECTIONS	CHARGES	FORCE EXTÉRIEURE	EFFORT DE COMPRESSION $N' = F' \sin \alpha$
	kg	kg	kg
1		165 482	132 788
2		165 482	130 095
3		165 482	126 990
4		165 482	123 147
5		165 482	118 273
6		165 482	112 239
7		165 482	104 787
8	66 320	165 482	95 323
9	66 320	99 162	52 285
10		32 842	15 368
11		32 842	12 233
12	118 240	32 842	8 610
13		— 85 398	— 11 641
14		— 85 398	0
13'	3 340	— 85 398	11 641
12'		— 88 738	23 265
11'		— 88 738	33 053
10'		— 88 738	41 524
9'		— 88 738	46 788
8'		— 78 738	51 116
7'		— 88 738	56 191
6'		— 88 738	60 186
5'		— 88 738	63 423
4'		— 88 738	66 036
3'		— 88 738	68 096
2'		— 88 738	69 762
1'		— 88 738	71 206

Tableau 10. Réaction en Y sur les appuis dans le cas particulier de la demi-surcharge

4.2.4 Calcul de la poussée par simulation numérique sur ABAQUS

On propose de retrouver les calculs d'Eiffel concernant la poussée de l'arc à l'aide du code de calcul Abaqus.

4.2.4.1 Détails du modèle ABAQUS

- Part : 2D déformable

Le part est inspiré de la planche 181 de l'article.

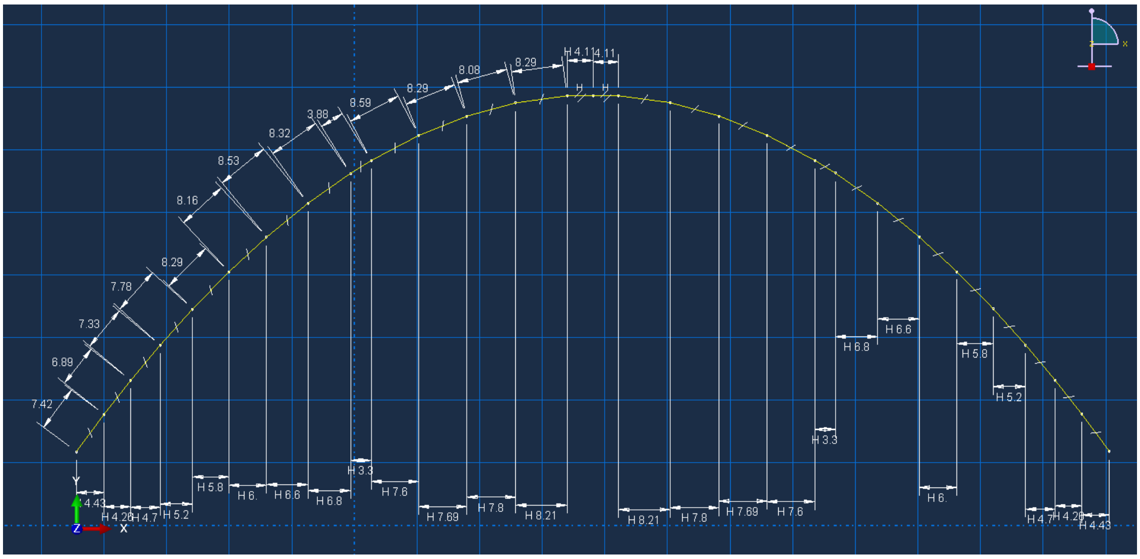


Figure 52. Arche centrale, Géométrie Abaqus

Le module d'élasticité E utilisé par Eiffel a pour valeur $E = 16 \times 10^9$ (Eiffel, 1888a, p. 123) (l'unité n'est pas précisée, on peut imaginer $160\ 000\ MPa$).

$$E = 160 \times 10^8\ kg/m^2$$

$$\nu = 0{,}3$$

Remarque : Eiffel a choisi un module de cisaillement $G = E/3$. On admet aujourd'hui que pour un matériau isotrope (si l'on peut considérer le fer puddlé isotrope……) :

$$G = \frac{E}{2.(1+\nu)}$$

Ainsi, $G = E/3$ implique implicitement un coefficient de Poisson $\nu = 0{,}5$.

- Sections

Les membrures et le treillis n'ont pas été reproduits à l'identique.

Pour chaque montant on a défini une section de type « box » (Figure 53), et ajusté a, b et l'épaisseur t pour avoir les mêmes moments quadratiques que ceux des membrures, donnés en planche 181 (Tableau 11).

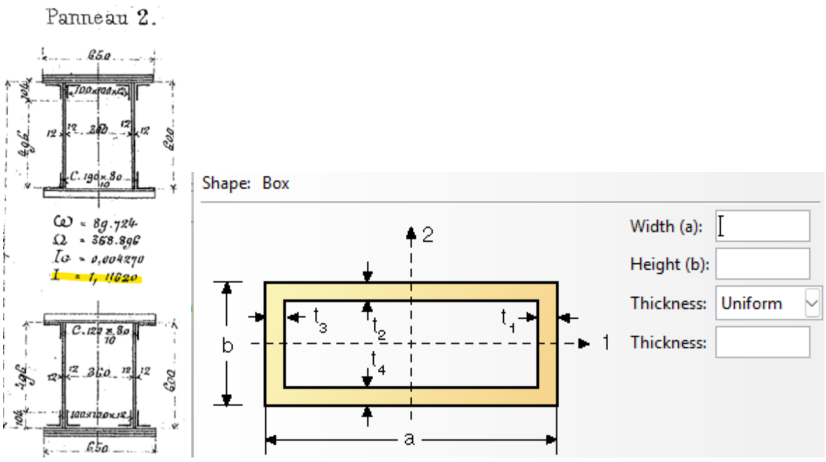


Figure 53. Section des panneaux de l'arche

Pour chaque montant, on a choisi une « box » carrée : a=b et un rapport t/a constant. Dans ce cas, avec b réel et $t = C.a$, on obtient

$$I_z = \frac{a^4}{12} - \frac{(a-2t)^4}{12} = \frac{a^4}{12} - \frac{(a-2aC)^4}{12} = \frac{a^4}{12} - \frac{(1-2C)^4.a^4}{12} = \frac{a^4}{12}.(1-(1-2C)^4)$$

On a choisi $t = 0{,}001a$.

Panneau	a (m)	t (m)	Iz abaqus (m²)	S abaqus (mm²)	S abaqus (m²)	Iz article (m4)	S article (mm²)
1	5,21	0,00521	0,49090	108597	0,109	0,49090	347690
2	6,40	0,00640	1,11620	163755	0,164	1,11620	358896
3	7,10	0,00710	1,68859	201412	0,201	1,68859	338096
4	7,85	0,00785	2,52342	246217	0,246	2,52342	338096
5	8,40	0,00840	3,31450	282184	0,282	3,31450	322496
6	8,83	0,00883	4,04213	311622	0,312	4,04213	306896
7	9,02	0,00902	4,40301	325235	0,325	4,40301	291296
8	9,28	0,00928	4,92900	344114	0,344	4,92900	291296
9	9,33	0,00933	5,03757	347883	0,348	5,03757	261496
10	9,10	0,00910	4,55754	330893	0,331	4,55754	225896
11	9,31	0,00931	4,98683	346127	0,346	4,98683	225896
12	9,45	0,00945	5,29470	356651	0,357	5,29470	225896
13	9,35	0,00935	5,08126	349388	0,349	5,08126	212896
14	9,35	0,00935	5,08126	349388	0,349	5,08126	212896

Tableau 11. Modèle Abaqus. Caractéristiques des sections des panneaux de l'arche

<u>Remarque 1</u>

Avec ce rapport t/a, les aires des sections obtenues sont proches des sections réelles des montants de l'arche (Tableau 12).

	Article	Abaqus	Ecart
S moy (mm²)	282838	290247	-2,6%

Tableau 12. Comparaison sections des panneaux entre l'article et le modèle Abaqus

<u>Remarque 2</u>

La raideur apportée par les barres de treillis n'est pas prise en compte dans le modèle Abaqus. Dans l'expression de la poussée Q ci-dessous, le terme $\int \frac{\sin \alpha . dy}{E . \sum sin^2 \beta . \cos \beta . \omega}$ est donc négligé. Cependant le tableau 2 du mémoire montre que ce terme est négligeable devant les deux autres

$$Q = \frac{-\int_{x_0}^{x_1} \frac{N\,dx}{E\,\Omega} + \int_0^{o} \frac{P'\,dy}{E\,\Sigma\,(\sin^2\beta\,.\,\cos\beta\,.\,\omega)} + \int_0^{o'} \frac{\mu'\,y\,ds}{EI}}{\int_{x_0}^{o_1'} \frac{\cos\alpha\,dx}{E\,\Omega} + \int^{o'} \frac{\sin\alpha\,dy}{E\,\Sigma\,(\sin^2\beta\,\cos\beta\,\omega)} + \int_0^{o'} \frac{y^2 d;}{EI}}$$

Calcul du dénominateur de l'expression de la poussée.

Nos des sections	$\frac{\Delta x \cos \alpha}{E\,\Omega}$	$\frac{\Delta y \sin \alpha}{E\,\Sigma\,(\cos \beta \sin^2 \beta\,\omega)}$	$\frac{y^2 \Delta s}{EI}$
1	0,000 000 000 47 520	0,000 000 0 069 156	0,000 000 0 083 851
2	0, ... 45 848	0, ... 266 260	0, ... 289 890
3	0, ... 55 709	0, ... 359 710	0, ... 546 170
4	0, ... 64 212	0, ... 384 910	0, ... 763 330
5	0, ... 78 617	0, ... 427 030	0, . . . 1 037 440
6	0, ... 89 790	0, ... 391 270	0, . . . 1 251 910
7	0, ... 109 590	0, ... 213 710	0, . . . 1 653 550
8	0, ... 119 260	0, ... 143 770	0, . . . 1 865 640
9	0, ... 65 513	0, ... 72 569	0, ... 996 514
10	0, ... 185 830	0, ... 80 059	0, . . . 2 775 100
11	0, ... 197 450	0, ... 58 422	0, . . . 2 815 240
12	0, ... 208 260	0, ... 25 722	0, . . . 2 851 600
13	0, ... 238 770	0, ... 5 833	0. . . . 3 226 200
14	0, ... 120 660	0, ...	0, . . . 1 634 350
	0,000 000 0 1627 039	0,000 000 2 498 421	0,000 00 21 790 785

Figure 54. (Eiffel, 1888a, p. 150)

Le résultat est illustré ci-dessous.

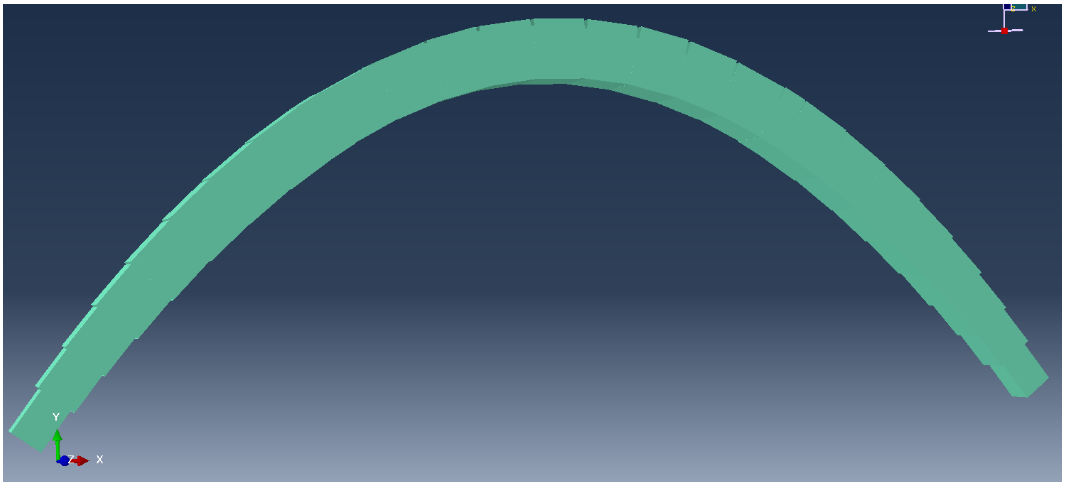
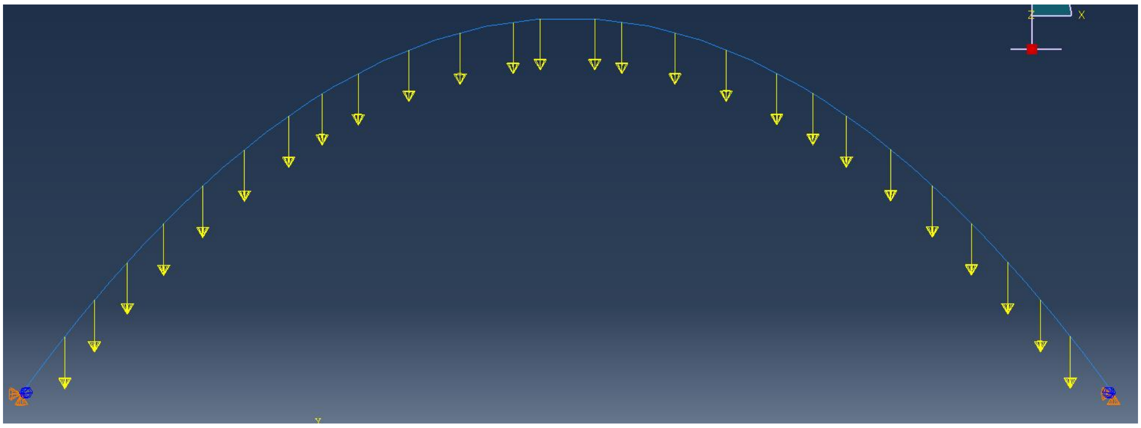


Figure 55. Arche centrale sur Abaqus

- Maillage

Éléments utilisés : Timoshenko beams 3-node quadratic beam B22[2]. Environ 925 éléments

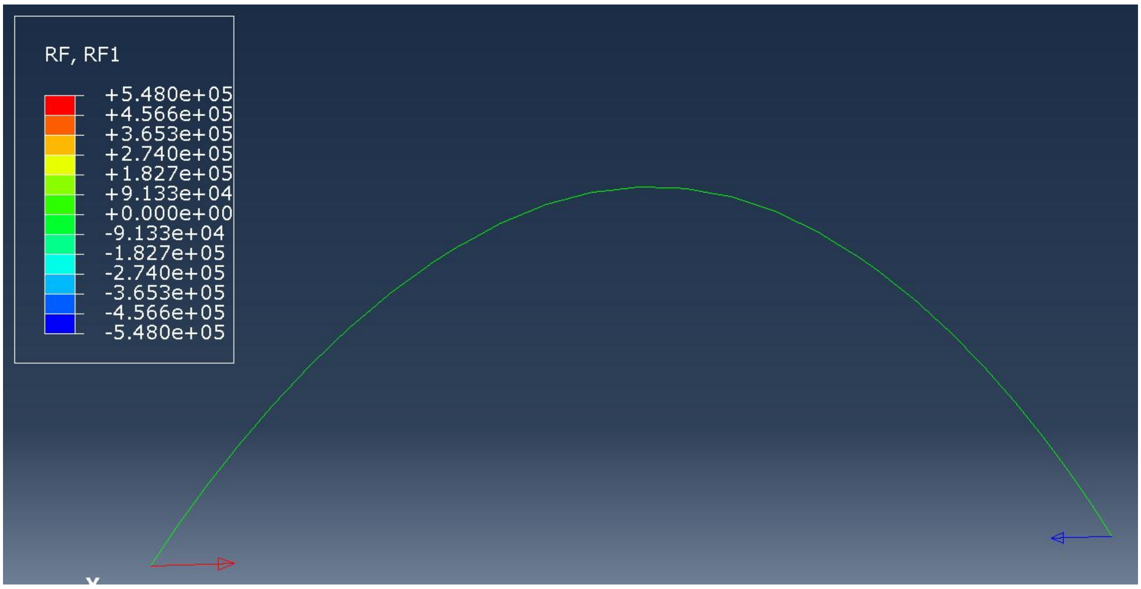
- Chargements



4.2.4.2 Résultats et comparaison avec l'article

On présente ci-dessous le résultat pour la charge permanente seule.

[2] https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/usb/default.htm?startat=pt06ch23s03ael13.html



Les résultats sont résumés ci-dessous.

	Abaqus (kg)	Calcul Excel avec les données de l'article (kg)	Article (kg)	Erreur relative Abaqus/article
Tab 3 (p151)	547 971	527 518	526 871	4%
Tab 4 (p152)	257 458	247 805	242 712	6%
Tab 5 (p153)	178 293	170 961	166 848	7%
Tab 6 (p154)	128 666	/	121 310	6%

Figure 56. Poussée Q modélisée sur ABAQUS, comparaison avec l'article

4.2.5 Conclusion sur le calcul de la poussé Q de l'arc

Le calcul de la poussée constitue certainement la partie la plus ardue du calcul de l'arc, et le chef d'œuvre des calculs du viaduc.

Et pourtant, malgré la longueur et la complexité de ce calcul, il faut garder en tête que c'est une étape tout à fait classique lors du calcul d'une structure hyperstatique (calcul des réactions aux appuis par des considérations sur la déformée de la structure), étape qui s'inscrit dans la démarche présentée dans le Tableau 1.

Pour des explications plus détaillées sur la poussée des arcs on peut consulter (Callandreau, 1944, p. 40; Goulet et al., 2019, p. 191) ; pour la formule de Bresse voir (Ringot, 2017, p. 206).

4.3 Efforts internes dans les sections dus aux charges verticales

On connait maintenant toutes les réactions aux appuis ; le bilan des forces et des actions de liaison est schématisé en Figure 57. Les valeurs varient évidemment en fonction des 4 hypothèses de surcharge.

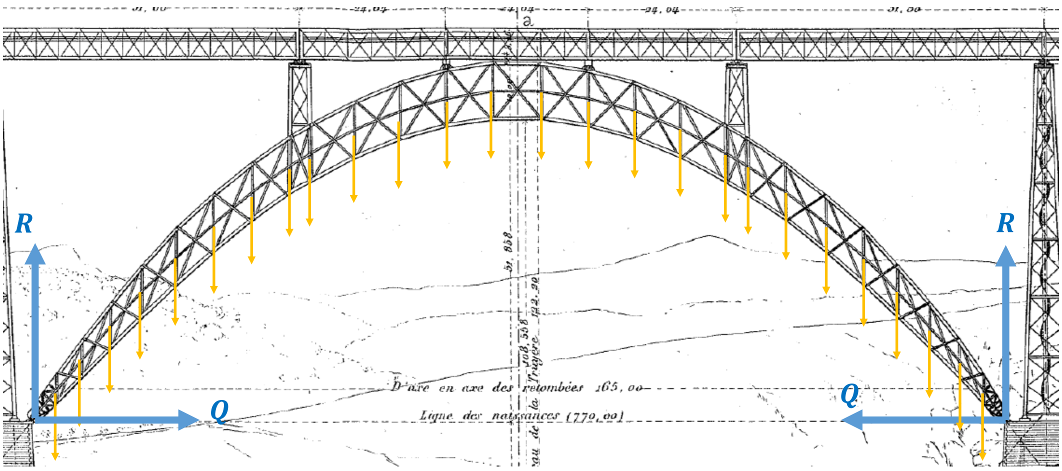


Figure 57. Arc central. Bilan des forces et des actions de liaison

Pour chaque hypothèse, on peut maintenant déterminer les efforts internes dans les sections 1 à 14 : résultante F' des efforts internes sur la section et moment μ' des forces verticales (Figure 58).

« *La force extérieure F' est la somme de toutes les forces verticales à gauche de la section* » (Eiffel, 1888a, p. 127). Puis Eiffel en déduit l'effort normal N' et l'effort tranchant P' :

$$\begin{cases} N' = F'.\cos\alpha \\ P' = F'.\sin\alpha \end{cases}$$

Le moment μ' est donné par :

$$\mu' = R.r - \sum P.a$$

Avec

- R : réaction verticale à l'appui en O
- r : bras de levier entre l'appui O et la section étudiée
- $\sum P.a$: somme des produit des forces P agissant sur l'arc à gauche de la section étudiée par leur bras de levier a

Tous ces efforts internes sont résumés dans les tableaux 3, 4, 5 et 6 du mémoire.

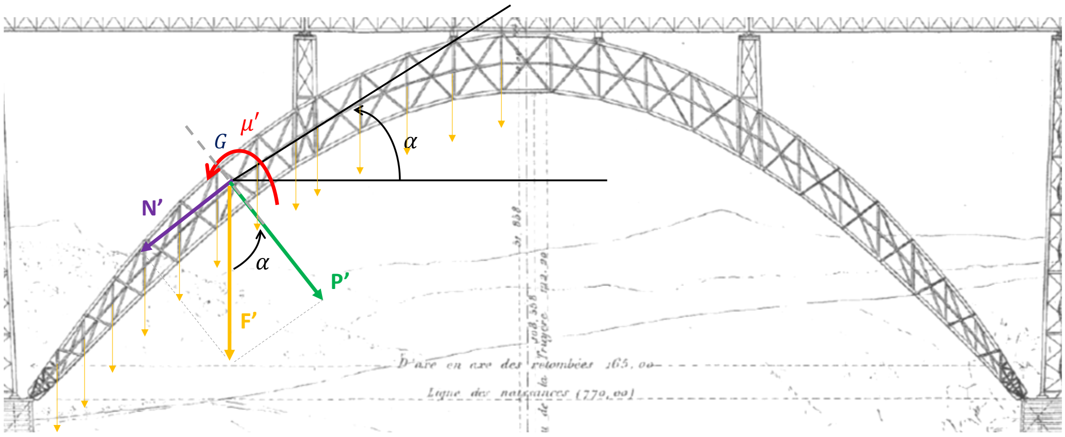


Figure 58. Efforts internes dans une section. Efforts dus aux charges verticales

Aux efforts internes dus aux charges verticales, Eiffel ajoute les efforts internes dus à la poussée Q (Figure 59).

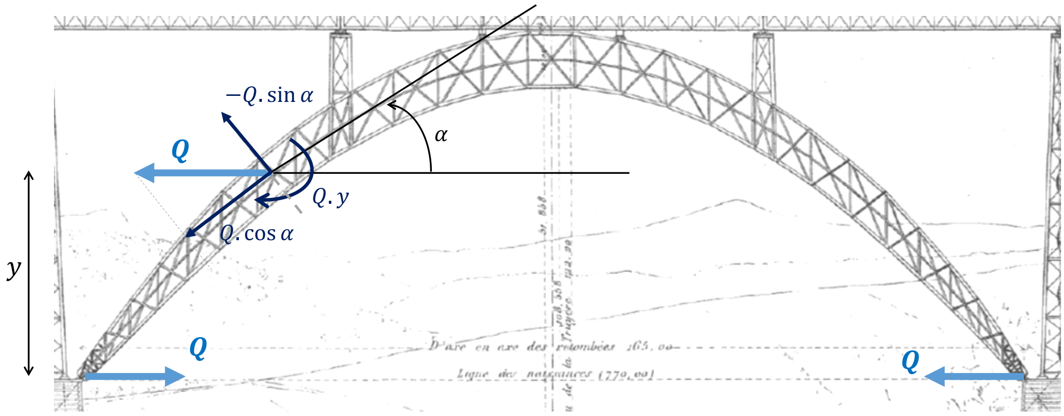


Figure 59. Efforts internes dans une section. Efforts et moments dus à la poussée Q

Finalement,

$$\begin{cases} N = N' + Q.cos\alpha \\ P = P' - Q.sin\alpha \\ \mu = \mu' - Q.y \end{cases}$$

4.4 Contraintes dues aux charges verticales

Les efforts internes dans chaque section de l'arc sont connus. Il reste maintenant à déterminer les contraintes dans les éléments métalliques (membrures, barres de treillis).

Eiffel considère que les membrures doivent résister à l'effort normal N et au moment μ tandis que les barres de treillis doivent résister à l'effort tranchant P.

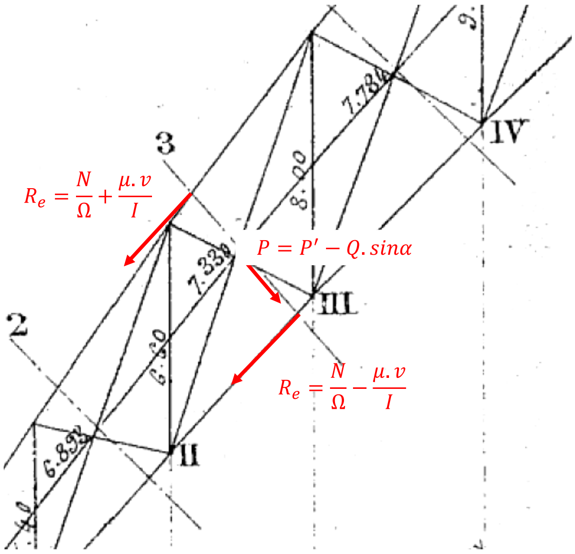


Figure 60. Contraintes dans les éléments de l'arche

4.4.1 Contraintes (coefficients de travail) dans les membrures

« *Connaissant maintenant les poussées exactes, il devient facile de déterminer, dans chaque hypothèse, les coefficients de travail pour les membrures.* » (Eiffel, 1888a, p. 128).

Pour l'intrados

$$R_i = \frac{N}{\Omega} - \frac{\mu.v}{I} = \frac{N' + Q.\cos\alpha}{\Omega} - \frac{(\mu' - Q.y).v}{I}$$

Pour l'extrados

$$R_e = \frac{N}{\Omega} + \frac{\mu.v}{I}$$

Les contraintes pour les différentes hypothèses sont données dans les tableaux 7 à 10 du mémoire (Tableau 13).

TABLEAU N° 7

Coefficients de travail pour la charge permanente.

Q = 526 871

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
NUMÉROS des SECTIONS	MOMENT Qy	MOMENT M'	MOMENT TOTAL $M = M' - Qy$	N'	$Q \cos \alpha$	$N = N' + Q \cos \alpha$	COEFFICIENT $\frac{v\mu}{I}$	COEFFICIENT $-\frac{v\mu}{I}$	COEFFICIENT $\frac{N}{\Omega}$	COEFFICIENTS TOTAUX R_e	R_i
				kg	kg	kg	kg				
1	1 569 285	1 596 727	27 442	578 450	314 406	892 856	0,08	— 0,08	2,57	2,65	2,49
2	4 566 127	4 639 649	73 522	533 770	325 617	859 387	0,13	— 0,13	2,38	2,51	2,25
3	7 475 509	7 580 926	105 417	488 210	337 824	826 034	0,15	— 0,15	2,43	2,58	2,28
4	10 483 415	10 614 659	131 244	440 390	351 945	792 335	0,15	— 0,15	2,33	2,48	2,18
5	13 570 879	13 740 132	169 253	391 080	368 500	759 580	0,17	— 0,17	2,36	2,53	2,19
6	16 591 167	16 807 598	246 401	341 530	387 161	728 691	0,23	— 0,23	2,37	2,60	2,14
7	19 472 625	19 865 532	392 907	291 150	407 775	698 925	0,36	— 0,36	2,39	2,75	2,03
8	22 157 560	22 794 655	637 095	239 190	430 676	669 866	0,55	— 0,55	2,29	2,84	1,74
9	23 959 459	24 721 336	761 877	164 520	447 669	612 189	0,68	— 0,68	2,30	2,98	1,62
10	25 559 040	26 046 306	487 266	99 760	465 628	565 388	0,49	— 0,49	2,49	2,98	2,00
11	27 432 302	27 545 744	113 742	66 777	488 953	555 730	0,11	— 0,11	2,46	2,57	2,35
12	28 803 695	28 806 083	2 688	38 407	508 441	546 848	0,00	— 0,00	2,43	2,43	2,43
13	29 659 544	29 518 827	— 140 717	4 686	521 953	526 639	— 0,14	0,14	2,47	2,33	2,61
14	29 957 095	29 659 957	— 297 138		526 871	526 871	— 0,29	0,29	2,48	2,19	2,77

— 155 —

TABLEAU N° 8.

Coefficients de travail pour la surcharge totale.
Q = 242,712 kilos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
NUMÉROS des SECTIONS	MOMENT $Q\,y$	MOMENT μ'	MOMENT TOTAL $\mu = \mu' - Qy$	N'	$Q \cos \alpha$	$N = N' + Q\cos\alpha$	COEFFICIENT $\frac{v\mu}{I}$	COEFFICIENT $-\frac{v\mu}{I}$	COEFFICIENT $\frac{N}{\Omega}$	COEFFICIENTS TOTAUX R_e	R_i	COEFFICIENTS TOTAUX R_e	R_i
							kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg
1	722 918	563 129	- 159 789	204 002	144.837	348 839	- 0,46	0,46	1,00	0,54	1,46	3,19	3,95
2	2 103 462	1 667 750	- 435 712	199 865	150 001	349 806	- 0,75	0,75	0,97	0,22	1,72	2,73	3,97
3	3 443 723	2 806 700	- 637 023	195 091	155 600	350 691	- 0,91	0,91	1,03	0,12	1,94	2,70	4,22
4	4 829 366	4 065 140	- 764 226	189 190	162 130	351 320	- 0,88	0,88	1,04	0,16	1,92	2,64	4,11
5	6 251 660	5 463 403	- 788 257	181 703	169 755	351 458	- 0,80	0,80	1,09	0,29	1,89	2,82	4,08
6	7 643 003	6 963 358	- 679 650	172 431	178 350	350 781	- 0,63	0,63	1,14	0,51	1,77	3,11	3,91
7	8 970 400	8 565 008	- 405 392	160 984	187 837	348 821	- 0,38	0,38	1,19	0,81	1,57	3,56	3,60
8	10 207 260	10 268 326	61 066	146 445	198 399	344 844	0,05	- 0,05	1.18	1,23	1,13	4,07	2,87
9	11 037 330	11 443 094	405 764	99 178	206 226	305 404	0,36	- 0,36	1.14	1,50	0,78	4,48	2,40
10	11 774 210	12 216 930	442 720	57 074	214 450	271 574	0,45	- 0,45	1,20	1,65	0,75	4,63	2,75
11	12 637 150	13 153 367	516 217	45 431	225 246	270 677	0,50	- 0.50	1,20	1,70	0,70	4,27	3,05
12	13 268 910	14 094 063	825 153	31 977	234 220	266 197	0,77	- 0,77	1,17	1,94	0,40	4,37	2,83
13	13 663 160	14 569 700	906 540		240 440	240 440	0,89	- 0,89	1,12	2,01	0,23	4,34	2,84
14	13 800 700	14 569 700	769 000		242 712	242 712	0,76	- 0,76	1,13	1,89	0,37	4,08	3,14

— 156 —

TABLEAU N° 9

Calcul des coefficients dans le cas de la surcharge centrale.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
NUMÉROS des SECTIONS	MOMENT Qy	MOMENT μ'	MOMENT TOTAL $\mu = \mu' - Qy$	N'	$Q \cos \alpha$	$N = N' + Q\cos\alpha$	COEFFICIENT $\frac{v\mu}{I}$	COEFFICIENT $\frac{-v\mu}{I}$	COEFFICIENT $\frac{N}{\Omega}$	COEFFICIENTS TOTAUX R_e	R_i	COEFFICIENTS TOTAUX R_e	R_i
				Kg.	Kg.	Kg.	Kg.	Kg.	Kg.	Kg.	Kg.	Kg.	Kg.
1	496 957	368 400	- 128 557	133 460	99 568	233 028	- 0,37	0,37	0,67	0,30	1,64	2,95	3,53
2	1 445 988	1 091 060	- 354 928	130 753	103 117	233 870	- 0,61	0.61	0,65	0,04	1,26	2,55	3,51
3	2 367 324	1 836 135	- 531 189	127 630	106 984	234 614	- 0,75	0,75	0,69	- 0,06	1,44	2,52	3,72
4	3 319 858	2 659 457	- 660 401	123 770	111 455	235 225	- 0,76	0,76	0,69	- 0,07	1,45	2,41	3,63
5	4 297 588	3 574 216	- 723 872	118 872	116 699	235 571	- 0,74	0,74	0,73	- 0,01	1,47	2,52	3,66
6	5 254 044	4 555 505	- 698 539	112 806	122 609	235 415	- 0,66	0,66	0,77	0,11	1,43	2,71	3,57
7	6 166 535	5 603 321	- 563 214	105 320	129 136	234 456	- 0,52	0,52	0,81	0,29	1,34	3,04	3,37
8	7 016 790	6 717 690	- 299 100	95 806	136 389	232 195	- 0,26	0,26	0,80	0,54	1,06	3,38	2,80
9	7 587 412	7 520 990	- 66 422	76 002	141 770	217 772	- 0,06	0,06	0,81	0,75	0,87	3,73	2,49
10	8 093 965	8 222 305	128 340	57 073	147 460	204 533	0,13	- 0,13	0,90	1,03	0,77	4,01	2,77
11	8 687 184	9 154 753	467 568	45 431	154 844	200 270	0,45	- 0,45	0,88	1,33	0,43	3,90	2,78
12	9 121 471	10 099 405	977 934	31 977	161 016	192 993	0,92	- 0,92	0,85	1,77	0,07	4,20	2,36
13	9 392 500	10 575 069	1 182 569		165 295	165 295	1,17	- 1 17	0,77	1,94	- 0,40	4,27	2,21
14	9 486 727	10 575 069	1 088 342		166 852	166 852	1,09	- 1 09	0,77	1,86	- 0.32	4,05	2,45

— 157 —

TABLEAU N° 10

Calcul des coefficients dans le cas de la demi-surcharge Q = 121 310

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Nos des SECTIONS	MOMENT $Q\,y$	MOMENT M'	MOMENT TOTAL $M = \mu' - Q\,y$	N'	$Q \cos \alpha$	$N = N' + Q \cos \alpha$	COEFFICIENT $\frac{v\,\mu}{I}$	COEFFICIENT $\frac{-v\,\mu}{I}$	COEFFICIENT $\frac{N}{\Omega}$	COEFFICIENTS TOTAUX R_e	R_i	COEFFICIENTS TOTAUX avec charge permanente R_e	R_i
1	361 322	366 543	5 221	132 788	72 391	205 179	0,01	— 0,01	0,59	0,60	0,58	3,25	3,07
2	1 051 334	1 085 562	34 228	130 095	74 972	205 067	0,06	— 0,06	0,57	0,63	0,51	3,14	2,76
3	1 721 210	1 826 923	105 713	126 990	77 783	204 773	0,15	— 0,15	0,60	0,75	0,45	3,33	2,73
4	2 413 768	264 605	332 289	123 147	81 034	204 181	0,27	— 0,27	0,60	0,87	0,33	3,35	2,51
5	3 124 645	3 586 205	431 563	113 273	84 846	203 119	0,44	— 0,44	6,63	1,07	0,19	3,60	2,38
6	3 820 037	4 532 552	712 495	112 239	89 142	201 381	0,67	— 0,67	0,66	1,33	— 0,01	3,93	2,13
7	4 483 501	5 575 090	1 001 589	104 787	93 889	198 676	1,01	— 1,01	0,68	1,69	— 0,33	4,44	1,70
8	5 101 698	6 683 820	1 582 122	95 323	99 162	194 485	1,38	— 1,38	0,67	2,05	— 0,71	4,89	1,03
9	5 516 578	7 440 074	1 893 496	52 885	103 074	155 359	1,68	— 1,68	0,58	2,28	— 1,10	5,26	0,51
10	5 884 876	7 698 494	1 809 618	15 368	107 209	122 577	1,85	— 1,85	0,54	2,39	— 1,31	5,37	0,69
11	6 310 188	7 949 570	1 633 382	12 233	112 580	124 813	1,56	— 1,56	0,55	2,11	— 1,01	4,68	1,34
12	6 631 946	8 203 943	1 571 997	8 610	117 067	125 677	1,48	— 1,48	0,55	2,03	— 0,93	4,46	1.50
13	6 829 003	7 981 455	1 152 452	— 11 641	120 178	108 537	1,14	— 1,14	0,51	1,65	— 0,63	3,98	1,98
14	6 897 513	7 279 734	382 392	0	121 310	121 310	0,38	— 0,38	0,57	0,95	— 0,19	3,14	2,58
13'	6 829 003	6 578 192	— 250 841	11 641	120 178	131 819	— 0,25	0,25	0,62	0,37	0,87	2,70	3,48
12'	6 631 946	5 881 554	— 750 392	23 265	117 067	140 332	— 0,71	0,71	0,62	— 0,09	1,33	2,34	3,76
11'	6 316 188	5 194 280	— 1 121 910	33 053	112 580	145 633	— 1,09	1,09	0,64	— 0 45	1,73	2,12	4,08
10'	5 884 876	4 515 880	— 1 368 999	41 524	107 209	148 733	— 1,39	1,39	0,66	— 0,73	2,05	2,25	4,05
9'	5 516 578	4 032 255	— 1 484 324	46 788	103 074	149 862	— 1 32	1,32	0,56	— 0,76	1,88	2,22	4,50
8'	5 101 698	3 584 129	— 1 517 570	51 116	99 162	150 278	— 1 32	1,32	0,52	— 0.80	1,84	2,04	3,58
7'	4 483 501	2 989 514	— 1 493 916	56 191	93 889	150 080	— 1 38	1,38	0,52	— 0,86	1,90	1,89	3,93
6'	3 820 057	2 430 533	— 1 389 529	60 186	89 142	149 328	— 1 31	1,31	0,49	— 0,82	1,80	1.78	3,94
5'	3 124 645	1 906 979	— 1 217 666	63 423	84 846	148 269	— 1,24	1,24	6,46	— 0,78	1,70	1,75	3,89
4'	2 413 768	1 418 920	— 994 848	66 036	81 034	147 070	— 1,14	1,14	0,44	— 0,70	1.58	1,78	3,76
3'	1 721 210	979 665	— 741 545	68 096	77 783	145 879	— 1,06	1,06	0,43	— 0,63	1,49	1,95	3,77
2'	1 051 334	582 121	— 467 871	69 762	74 972	144 734	— 0,81	0,81	0,40	— 0,41	1,21	2.10	3,40
1'	361 322	196 554	— 164 767	71 206	72 401	143 597	— 0,47	0,47	0,41	— 0,06	0,88	2,59	3 37

— 158 —

Tableau 13. Arc central. Contraintes dans les membrures pour les différents cas de charge (Eiffel, 1888a, p. 155-158)

<u>Exemple pour la section 3</u>

Les efforts internes, dans la section 3, dus aux charges verticales ont été démontrés précédemment (§4.2.2.2). Ils avaient pour valeur :

$$\begin{cases} N' = 488\,210\ kg \\ P' = 407\,930\ kg \\ \mu' = 7\,580\,926\ kg \end{cases}$$

Coefficients de travail pour la charge permanente.

$Q = 526\ 871$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
NUMÉROS des SECTIONS	MOMENT Qy	MOMENT M'	MOMENT TOTAL $M = M' - Qy$	N'	$Q \cos \alpha$	$N = N' + Q \cos \alpha$	COEFFICIENT $\frac{v\mu}{I}$	COEFFICIENT $-\frac{v\mu}{I}$	COEFFICIENT $\frac{N}{\Omega}$	COEFFICIENTS TOTAUX R_e	R_i
				kg	*kg*	*kg*	*kg*				
1	1 569 285	1 596 727	27 442	578 450	314 406	892 856	0,08	— 0,08	2,57	2,65	2,49
2	4 566 127	4 639 649	73 522	533 770	325 617	859 387	0,13	— 0,13	2,38	2,51	2,25
3	7 475 509	7 580 926	105 417	488 210	337 824	826 034	0,15	— 0,15	2,43	2,58	2,28
4	10 483 415	10 614 659	131 244	440 390	351 945	792 335	0,15	— 0,15	2,33	2,48	2,18
5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	391 080	368 500	759 580	0,17	— 0,17	2,36	2,53	2,19

— 155 —

Tableau 14. Arc central. Contraintes dans les membrures. Exemple de la section 3, pour la charge permanente

Le bras de levier y pour la poussée vaut $y = 14{,}1885\ m$ (Figure 61).

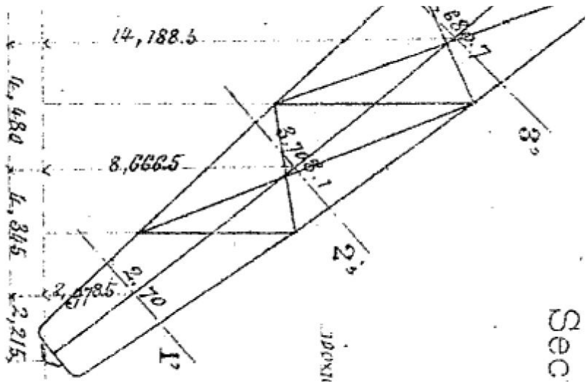


Figure 61. Arc central. bras de levier y pour la poussée, dans la section 3 (Eiffel, 1888a, p. Planche 181)

Le moment fléchissant dû à la poussée Q, dans la section 3, a bien pour valeur

$$Q.y = 526\,871 \times 14{,}1885 = 7\,475\,509\ kg.m$$

C'est bien la valeur du mémoire (Tableau 14).

Sur la Figure 59 on voit que ce moment est négatif. Le moment μ (M dans le tableau) a donc bien pour expression

$$M = M' - Q.y$$

Avec $M' = \mu'$ (ce changement de notation n'est pas expliqué).

Finalement,

$$M = 7\,580\,926 - 7\,475\,509 = 105\,417\ kg.m$$

Pour la section 3, on a vu que

$$\alpha = 0,875$$

Par conséquent, l'effort normal total dans la section a pour valeur

$$N = N' + Q.\cos\alpha = 488\,210 + 526\,871.\cos 0,875 = 825\,933\ kg$$

Le mémoire indique une valeur de $826\,034\ kg$.

La contrainte normale maximale de flexion est donnée par

$$\frac{\nu.\mu}{I}$$

C'est la formule usuelle $M_f.y/I_z$ avec les notations du mémoire.

Le moment I et la hauteur ν sont fournis en planche 181 du mémoire (Figure 62). On a

$$I = 1,6886\ m^4$$

Et

$$\nu = \frac{4,6807 + 2 \times 0,066}{2} = 2,4063\ m$$

$0,066$ est l'épaisseur de semelle supplémentaire en haut et en bas de la section.

On obtient une contrainte maximale normale de flexion de

$$\frac{2,4063.10^3 \times 105417.10^3}{1,6886.10^{12}} = 0,15\ kg/mm^2$$

La contrainte normale due à l'effort de compression a pour valeur

$$\frac{N}{\Omega} = \frac{825933}{338096} = 2,44\ kg/mm^2$$

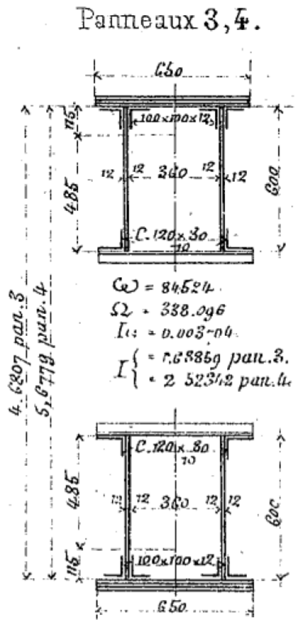


Figure 62. Arc central. Section 3.

Remarque

On voit que le terme $\frac{N}{\Omega}$ dû à l'effort normal est bien supérieur au terme $\frac{\mu.v}{I}$ dû à la flexion. C'était là tout l'objectif d'une arche centrale parabolique, tel que décrit par Eiffel : « *Cette forme parabolique […] offre l'avantage de faire passer les courbes des pressions par des points très voisins des centres de gravité des sections transversales de l'arc et de ne donner lieu qu'à des moments fléchissants très faibles, de manière à faire prédominer de beaucoup les efforts à la compression* » (Eiffel, 1888b, p. 547). Eiffel écrit également « *pour que l'arc travaille dans son entier à des efforts de compression […], il est nécessaire que le tracé de la fibre moyenne se rapproche le plus possible de cette courbe. C'est ce qui a fait adopter pour fibre moyenne une parabole du 2^e degré* » (Eiffel, 1880, p. 416).

On sait qu'en toute rigueur, c'est la forme appelée « chainette » qui permet à un arc de ne reprendre que des efforts normaux dus à son poids propre (Ringot et al., 2023, p. 85), mais une forme parabolique se rapproche beaucoup d'une chainette.

Pour plus de détails, voir https://www.youtube.com/watch?v=6yc3aFVprtU.

4.4.2 Contraintes (coefficients de travail) dans les treillis

L'article suppose que les efforts dans les treillis proviennent des efforts tranchants P, donnés par

$$P = P' - Q.\sin\alpha$$

Les sections des treillis sont données ci-dessous (Tableau 15).

Eiffel projette ces sections sur la section droite cisaillée par l'effort tranchant P (Figure 63).

<u>Exemple de la section 3</u>

La section projetée est estimée à 25 000 mm².

Pour la charge permanente seule, on a vu que $P' = 407\,930\,kg$ et $Q = 526\,871\,kg$ donc $P = 407\,930 - 526871 \times \sin 0{,}875 = 3\,534\,kg$. Le mémoire indique une valeur de $3\,618\,kg$.

Eiffel somme ensuite la contrainte due à la charge permanente et la contrainte due au cas de surcharge le plus pénalisant (souligné dans le tableau).

NUMÉROS DES SECTIONS	BARRES INTÉRIEURES		BARRES EXTÉRIEURES	
	COMPOSITION DES BARRES	SECTION D'UNE BARRE	COMPOSITION DES BARRES	SECTION D'UNE BARRE
		mm^2		mm^2
2	140×90 / 12 ; 353×10	14 114	140×90 / 12	10 464
3	140×90 / 10 ; 353×8	11 720	140×90 / 10	8 800
4	140×90 / 10	8 800	140×90 / 11	9 636
5 6 9	140×90 / 10	8 800	140×90 / 10	8 800
7 13	140×90 / 13	11 284	140×90 / 13	11 284
8 10	140×90 / 15	12 900	140×90 / 15	12 900
11 12	140×90 / 10	8 800	140×90 / 12	10 464
14	140×90 / 12	10 464	140×90 / 12	10 464

Tableau 15. Arc central. Sections dans les barres de treillis (Eiffel, 1888a, p. 129)

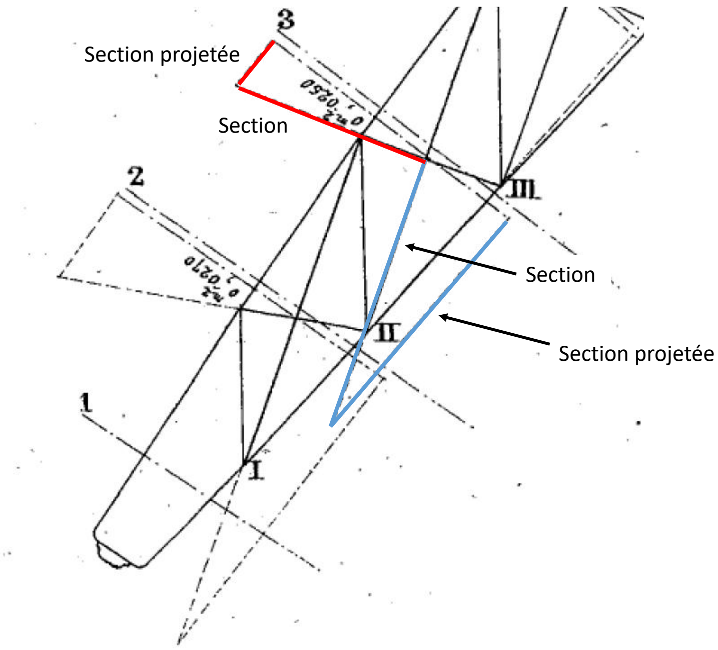


Figure 63. Arc central. Projection de la section des barres de treillis sur la section droite cisaillée (Eiffel, 1888a, p. Planche 182)

TABLEAU N° 11

Efforts tranchants produits par les charges verticales et coefficients de travail qui en résultent pour les barres de treillis.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
NUMÉROS DES SECTIONS	EFFORTS TRANCHANTS					Sections projetées des Barres du Treillis	COEFFICIENTS DE TRAVAIL		
	CHARGE PERMANENTE	SURCHARGE TOTALE	SURCHARGE CENTRALE	DEMI-SURCHARGE CÔTÉ CHARGÉ	CÔTÉ DÉCHARGÉ		Charge permanente	Surcharge donnant le maximum	Coefficient total
	Kg.	*Kg.*	*Kg.*	*Kg.*	*Kg.*	*mm².*	*Kg.*	*Kg.*	*Kg.*
1	7 381	—43 050	—34 635	1 409	44 388	129 600	0,06	—0,34	0,28
2	5 407	—33 691	—28 380	6 902	—40 527	27 000	0,20	—1,50	—1,30
3	3 618	—23 243	—21 395	13 014	—36 193	25 000	0,14	—1,45	—1,31
4	3 229	—10 795	—13 063	20 266	—30 999	25 500	0,13	—1,22	—1,09
5	6 145	4 340	—2 924	29 037	—24 638	25 000	0,24	—1,16	—0,92
6	12 665	22 196	9 052	39 323	—17 071	25 000	0,51	1,57	2,08
7	22 224	43 073	23 070	51 260	—8 137	33 000	0,67	1,55	2,22
8	35 934	68 003	39 843	65 391	2 657	38 500	0,93	1,70	2,63
9	—12 680	31 849	34 502	20 293	11 437	39 000	—0,42	1,15	0,73
10	—58 133	—5 784	29 715	—27 741	21 658	39 000	—1,49	—0,71	—2,20
11	—29 981	22 784	51 042	—14 708	37 166	29 500	—1,01	—0,50	—1,51
12	— 3 227	54 069	73 958	112	53 829	29 500	0,11	2,50	2,61
13	—37 763	—33 085	22 744	—101 137	68 065	35 000	—1,08	—2,89	3,97
14	0	0	0	—85 398	85 398	32 500		±2,63	2,63

Les efforts donnant le maximum sont soulignés.

— 159 —

Tableau 16. Arc central. Contraintes dans les barres de treillis sous l'action des charges verticales (Eiffel, 1888a, p. 159)

5 Influence de la température

5.1 Problématique

« *L'effet d'une variation de température tend à augmenter ou à diminuer la longueur de la corde ; mais, comme celle-ci est rendue fixe par la nature même de la construction, l'effet de cette variation est de donner naissance à une poussée qui est précisément égale à celle qu'il faudrait appliquer à l'arc pour le ramener dans sa position primitive, si ses extrémités étaient libres de se mouvoir. Cette poussée modifie le travail de l'arc en même temps qu'elle intervient comme un nouvel élément de déformation.* » (Eiffel, 1888a, p. 130)

Par « travail », il faut comprendre les efforts dans l'arc.

La problématique des variations de température de l'arc est une problématique classique de dilatation bloquée d'un barreau (Figure 64).

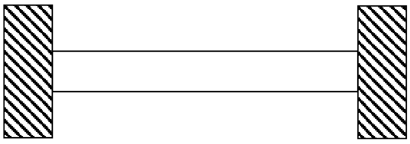


Figure 64. Dilatation thermique bloquée d'un barreau

Soit un barreau de longueur initiale L_0 et de coefficient de dilatation thermique α. Sous une variation de température ΔT, le barreau prend la longueur L. La déformation ε_{th} du barreau est telle que

$$\varepsilon_{th} = \frac{L - L_0}{L_0} = \alpha.\Delta T$$

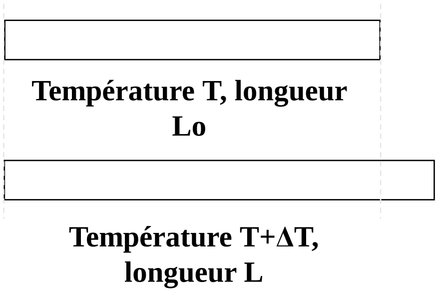


Figure 65. Dilatation thermique libre d'un barreau

Dans le cas d'un barreau dont la dilatation serait empêchée, la déformation totale ε est nulle. Or ε est la somme de la déformation due à la dilatation thermique et de la déformation mécanique ε_m imposée par les appuis.

$$\varepsilon = \varepsilon_{th} + \varepsilon_m = 0$$

En supposant que le barreau reste dans le domaine élastique, et pour une élasticité linéaire, alors

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma}{E}$$

Avec σ contrainte dans le barreau et E module d'élasticité du barreau.

Donc on a

$$\varepsilon_{th} + \varepsilon_m = \alpha.\Delta T + \frac{\sigma}{E}$$

et la contrainte normale dans le barreau a pour expression :

$$\sigma = -E.\alpha.\Delta T$$

On voit que pour une variation de température ΔT positive, alors la contrainte dans la barreau est négative : le barreau subit de la compression. Sur des structures réelles, ces contraintes de compression peuvent mener à la ruine par déformation plastique ou par flambement. Pour donner un exemple, un barreau d'acier $E = 210\ 000\ MPa$, de longueur $L_0 = 1\ m$, pour une variation de température de 10°C, subit une contrainte de compression σ de $25\ MPa$.

Reprenons le cas de l'arc.

Selon Eiffel, « *Pour une variation de 1 degré, la corde s'allongerait de 0,000012 par mètre.* ». On retrouve le coefficient de dilatation du fer (Murry, 1993). En effet, soit α ce coefficient, alors $\alpha = 12 \times 10^{-6}\ K^{-1}$.

« Nous estimons que l'arc ne subira jamais une variation de plus de 30 degrés en dessus ou en dessous de la température à laquelle sera fait le montage de l'arc à l'atelier » (Eiffel, 1888a, p. 130). L'allongement de la corde de $165\ m$, pour une augmentation de température ΔT de 30 degrés, est donné par $\Delta L = \alpha.\Delta T = 12 \times 10^{-6} \times 30 \times 165 = 59{,}4\ mm$. C'est bien le résultat indiqué dans le mémoire (Eiffel, 1888a, p. 130).

La poussée qui compense cet allongement est donnée par

$$Q = \frac{0{,}0594}{\int \frac{\cos\alpha\,.\,dx}{E\Omega} - \int_{O}^{O'} \frac{\sin\alpha\,.\,dy}{E.\sum(sin^2\beta.cos\beta.\omega)} + \int_{O}^{O'} \frac{y^2 ds}{EI}}$$

Le dénominateur est celui déterminé précédemment pour le calcul de la poussée due aux charges et surcharges. Il a pour valeur $0{,}00000489038\ m/kg$ donc

Nota : le mémoire indique 9760 kg (Eiffel, 1888a, p. 131).

Le tableau 12 du mémoire fournit les contraintes dans les membrures induites par cette poussée. Les contraintes sont en moyenne de $0{,}50\ kg/m^2$. Il ne semble pas qu'Eiffel additionne ces contraintes aux contraintes calculées pour les effets des charges et du vent.

1	2	3	4	5	6	7
NUMÉROS des SECTIONS	MOMENT Q Y	COEFFICIENT de TRAVAIL	N = Q cos. α	COEFFICIENT R dû aux EFFORTS N	COEFFICIENTS TOTAUX R_e	R_i
1	36 177	0,10 *kg*	7 231	0,02 *kg*	± 0,12 *kg*	± 0,12 *kg*
2	105 266	0,18	7 507	0,02	0,20	0,20
3	172 338	0,25	7 788	0,03	0,28	0,28
4	241 681	0,28	8 113	0,03	0,31	0,31
5	312 859	0,32	8 495	0,03	0,35	0,35
6	382 487	0,36	8 925	0,03	0,39	0,39
7	448 902	0,41	9 401	0,03	0,44	0,44
8	510 813	0,44	9 929	0,03	0,47	0,47
9	552 354	0,49	10 320	0,04	0,53	0,53
10	589 230	0,60	10 734	0,05	0,65	0,65
11	632 420	0,61	11 269	0,05	0,66	0,66
12	664 030	0,62	11 721	0,05	0,67	0,67
13	683 760	0,68	11 759	0,05	0,73	0,73
14	690 630	0,69	12 146	0,05	0,74	0,74

Figure 66. Arc central. Contraintes dans les membrures dues à une variation de température de 30°C (Eiffel, 1888a, p. 160)

5.2 Modélisation ABAQUS

L'augmentation de température sur ABAQUS est obtenue en utilisant un « predefined field ». A step « initial » on applique T=0°C et à la step « temperature » on applique T=30°C.

Le coefficient de dilatation fourni pour le matériau est de 12.10^{-6} /K comme dans l'article.

Une augmentation de température de 30°C donne bien un déplacement en x de 59,4mm.

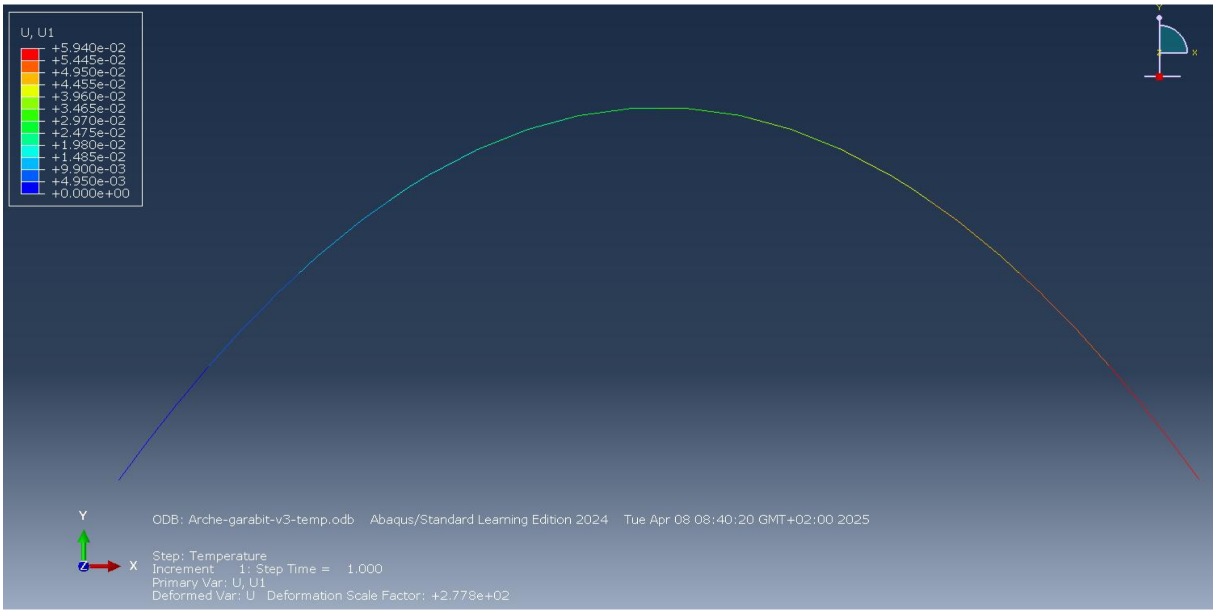


Figure 67. Modèle ABAQUS de l'arche avec appui glissant à droite. Déplacement horizontal pour une augmentation de température de 30°C

En bloquant l'appui gauche et l'appui droit en x et y, l'augmentation de température de 30°C donne une poussée Q (RF1 sur Abaqus) de 13 221 kg. La poussée Q de l'article est de 12146 kg.

$$\frac{13221 - 12146}{12146} = 9\%$$

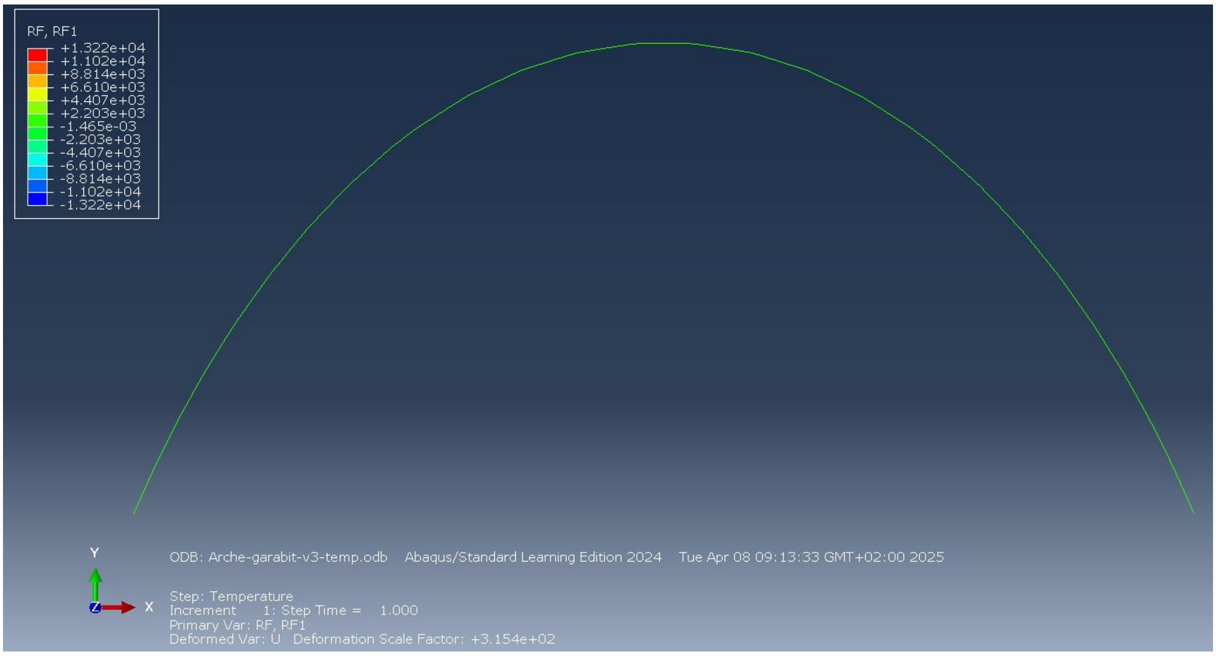


Figure 68. Résultat ABAQUS pour le calcul de la poussée pour une variation de température de 30°C

En libérant l'appui de droite suivant l'axe x et en appliquant un déplacement de 0,0594m, on obtient une réaction d'appui de 13 136 kg. Soit une erreur de

$$\frac{13136 - 12146}{12146} = 8\%$$

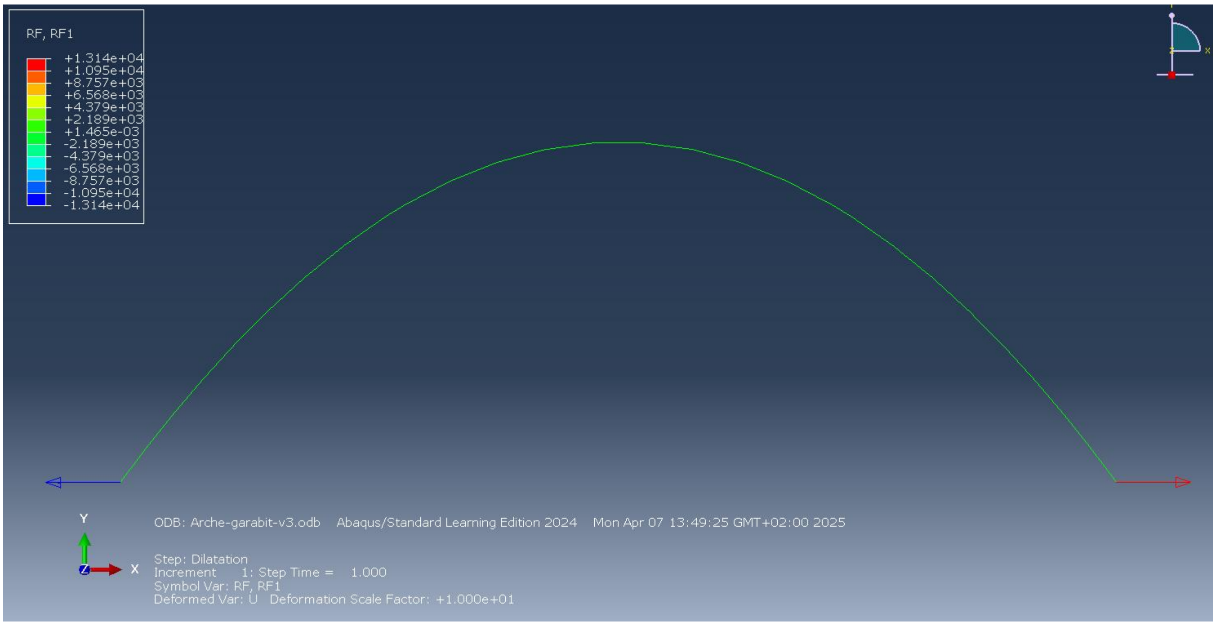


Figure 69. Résultat ABAQUS pour le calcul de la poussée pour un déplacement de 0,0594m

En appliquant un effort en x de 1kg, on obtient un déplacement horizontal de $4{,}522 \times 10^{-6}\ m$ (Figure 70). La raideur de l'arche est donc de $4{,}522 \times 10^{-6}\ m/kg$, à comparer avec le dénominateur de l'article qui vaut $4{,}890\ \times 10^{-6} m/kg$.

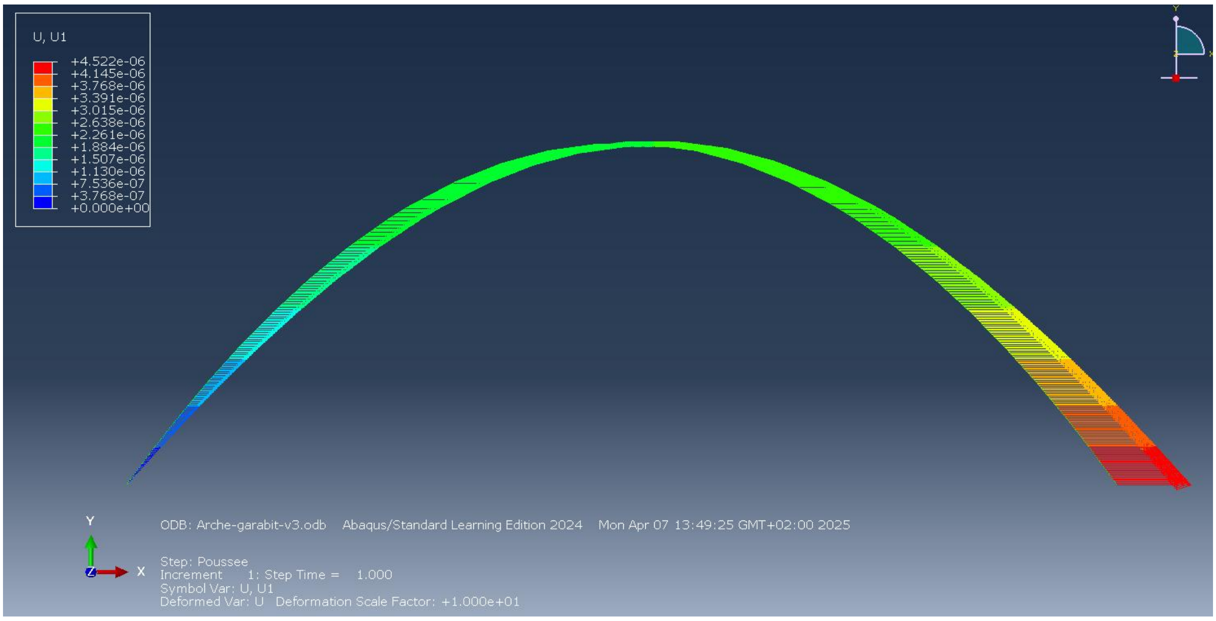


Figure 70. Résultat ABAQUS, raideur de l'arche (déplacement horizontal pour un effort unitaire)

6 Effets du vent

6.1 Description générale du problème

Le vent, effort horizontal suivant l'axe z, entraine de la flexion, de la torsion et du cisaillement dans l'arc. On présente en Figure 71

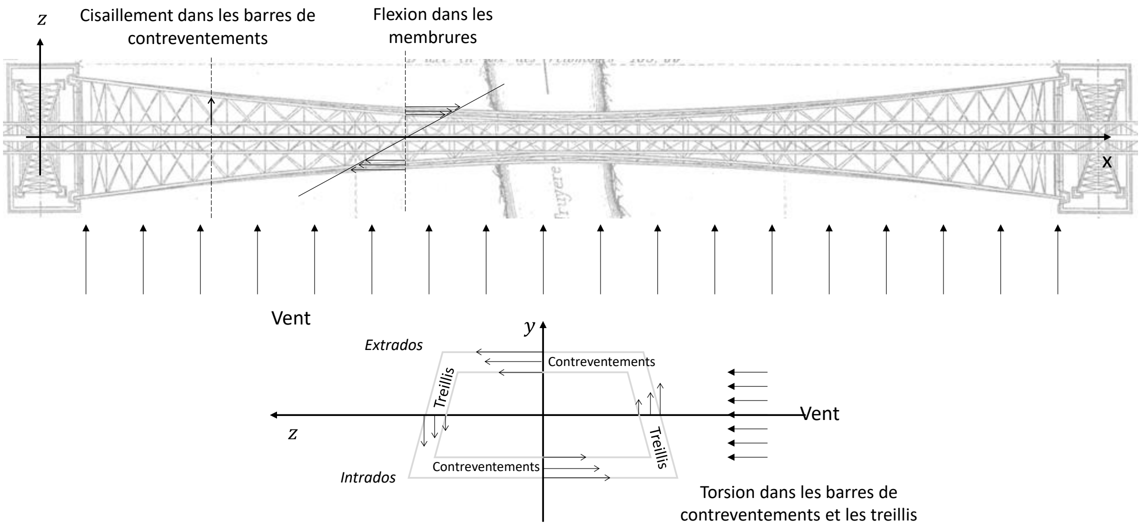


Figure 71. Arc. Sollicitations et profil des contraintes sous les effets du vent

6.2 Hypothèses admises sur les intensités du vent

« *Le maximum de l'effort du vent généralement admis est de 270kg par mètre carré ; mais comme sous l'effet d'un vent produisant une pression de 160 à 170 kg par mètre carré les wagons seraient renversés, nous admettons que les trains ne pourront plus circuler sur le pont dès que le vent atteindre une intensité supérieure à 150 kg par mètre carré.*

Nous examinerons donc dans ce calcul les deux cas suivants :

1° Le pont ne porte aucune surcharge et subit un effort du vent de 270kg par mètre carré ;

2° Le pont porte un train s'étendant sur toute la longueur du tablier comprise entre les deux grandes piles et ne subit plus alors qu'un effort de 150kg par mètre carré » (Eiffel, 1888a, p. 131).

6.3 Surfaces présentées au vent et efforts qui en résultent

Eiffel suppose que le vent agit sur toute la surface de la paroi orientée du côté où le vent souffle. Cependant, pour la paroi opposée, il estime que les membrures de cette paroi sont protégées du vent par les membrures de la paroi orientée du côté où le vent souffle. Pour la paroi opposée, il considère donc seulement la surface des barres de treillis. On voit en effet, sur la figure ci-dessous, que la surface offerte au vent par les membrures est plus grande que la surface des barres de treillis.

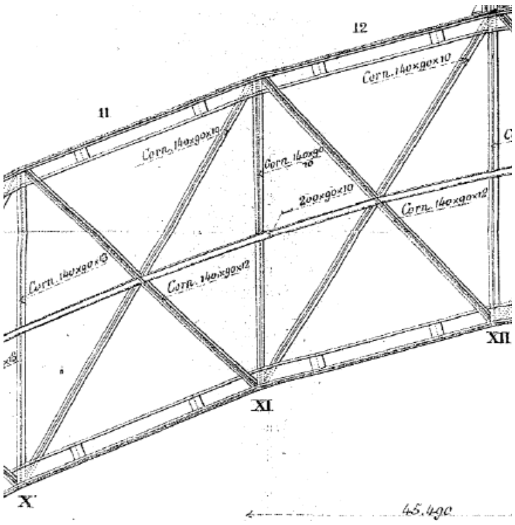


Figure 72. Arc central. Surfaces offertes au vent par panneaux (Eiffel, 1888a, p. Planche 175)

Sous cette hypothèse, les surfaces offertes au vent par les panneaux sont données dans le tableau ci-dessous.

0 — I	22,30 m^2
I — II	21,74
II — III	23,96
III — IV	27,08
IV — V	29,90
V — VI	31,15
VI — VII	32,33
VII — VIII	34,79
VIII — IX	27,52
IX — X	35,38
X — XI	32,80
XI — XII	31,95
XII — XIII	32,19
XIII — XIV	31,98

Figure 73. Arc central. Surfaces offertes au vent par panneaux (Eiffel, 1888a, p. 132)

Eiffel suppose ensuite que chaque montant (Figure 6) reprend la moitié des surfaces des deux panneaux adjacents au montant. Le tableau ci-dessous présente les surfaces par montants et les efforts dus au vent qui en découlent.

TABLEAU N° 13

Efforts du vent sur les différentes parties de l'arc.

NUMÉROS DES MONTANTS	SURFACE offerte AU VENT.	VENT SANS SURCHARGE — Effort total pour 270 kilogr. par mètre carré.	VENT SANS SURCHARGE — Effort sur l'intrados ou sur l'extrados.	VENT AVEC SURCHARGE — Effort total pour 150 kilogr. par mètre carré.	VENT AVEC SURCHARGE — Effort sur l'intrados ou sur l'extrados.
	mm²	kg	kg	kg	kg
1	22,02	5 945	2 972	3 303	1 651
2	22,85	6 169	3 084	3 427	1 713
3	25,52	6 890	3 445	3 828	1 914
4	28,53	7 703	3 851	4 279	2 139
5	30,57	8 254	4 127	4 585	2 292
6	31,74	8 570	4 285	4 761	2 380
7	33,56	9 061	4 530	5 034	2 517
8	31,15	8 410	4 205	4 672	2 336
9	31,45	8 491	4 245	4 717	2 358
10	34,09	9 204	4 602	5 113	2 556
11	32,37	8 740	4 370	4 855	2 427
12	32,07	8 659	4 329	4 810	2 405
13	32,08	8 662	4 331	4 812	2 406

Tableau 17. Arc. Tableau 13 du mémoire. Surfaces présentées au vent et efforts qui en résultent (Eiffel, 1888a, p. 161)

<u>Exemple : montant I</u>

$$Surface\ exposée = \frac{22{,}30 + 21{,}74}{2} = 22{,}02\ m^2$$

$$Effort\ vent = \ 22{,}02\ m^2 \times 270\ kg/m^2 = 5945\ kg$$

Aux efforts sur les panneaux de l'arc, il faut ajouter les efforts du vent sur les palées, les tabliers et le train.

Pour le train, Eiffel prend en compte le fait que les membrures « protègent » en partie le train du vent (Figure 74). La hauteur de train exposée au vent est ainsi de $1{,}44 + 0{,}16 = 1{,}60\ m$. La surface de train exposée au vent est donc de $1{,}60\ m^2$ par mètre de tablier, soit un effort vent de $1{,}60 \times 150 = 240\ kg$.

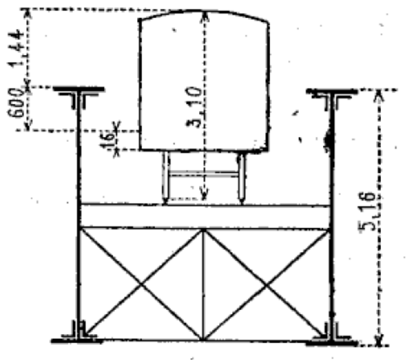


Figure 74. Surface de train exposée au vent (Eiffel, 1888a, p. 133)

Pour les tabliers latéraux, la surface exposée au vent par mètre courant de tablier est de $3{,}70\ m^2$. Pour le tablier central, la surface exposée au vent par mètre courant de tablier est de $3{,}42\ m^2$. Dans le cas du passage du train, l'effort vent correspondant est de $3{,}70 \times 150 = 555\ kg$ pour les tabliers latéraux et $3{,}42 \times 150 = 513\ kg$ pour le tablier central. Lors du passage du train, l'effort total sur les tabliers latéraux sont donc de $555 + 240 = 795\ kg$ pour les tabliers latéraux et $513 + 240 = 753\ kg$ pour le tablier central (le mémoire indique $750\ kg$).

Pour la descente des charges du vent du tablier vers l'arc, le raisonnement est identique à celui des piles métalliques : « *Le vent étant supposé agir d'une manière uniforme sur toute la longueur du tablier, exercera sur chacun de ses points d'appui des réactions horizontales analogues aux réactions verticales produites par les charges et proportionnelles à ces dernières* » (Eiffel, 1888a, p. 133). La démarche de calcul est identique à celle pour les piles métalliques. On donne ci-dessous l'exemple du tablier central calculé sur RSA.

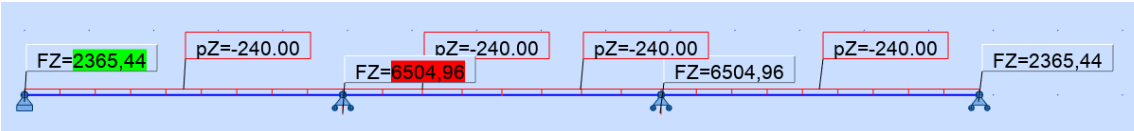


Figure 75. Tablier central. Action du vent sur le train, transmission aux palées et aux montants de l'arc lors du passage du train. On retrouve bien un effort sur le montant XIII de 6500 kg environ.

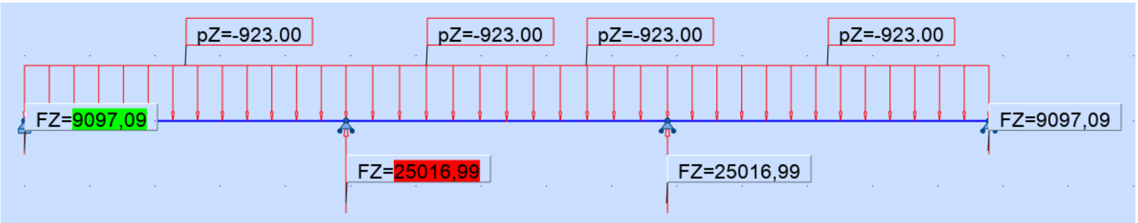


Figure 76. Tablier central. Efforts aux palées et aux montants de l'arc. On retrouve bien un effort sur les montants XII et XII' de 25000 kg environ et un effort d'environ 9100 kg sur les palées (montants VIII-IX et IX'-VIII').

L'ensemble des efforts vent est résumé ci-dessous.

Dans le cas du vent sans surcharges,

Réaction au-dessus de la palée :

Provenant du tablier latéral	19 405 *kg*
Provenant du tablier central	9 105
TOTAL	28 510 *kg*

Réaction sur l'appui au-dessus du montant XII :

Provenant du tablier central	25 008 *kg*

Dans le cas du vent avec surcharges,

Réaction au-dessus de la palée :

Action du vent sur les tabliers	15 838
Action du vent sur le train	7 029
TOTAL	22 867 *kg*

Réaction sur l'appui au-dessus du montant XII :

Action du vent sur les tabliers	13 900 *kg*
Action du vent sur le train	6 502
TOTAL	20 402 *kg*

Nous admettrons que l'effort du vent sur les palées ainsi que les réactions du palier au droit desdites palées vient se répartir également entre les montants VIII et IX sur lesquels les palées sont fixées.

L'ensemble des efforts vent est cartographié sur l'arc en planche 183 du mémoire (Eiffel, 1888a, p. Planche 183).

6.4 Décomposition des diverses actions du vent

Dans chaque section, le vent induit un moment de torsion, un moment de flexion et un effort tranchant (Figure 77).

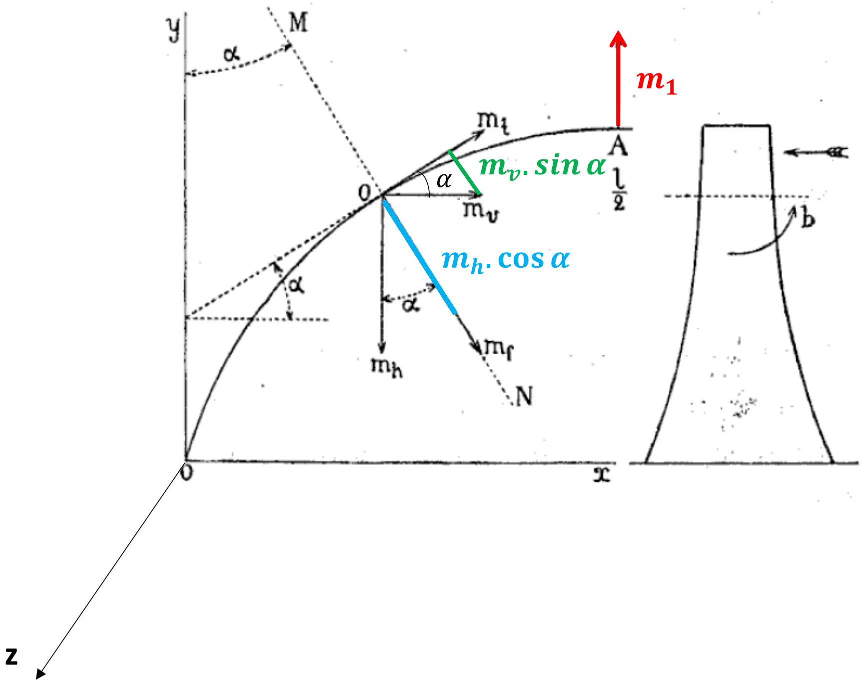


Figure 77. Moments sur une section de l'arche (Eiffel, 1888a, p. 135)

La Figure 77 présente les moments agissant sur une section quelconque MN de l'arche. Sur la section MN, et en étudiant les efforts extérieurs sur la partie à droite de la section, on voit que le vent crée un moment m_h suivant l'axe y et un moment m_v suivant l'axe x. On n'appelle pas ces moments moment fléchissant ou moment de torsion car ils ne sont ni orientés suivant la normale à la section MN ni normaux à la section MN. On appelle m_f et m_t le moment de flexion et le moment de torsion dans la section MN.

Si les efforts du vent sont orientés dans la direction de z et vers les z positifs,

- le moment m_v sera positif car sa direction est l'axe x et il fait tourner l'arche de y vers z
- le moment m_h sera négatif car sa direction est l'axe y et il fait tourner l'arche de x vers z

On a besoin de projeter m_h et m_v sur un repère relatif à la section MN, pour obtenir le moment fléchissant m_f et le moment de torsion m_t. Par projection et avec les conventions de signe de l'article,

$$\begin{cases} m_f = m_h.\cos\alpha - m_v.\sin\alpha \\ m_t = m_v.\cos\alpha + m_h.\sin\alpha \end{cases}$$

Pour éviter de calculer le moment induit par les efforts du vent sur la seconde moitié de l'arche, Eiffel isole la première travée (de O à la clef), et représente l'action de la seconde moitié de l'arche par un moment m_1.

Eiffel suppose que ce moment m_1 n'a pas de composante horizontale (le moment m_1 est considéré porté par y). En effet l'effort du vent sur le tablier et le train est transmis par les appuis B, C, D et E de la Figure 17, tous en dessus de la clef de l'arche (point le plus haut de l'arche). Par conséquent aucune torsion n'est appliquée à la clef de l'arche.

Connaissant les valeurs de m_1, Eiffel détermine finalement le moment fléchissant M_f total sur la section MN et M_t moment de torsion total sur la section MN avec les formules ci-dessous :

$$\begin{cases} M_f = m_f + m_1 . \cos\alpha \\ M_t = m_t + m_1 . \sin\alpha \end{cases}$$

Comme pour le calcul des efforts internes dus aux charges verticales, Eiffel se heurte au caractère hyperstatique de la structure. En effet, les actions extérieures sur la partie à droite de la section MN contiennent les réactions d'appui au point O', appui droit de l'arc. Or Eiffel considère que l'appui O' est encastré, du fait de l'action des charges verticales : « *Le moment à la clef* m_1 *est inconnu ; il serait facile de le déterminer si l'arc était libre aux naissances, mais cette dernière condition n'est pas remplie, car les retombées sont appliquées horizontalement sur leurs appuis par les poussées qui proviennent des charges. Nous avons donc affaire à une pièce qui pourra être assimilée à une pièce encastrée à ses extrémités, à la condition que le moment de flexion aux naissances ne dépasse pas le moment d'encastrement produit par les poussées. Il sera donc nécessaire de calculer par la théorie de l'élasticité le moment* m_1 *à la clef.* ».

Par des considérations sur la déformée de l'arc (ce qu'Eiffel appelle théorie de l'élasticité), Eiffel calcule le moment m_1 à la clef. Il détermine ensuite le moment fléchissant horizontal M_h aux naissances par la formule

$$M_h = m_h + m_1$$

Puis « *si la valeur trouvée pour* M_h *divisé par la distance des naissances est inférieure à la poussée, l'arc ne tend pas à se séparer de ses appuis, et tout se passera comme s'il était réellement encastré* » (Eiffel, 1888a, p. 137). Mais cherchons tout d'abord à calculer le moment fléchissant m_1 à la clef, nous statuerons ensuite sur la condition qui vient d'être énoncée.

6.5 Établissement de la formule du moment fléchissant à la clef dans le cas d'encastrement

De façon classique dans l'étude d'une structure hyperstatique, Eiffel calcule le moment m_1 à la clef en apportant une équation supplémentaire, par des considérations sur la cinématique de la structure. En l'occurrence, et « *d'après une indication […] fournie par M. l'Ingénieur Boyer* », Eiffel écrit que « *de l'origine O à la clef, la somme des rotations autour de l'axe des y est nulle. En effet, nous admettons que la section de l'arc aux naissances est fixe, et celle à la clef ne peut tourner autour de l'axe des y, à cause de la symétrie des charges.* » (Eiffel, 1888a, p. 137).

<u>Rotation due à la flexion</u>

« *La rotation dans le plan tangentiel à la fibre moyenne produite pour un élément de longueur ds, par un moment fléchissant* M_f*, est donnée par l'expression*

$$\frac{M_f . ds}{E . I}$$

I étant le moment d'inertie de la section, la rotation autour de l'axe des y sera $\frac{M_f . ds}{E . I} . \cos\alpha .$ »

On propose d'apporter un éclairage sur ces formules. Soit la loi de comportement en flexion d'une poutre d'axe x, soumise à un moment de flexion en z (Figure 78) :

$$M_f(x) = E.I.\frac{d\omega(x)}{dx}$$

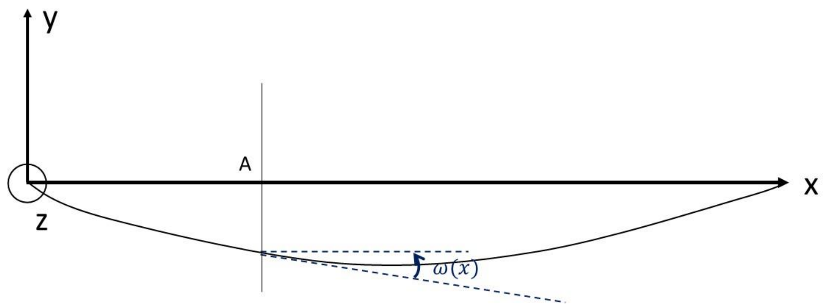


Figure 78. Poutre d'axe x, soumise à une flexion suivant z. En A, la rotation est $\omega(x)$

La rotation $\omega(x)$ de la section au point d'abscisse x est donc :

$$\omega(x) = \frac{1}{EI}.\int_{x}^{x+dx} M_f(x)dx = \frac{M_f.dx}{E.I}$$

Pour une abscisse curviligne on considère ds au lieu de dx donc la rotation a bien pour expression

$$\frac{M_f.ds}{E.I}$$

Dans l'arc, la rotation due à la flexion s'effectue suivant l'axe MN. On aura bien, à la clef, $\omega(x) = \frac{M_f.dx}{E.I}$ car l'axe MN et l'axe y coincident, mais dans les autres sections de l'arc, la rotation s'effectue suivant l'axe MN et la projection de cette rotation sur l'axe y est donnée par :

$$\frac{M_f.ds}{E.I}.\cos\alpha$$

<u>Rotation due à la torsion</u>

« L*a théorie de la torsion donne, pour la rotation d'une section sous l'influence d'un moment de torsion*

$$\theta = \frac{M_t.ds}{G.\Gamma}$$

M_t étant le moment de torsion ; Γ le moment d'inertie polaire ; ds la longueur de l'élément soumis à la torsion ; G quantité qui pour un corps plein, est le coefficient d'élasticité transversale et peut s'admettre égale à 1/3E. »

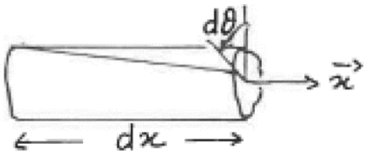
Le paramètre matériau G est aujourd'hui appelé le module de cisaillement (voir §4.2.4.1).

On rappelle que la loi de comportement d'une poutre en torsion a pour expression

$$M_t = G.\Gamma.\varepsilon(x)$$

$\varepsilon(x)$ est définie par :

$$\varepsilon(x) = \frac{d\theta}{dx}$$



Γ est aussi appelé moment quadratique polaire.

Mais Eiffel précise ensuite que « *l'expression ci-dessus n'est applicable qu'aux arcs à paroi pleine.* » (Eiffel, 1888a, p. 138). Il suppose que pour l'arc à treillis du viaduc, seules les barres de treillis s'opposent à la torsion ; il néglige la part de torsion reprise par les membrures de l'arc. Sous cette hypothèse, Eiffel détermine la rotation d'un élément d'arc de longueur Δs sous l'action d'un moment de torsion M_t. Pour cela, il décompose le moment M_t en quatre moments agissant dans les quatre faces de l'arc (Figure 79).

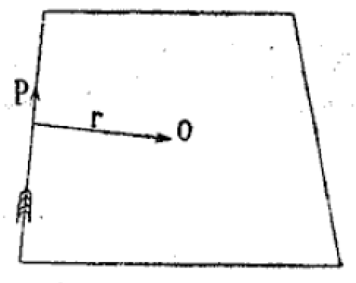


Figure 79. Arc. Moment de torsion. O est le centre de l'arc.

Eiffel décompose le moment M_t en quatre moments agissant dans les quatre faces. Le moment m_t repris par la face distante de la distance r du centre O est $m_t = P.r$ avec P force agissant sur la face étudiée.

On retrouve alors le même schéma que pour le déplacement des barres de treillis sous l'action de l'effort tranchant (voir Figure 38). Le déplacement λ produit par la force P a pour expression (Eiffel, 1888a, p. 139) :

$$\lambda = \frac{P.\Delta s}{E.\sum(sin^2\beta.\cos\beta\,.\,\omega)}$$

Dans le cas présent, on peut écrire

$$\lambda = \frac{m_t.\Delta s}{E.r.\sum(sin^2\beta.\cos\beta\,.\,\omega)}$$

La rotation θ est donnée par

$$\theta = \frac{\lambda}{r} = \frac{m_t.\Delta s}{E.r^2.\sum(sin^2\beta.\cos\beta.\omega)}$$

Il vient alors

$$m_t = \frac{\theta.E.r^2.\sum(sin^2\beta.\cos\beta.\omega)}{\Delta s}$$

Et

$$\sum m_t = M_t = \frac{\theta.E.\sum(r^2.\sum(sin^2\beta.\cos\beta.\omega))}{\Delta s}$$

Et

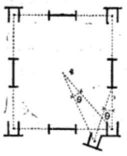
$$\theta = \frac{M_t.\Delta s}{E.\sum(r^2.\sum(sin^2\beta.\cos\beta.\omega))}$$

La rotation θ de la section considérée est la rotation autour de la fibre neutre de l'arc. La rotation de la section autour de l'axe des y a pour expression

$$\theta.\sin\alpha = \frac{M_t.\Delta s.\sin\alpha}{E.\sum(r^2.\sum(sin^2\beta.\cos\beta.\omega))}$$

Remarque : Eiffel étudie la torsion de l'arc pour calculer le moment m_1 à la clef mais il néglige les contraintes de torsion qui apparaissent dans les éléments de l'arc :

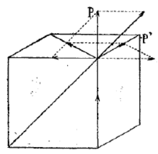
Remarque. — La torsion d'une section quelconque de l'arc produit, dans les sections partielles des différentes pièces qui la composent, des efforts de torsion et des efforts de tension.



Les premiers sont négligeables.

En effet, si l'on appelle Θ l'angle de torsion de la section considérée, chaque section partielle tournera du même angle autour de son centre de gravité particulier, ainsi que l'indique la figure ci-contre. Or, la distance des fibres extrêmes, d'une section partielle à son centre de gravité, étant une fraction très petite de sa propre distance au centre de gravité O de la section considérée, et les efforts de torsion étant proportionnels à ces distances, on voit que chaque section partielle, considérée isolément, n'éprouvera qu'un effort de torsion insignifiant.

Quant aux efforts de tension qui, ainsi que nous le verrons, prennent une grande importance dans les barres de treillis, ils sont à peu près nuls dans les membrures.



En effet, les forces P, qui agissent dans chaque face, se décomposent suivant les barres de treillis et suivant les membrures. Si l'on suppose que les barres de treillis sont inclinées à 45°, la force dans une membrure résultant de la décomposition de P est égale à la force P elle-même. Or, cette force est petite relativement à la section des membrures; de plus, elle est partiellement annulée par une force à peu près égale résultant d'une décomposition analogue des forces agissant dans la face contiguë. *(Voir la figure.)*

Il n'y a donc pas lieu de s'occuper de l'effet de la torsion sur les membrures.

Expression du moment fléchissant à la clef

On a déterminé la rotation d'une section autour de l'axe y.

On rappelle que l'hypothèse d'Eiffel, pour déterminer le moment m_1 à la clef, est que « *de l'origine O à la clef, la somme des rotations autour de l'axe des y est nulle.* » (Eiffel, 1888a, p. 137).

La somme des rotations est obtenue par :

$$\sum_{O}^{A} \frac{M_f.ds}{E.I}.\cos\alpha + \sum \frac{M_t.\Delta s.\sin\alpha}{E.\sum(r^2.\sum(sin^2\beta.\cos\beta\,.\,\omega))} = 0$$

Avec A point correspond à la clef de l'arc.

Or

$$\Delta s = \frac{\Delta x}{\cos\alpha}$$

Donc,

$$\sum_{O}^{A} \frac{M_f.\Delta\text{x}}{E.I} + \sum_{O}^{A} \frac{M_t.\Delta\text{x}.\tan\alpha}{E.\sum(r^2.\sum(sin^2\beta.\cos\beta\,.\,\omega))} = 0$$

Dans l'expression précédente, on peut remplacer M_f et M_t par les expressions ci-dessous, obtenues précédemment :

$$\begin{cases} M_f = m_f + m_1.\cos\alpha \\ M_t = m_t + m_1.\sin\alpha \end{cases}$$

Puis en isolant le moment à la clef m_1, il vient (Eiffel, 1888a, p. 140) :

$$m_1 = \frac{-\sum_O^A\left[\left(\frac{m_f}{I} + \frac{m_t.\tan\alpha}{\sum(r^2.\sum sin^2\beta.\cos\beta\,.\,\omega)}\right).\Delta x\right]}{\sum_O^A\left[\left(\frac{\cos\alpha}{I} + \frac{\sin\alpha\,.\tan\alpha}{\sum(r^2.\sum sin^2\beta.\cos\beta\,.\,\omega)}\right).\Delta x\right]}$$

6.6 Calcul numérique du moment fléchissant à la clef m_1

6.6.1 Calcul du dénominateur. Éléments géométriques (indépendants du vent)

Les éléments entrant dans l'expression du moment m_1 et ne dépendant pas du vent sont I moment d'inertie des membrures, et l'expression $\sum(r^2.\sum sin^2\beta.\cos\beta\,.\,\omega)$ qui dépend de la géométrie des contreventements de l'arc. Les éléments indépendants du vent dans l'expression de m_1 sont tabulés dans les tableaux 14 et 15 du mémoire. On propose d'apporter des détails sur ces éléments géométriques.

- Moment d'inertie I des membrures (tableau 14 du mémoire)

TABLEAU N° 14.

Valeurs des moments d'inertie à considérer pour le vent.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
NUMÉROS des SECTIONS	$2\,\omega_e$	v_e	$2\,\omega_e\,v_e^2$	$2\,\omega_i$	v_i	$2\,\omega_i\,v_i^2$	I	$\frac{I}{v_e}$	$\frac{I}{v_i}$
1	0,173 848	9,50	15,6 890	0,173 848	9,75	16,526	32,215	3,390	3,304
2	0,179 448	8,89	14,1 820	0,179 448	9,17	15,980	30,072	3,371	3,268
3	0,169 048	8,28	11,5 630	0,169 048	8,61	12,503	24,066	2,901	2,790
4	0,169 048	7,58	9,6 900	0,169 048	8,01	10,821	20,511	2,706	2,560
5	0,161 248	6,88	7,6 326	0,161 248	7,42	8,8778	16,5104	2,400	2,225
6	0,153 448	6,20	5,8 985	0,153 448	6,83	7,1582	13,0567	2,106	1,912
7	0,145 648	5,53	4,4 540	0,145 648	6,26	5,7076	10,1616	1,838	1,623
8	0,145,648	4,94	3,5 543	0,145 648	5,73	4,7821	8,3364	1,688	1,455
9	0,133 748	4,53	2,7 446	0,133 748	5,40	3,9001	6,6447	1,466	1,230
10	0,112 948	4,15	1,9 452	0,112 948	5,08	2,9148	4,8600	1,171	0,956
11	0,112 948	3,72	1,5 630	0,112 948	4,72	2,5163	4,0793	1,096	0,864
12	0,112 948	3,40	1,3 057	0,112 948	4,47	2,2568	3,5625	1,047	0,797
13	0,106 448	3,20	1,0 900	0,106 448	4,26	1,9317	3,0217	0,944	0,709
14	0,106 448	3,14	1,0 495	0,106 448	4,23	1,9134	2,9629	0,944	0,700

— 162 —

Tableau 18. Arc. Tableau 14 du mémoire. Éléments du calcul du moment à la clef (Eiffel, 1888a)

Le moment d'inertie I des membrures n'est pas le même moment d'inertie que pour le calcul des effets des charges verticales. En effet la flexion due au vent entraine une flexion suivant l'axe y global du viaduc alors que la flexion due aux charges verticales entraine une flexion suivant l'axe z (Figure 77).

Eiffel utilise classiquement le théorème de Huygens : « *les moments I, par-rapport à l'axe du plan médian, ont été calculés, tableau n° 14, en multipliant la surface des membrures d'extrados et d'intrados $2\omega_e$ et $2\omega_i$ par le carré des distances v_e et v_i de leur centre de gravité à l'axe du plan médian.* » (Eiffel, 1888a, p. 140).

Remarque

Le théorème de Huygens indique que le moment d'inertie I_Δ d'une section d'aire ω de moment quadratique I_G par-rapport à son centre de gravité G, et dont le centre de gravité est situé à la distance r de l'axe Δ a pour expression $I_\Delta = I_G + \omega.r^2$. On voit donc qu'Eiffel néglige le moment d'inertie I_G des membrures par-rapport à leur centre de gravité. Cette simplification permet un gain de temps de calcul considérable.

Nous détaillons ci-dessous ce calcul sur un exemple.

Exemple : section 3

La planche 181 du mémoire donne les sections et caractéristiques géométriques des membrures de l'arc. La section 3 est représentée ci-dessous.

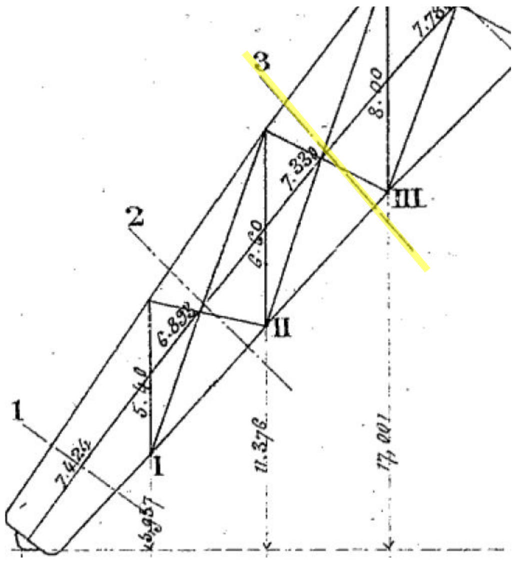


Figure 80. Arc. Section 3 (Eiffel, 1888a, p. Planche 181)

Dans le tableau 14 du mémoire, le moment d'inertie I est calculé comme ci-dessous :

$$I = 2\omega_e v_e^2 + 2\omega_i v_i^2$$

Le facteur 2 provient du fait qu'il y a deux fermes : voir en Figure 81 la section totale effectivement considérée pour le calcul de I.

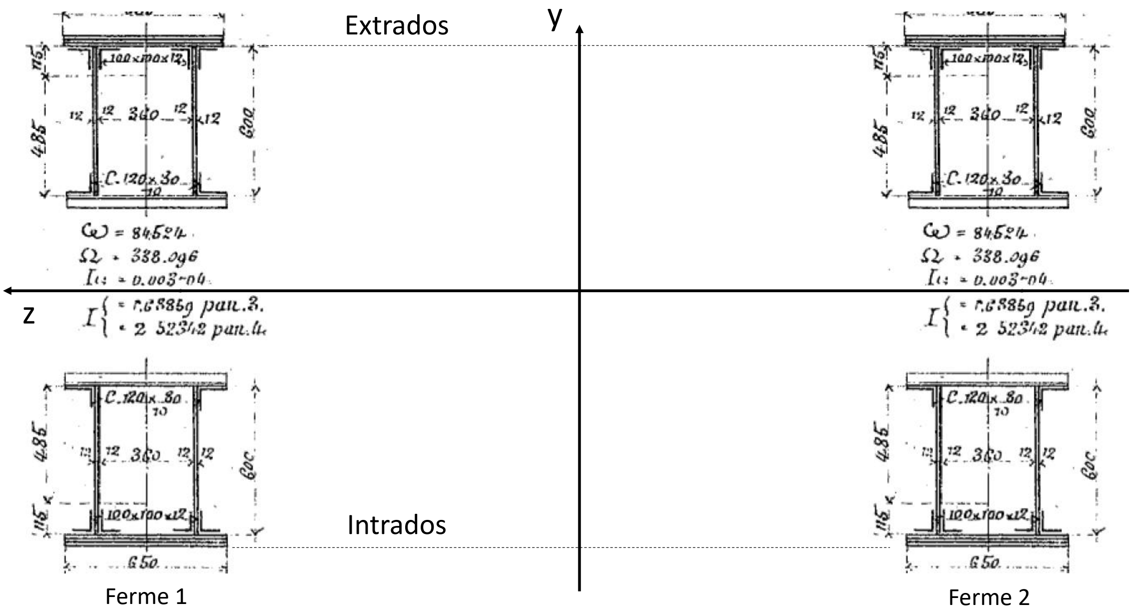


Figure 81. Section des membrures, section 3 (Eiffel, 1888a, p. Planche 181)

La distance v_e est indiquée en Figure 82. Le raisonnement est identique pour v_i.

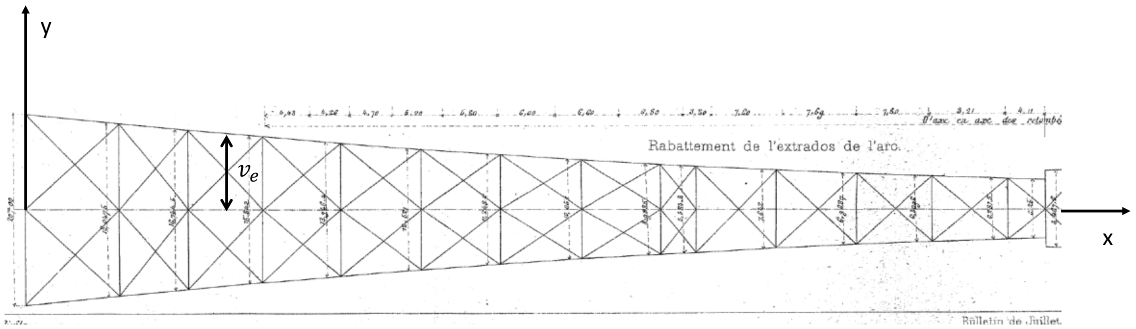


Figure 82. Géométrie de l'arc. (Eiffel, 1888a)

Pour la section 3 (Figure 83), on a

$$v_e = \frac{16{,}7445 + 15{,}342}{2} = 8{,}02$$

$$v_i = \frac{16{,}7445 + 15{,}342}{2} = 8{,}83$$

Dans le tableau 14 du mémoire, on a $v_e = 8{,}28$ et $v_i = 8{,}61$. Ces valeurs un peu éloignées des nôtres incitent à étudier les autres panneaux. Pour les autres panneaux (Tableau 19), l'accord entre nos calculs et les valeurs données par le mémoire semble valider notre mesure de v_e et v_i.

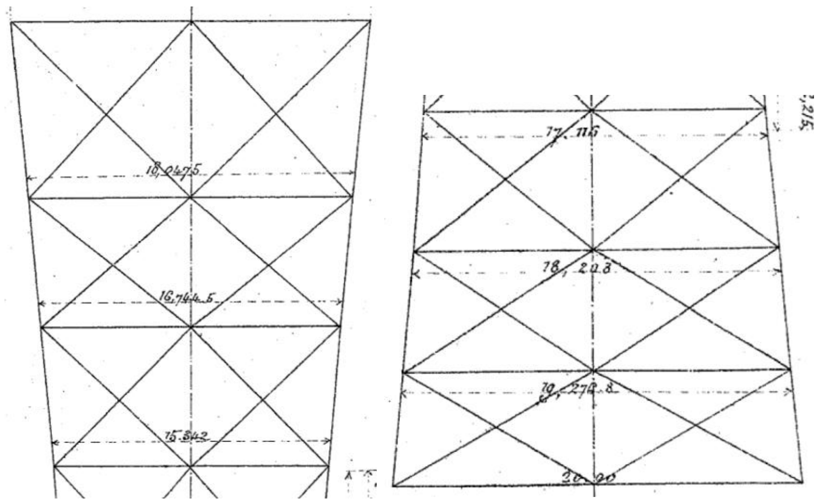


Figure 83. Géométrie de l'arc. Détails de la section 3. (Eiffel, 1888a, p. Planche 182)

Extrados (m)	Section	Largeur section extrados (m)	ve calcul (m)	ve mémoire (m)	Intrados (m)	Largeur section intrados (m)	vi calcul (m)	vi mémoire (m)
20					20			
18,0475	1	19,02375	9,51	9,50	19,2768	19,6384	9,82	9,75
16,7445	2	17,396	8,70	8,89	18,208	18,7424	9,37	9,17

15,342	3	16,04325	8,02	8,28	17,116	17,662	8,83	8,61
13,9464	4	14,6442	7,32	7,58	15,9422	16,5291	8,26	8,01
12,521	5	13,2337	6,62	6,88	14,738	15,3401	7,67	7,42
11,248	6	11,8845	5,94	6,20	13,5548	14,1464	7,07	6,83
10,05	7	10,649	5,32	5,53	12,3573	12,95605	6,48	6,26
8,9885	8	9,51925	4,76	4,94	11,2967	11,827	5,91	5,73
8,5343	9	8,7614	4,38	4,53	10,8405	11,0686	5,53	5,4
7,642	10	8,08815	4,04	4,15	9,948	10,39425	5,20	5,08
6,9687	11	7,30535	3,65	3,72	9,2528	9,6004	4,80	4,72
6,3096	12	6,63915	3,32	3,40	8,7715	9,01215	4,51	4,47
6,2815	13	6,29555	3,15	3,20	8,499	8,63525	4,32	4,26
6,25	14	6,26575	3,13	3,14	8,4676	8,4833	4,24	4,23

Tableau 19. Arc. Distances ve et vi pour toutes les sections

Intéressons-nous maintenant aux surfaces ω_e et ω_i. On voit sur le tableau 14 qu'elles sont identiques. En effet les membrures sont symétriques par-rapport à l'axe z (Figure 81). Il est indiqué en planche 181 du mémoire que chaque membrure a une section $\omega = 84\,524\ mm^2$. Les deux membrures, pour intrados et extrados, ont donc bien une section $\omega_e = \omega_i = 2 \times 84\,524\ mm^2 = 0{,}169\,048\ m^2$.

Le moment d'inertie I a donc pour valeur

$$I = 2 \times 0{,}169048 \times 8{,}28^2 + 2 \times 0{,}169048 \times 8{,}61^2 = 24{,}122\ m^4$$

Le tableau 14 du mémoire indique $I = 24{,}066\ m^4$.

- Éléments géométriques des barres de treillis et de contreventements

Étudions maintenant le tableau 15 du mémoire.

TABLEAU N° 15

Éléments du calcul du moment m_1 à la clef.

1	2	3	4	5	6	7
Nos DES SECTIONS	$tg\ \alpha$	$\Sigma\ [r^2\ \Sigma\ (\sin{}^2\beta\ \cos\ \omega)]$	$\frac{\cos \alpha}{I}$	$\frac{\sin\ \alpha\ tg\ \alpha}{\Sigma\ [r^2\ \Sigma\ (\sin{}^2\beta\ \cos\ \beta\ \omega)]}$	$\Delta\ x$	$\Delta x \left(\frac{\cos\ \alpha}{I} + \frac{\sin\ \alpha\ tg\ \alpha}{\Sigma\ [r^2\ \Sigma\ (\sin{}^2\beta\ \cos\ \omega)]}\right)$
1	1,34 469	4,07 203	0,018 524	0,264 984	4,43	1,255 940
2	1,27 207	0,89 846	0,020 523	1,113 076	4,26	4,829 132
3	1,19 681	0,66 307	0,026 643	1,385 090	4,70	6,635 145
4	1,11 404	0,61 738	0,032 561	1,342 826	5,20	7,152 043
5	1,02 189	0,55 128	0,042 362	1,324 843	5,80	7,929 789
6	0,92 300	0,53 294	0,056 2800	1,174 862	6,00	7,385 652
7	0,81 818	0,64 366	0,076 165	0,804 914	6,60	5,815 121
8	0,70 470	0,64 533	0,098 055	0,629 029	6,80	4.944 171
9	0,62 060	0,73 914	0,127 8730	0,442 703	3.30	1,882 901
10	0,52 9487	0,58 661	0,181 844	0,422 373	7,60	4,592 049
11	0,40 139	0,51 849	0,227 498	0,288 359	7,69	3,966 940
12	0,27 168	0,52 217	0,270 8830	0,136 407	7,80	3.176 862
13	0,13 760	0,55 279	0,327 8500	0,033 930	8,21	2,970 230
14	0,00 000	0,52 471	0,337 507	0,000 000	4,11	1,387 153

— 163 —

Dénominateur : 63 923 128

Ce tableau fournit, pour chaque section, l'expression

$$\frac{\cos \alpha}{I} + \frac{\sin \alpha \,.\, \tan \alpha}{\sum(r^2.\sum sin^2\beta.\cos \beta \,.\, \omega)}$$

Pour la section 3, on a

$$\begin{cases} \Delta x = 4{,}70 \\ \Delta y = 17{,}001 - 11{,}376 = 5{,}625 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \text{atan}\left(\frac{5{,}625}{4{,}70}\right) \approx 0{,}875$$

On obtient

$$\frac{\cos \alpha}{I} = 0{,}026\,582$$

Le mémoire indique une valeur de $0{,}026\,643$. Notons le niveau de précision des calculs réalisés par les collaborateurs d'Eiffel, sans calculatrice……..

Intéressons-nous maintenant au terme

$$\frac{\sin \alpha \,.\, \tan \alpha}{\sum(r^2.\sum sin^2\beta.\cos \beta \,.\, \omega)}$$

Cette expression est peu détaillée dans le mémoire. Il est simplement mentionné :

Dans le tableau n° 15 se trouvent les valeurs calculées de $tg\ \alpha$ de $\Sigma\left(r^2\Sigma(\sin{}^2\beta\cos\beta\,\omega)\right)$ de $\frac{\cos\alpha}{I}$, et de $\frac{\sin\ \alpha\ tg\ \alpha}{\Sigma\left(r^2\Sigma\left(\sin{}^2\beta\cos\beta\ \omega\right)\right)}$, de Δx et enfin celle de $\left(\frac{\cos\alpha}{I} + \frac{\sin\ \alpha\ tg\ \alpha}{\Sigma\left((\Sigma r^2 \sin{}^2\beta\cos\beta\ \alpha)\right)}\right)\Delta x$.

$\sin\alpha$ et $\tan\alpha$ sont connus, nous n'y reviendrons pas. Le terme $sin^2\beta.\cos\beta\,.\,\omega$ pour chaque barre de treillis et chaque contreventement est estimé graphiquement dans la planche 182 du mémoire (Figure 84). La démarche est la même que pour les barres de treillis pour le calcul de la poussée, voir §4.2.

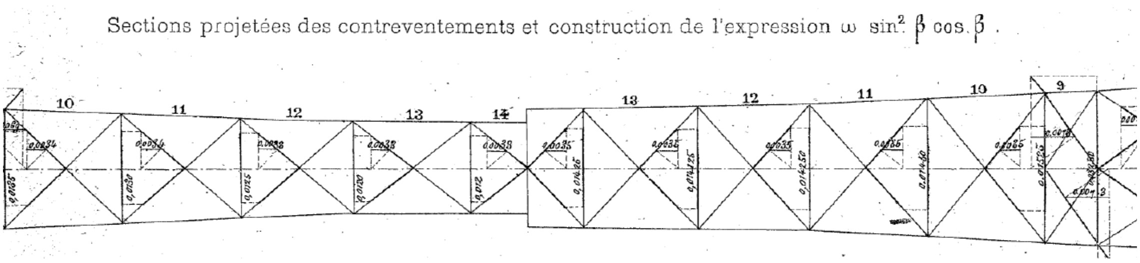


Figure 84. Arc. Expression $sin^2\beta.cos\,\beta\,.\,\omega$ pour les contreventements, aperçu de la planche 182 du mémoire (Eiffel, 1888a, p. Planche 182)

Pour la distance r des 4 côtés de l'arc, voir la figure ci-dessous.

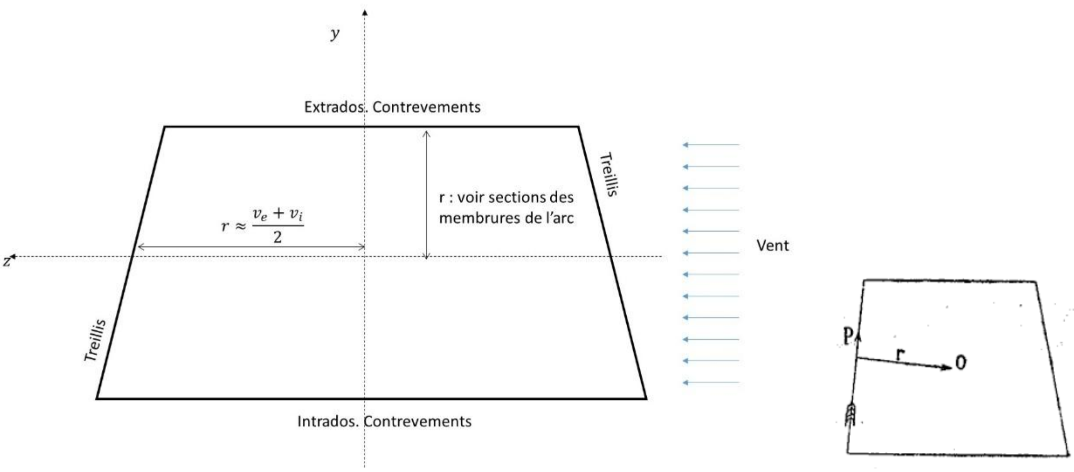


Figure 85. Arc. Moment m_1 à la clef. Distance r pour les barres de treillis et les contreventements.

On donne ci-dessous notre calcul pour l'expression $\sum(r^2.\sum sin^2\beta.\cos\beta\,.\,\omega)$. v_e et v_i, les expressions $sin^2\beta.\cos\beta\,.\,\omega$ sont issues de la planche 182. Pour la valeur de r pour les contreventements (extrados et intrados), on a pris la colonne 9 du tableau 1 du mémoire, p149. Nos calculs semblent en bon accord avec les calculs du mémoire. L'expression de notre calcul est la suivante, compte-tenu de la Figure 85 :

$$\sum\left(r^2.\sum sin^2\beta.\cos\beta\,.\,\omega\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{v_e + v_i}{2}.\right)$$

Barres de treillis					Extrados			Intrados			TOTAL	Mémoire
ve	vi	r	s²cw	Σ(r².Σ())	r	s²cw	Σ(r².Σ())	r	s²cw	Σ(r².Σ())	Σ(r².Σ())	Σ(r².Σ())
(m)	(m)	(m)	(m²)	(m²)	(m)	(m²)	(m²)	(m)	(m²)	(m²)	(m²)	(m²)
9,500	9,750	9,625	0,043	8,004	0,000	0,013	0,000	0,000	0,015	0,000	4,002	4,072
8,890	9,170	9,030	0,010	1,631	1,750	0,015	0,091	1,750	0,015	0,092	0,907	0,898

8,280	8,610	8,445	0,008	1,070	2,225	0,014	0,134	2,225	0,015	0,150	0,676	0,663
7,580	8,010	7,795	0,007	0,862	2,724	0,013	0,193	2,724	0,015	0,224	0,639	0,617
6,880	7,420	7,150	0,006	0,634	3,199	0,012	0,237	3,199	0,013	0,266	0,569	0,551
6,200	6,830	6,515	0,006	0,509	3,623	0,010	0,268	3,623	0,012	0,315	0,546	0,533
5,530	6,260	5,895	0,010	0,695	3,882	0,009	0,277	3,882	0,011	0,332	0,652	0,644
4,940	5,730	5,335	0,012	0,683	4,108	0,009	0,287	4,108	0,010	0,338	0,654	0,645
4,530	5,400	4,965	0,009	0,459	4,335	0,014	0,522	4,335	0,015	0,564	0,772	0,739
4,150	5,080	4,615	0,015	0,626	4,487	0,007	0,274	4,487	0,007	0,282	0,591	0,587
3,720	4,720	4,220	0,012	0,438	4,694	0,007	0,300	4,694	0,007	0,308	0,523	0,518
3,400	4,470	3,935	0,014	0,418	4,837	0,006	0,299	4,837	0,007	0,328	0,523	0,522
3,200	4,260	3,730	0,017	0,459	4,884	0,007	0,315	4,884	0,007	0,334	0,554	0,553
3,140	4,230	3,685	0,015	0,407	4,881	0,007	0,314	4,881	0,006	0,286	0,504	0,525

Tableau 20. Arc. Calcul du moment m_1 à la clef. $\sum(r^2.\sum sin^2\beta.cos\,\beta\,.\,\omega)$. La colonne « mémoire » est la valeur donnée dans le tableau 15, colonne

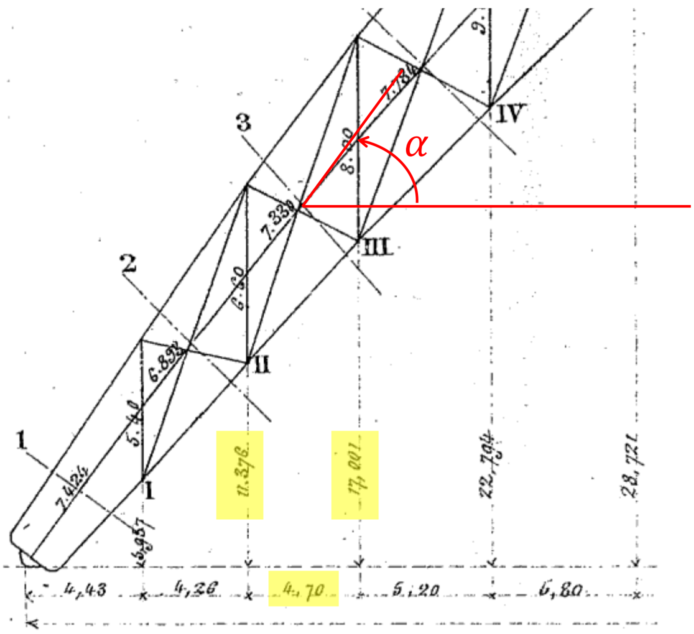


Figure 86. Géométrie de l'arc central. Section 3 (Eiffel, 1888a, p. Planche 181)

Avec les tableaux 14 et 15, Eiffel calcule le dénominateur dans l'expression de m_1 :

$$\sum_{O}^{A}\left[\left(\frac{\cos\alpha}{I}+\frac{\sin\alpha\,.\tan\alpha}{\sum(r^2.\sum sin^2\beta.\cos\beta\,.\,\omega)}\right).\Delta x\right]=63{,}923\ 128$$

Nous reproduisons ci-dessous notre version du tableau 15 du mémoire, réalisés à partir de la géométrie donnée dans le mémoire :

1	2	3	4	5	6	7
Sections	tan α	Σ(r².Σ())	cos α / I		Δx	
1	1,344695	4,002	0,018523	0,269618	4,43	1,276462
2	1,208685	0,907	0,021777	1,027136	4,26	4,468369
3	1,196809	0,676	0,026582	1,357643	4,70	6,505858
4	1,114038	0,639	0,032491	1,296762	5,20	6,912117
5	1,021897	0,569	0,042362	1,284271	5,80	7,694469
6	0,923000	0,546	0,056280	1,146415	6,00	7,216169
7	0,818182	0,652	0,076165	0,794732	6,60	5,747915
8	0,704706	0,654	0,098055	0,620943	6,80	4,889187
9	0,620606	0,772	0,127872	0,423710	3,30	1,820218
10	0,529474	0,591	0,181844	0,419272	7,60	4,568479
11	0,401430	0,523	0,227493	0,285882	7,69	3,947853
12	0,271667	0,523	0,270885	0,136296	7,80	3,176009
13	0,137637	0,554	0,327838	0,033877	8,21	2,969679
14	0,000000	0,504	0,338501	0,000000	4,11	1,391240

Figure 87. Arc. Calculs réalisés à partir des données géométriques du mémoire, à comparer avec le tableau 15 du mémoire.

Notre calcul aboutit à la valeur de $62{,}584\,025$, soit un écart de 2% par-rapport à la valeur du mémoire ($63{,}923\,128$).

6.6.2 Calcul du numérateur. Éléments dépendant du vent

Intéressons-nous au tableau 16 du mémoire (Eiffel, 1888a, p. 164).

TABLEAU N° 16

Moments fléchissants et moments de torsion.

N°s des sections	VENT SANS SURCHARGE						VENT AVEC SURCHARGE					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	m_h MOMENT horizontal	m_v MOMENT vertical	m_f	m_t	M_f MOMENT fléchissant	M_t MOMENT de torsion	m_h MOMENT horizontal	m_v MOMENT vertical	m_f	m_t	M_f MOMENT fléchissant	M_t MOMENT de torsion
0	—7 695 830	7 960 244					—5 049 544	5 339 292				
1	—7 324 302	7 460 648	—10 357 392	—1 425 474	—9 142 622	208 314	—4 813 250	5 021 430	—6 901 640	— 865 803	—6 707 469	— 604 703
2	—6 608 465	6 522 683	—9 214 823	—1 463 909	—7 933 769	436 410	—4 356 765	4 423 363	—6 170 023	— 694 377	—5 968 928	— 435 573
3	—5 897 854	5 646 640	—8 114 778	— 905 351	—6 809 528	656 789	—3 901 694	3 861 938	—5 465 334	— 517 888	—5 256 700	— 268 495
4	—5 145 451	4 778 468	—6 992 876	— 637 308	—5 633 066	877 575	—3 416 900	3 302 489	—4 739 850	— 336 948	—4 522 495	— 94 776
5	—4 349 806	3 929 444	—5 850 752	— 360 500	—4 426 982	1 094 342	—2 900 644	2 754 366	—3 905 198	— 148 805	—3 767 649	83 755
6	—3 542 485	3 143 868	—4 735 458	— 92 477	—3 239 588	1 288 213	—2 372 534	2 237 348	—3 260 887	84 920	—8 024 783	255 613
7	—2 734 302	2 440 877	—3 661 866	— 157 699	—2 086 346	1 446 733	—1 838 524	1 772 776	—3 545 503	207 852	—2 293 768	413 894
8	—1 932 936	1 829 654	—2 633 985	— 382 450	— 969 985	1 554 766	—1 302 015	1 364 222	—1 850 138	365 145	—1 384 160	552 578
9	—1 396 694	1 149 838	—1 777 185	215 073	— 47 525	1 288 407	— 944 742	844 849	—1 245 631	221 304	— 969 159	392 865
10	—1 023 012	603 832	—1 186 660	54 933	612 390	1 007 504	— 693 024	459 502	— 827 485	84 798	— 539 912	234 031
11	— 597 624	400 146	— 703 656	148 746	1 185 514	907 000	— 407 247	323 205	— 499 073	150 108	— 197 142	271 314
12	— 236 186	276 482	— 300 464	204 888	1 663 906	738 592	— 156 353	139 562	— 187 474	93 088	126 530	478 996
13	— 35 553	4 892	— 35 888	00	1 980 782	277 493	— 19 753	2 718	— 19 939	0	302 409	44 355
14	— 0				2 035 670	0					325 386	

MOMENT m_1 = 2 035 670 MOMENT m_1 = 325 386

— 164 —

Tableau 21. Arc. Tableau 16 du mémoire, calcul des moments fléchissant et moment de torsion dans les sections sous l'action du vent

Ce tableau contient de nombreuses colonnes. Nous proposons de les expliquer en détail pour le cas du vent sans surcharge.

En colonne 1 et 2 on trouve les moments m_h et m_v, voir Figure 77. A la clef, ces moments sont considérés comme nuls. En effet pour m_h, toutes les actions à droite de la clef sont incluses dans m_1, et pour m_v, Eiffel considère qu'au-dessus de la clef, l'arc ne subit pas de torsion (il subit les effets venant du vent sur le tablier, qui sont distribués sur les montants en liaison avec l'arc sous forme d'efforts horizontaux, et tous ces montants sont situés sous la clef de l'arc).

La formule donnée par Eiffel pour les moments m_h et m_v est la suivante (Eiffel, 1888a, p. 141) :

$$M_{n+1} = M_n + F_n.x - P.x'$$

Avec

- M_n moment dans la section n
- F_n effort vent sur la section n (voir Tableau 17).
- P effort sur le montant situé entre les sections n et n+1
- x distance entre la section n et la section n+1
- x' distance entre la force P et la section n+1

Cette formule est relativement énigmatique. On décrit ci-dessous les calculs qui ont probablement été réalisés.

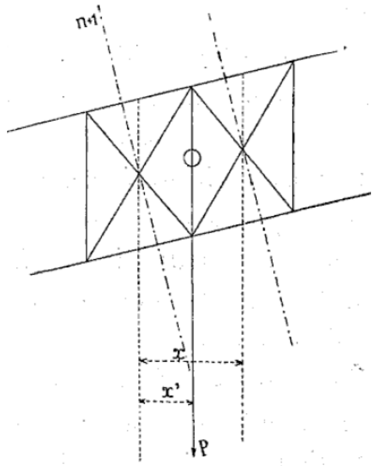


Figure 88. Arc. Calcul des moments fléchissants et des moments de torsion (Eiffel, 1888a, p. 141)

On propose de détailler la section 13, qui est la première section rencontrée quand on part de la clef pour aller à la naissance O de l'arc. Avec le schéma de la Figure 89, on voit que

$$\begin{cases} m_h = 4{,}105 \times 8662 = 35\,558\ kg.m \\ m_v = 0{,}565 \times 8662 = 4\,894\ kg.m \end{cases}$$

Le tableau 16 indique $m_h = 35\,553\ kg.m$ et $m_v = 4\,892\ kg.m$.

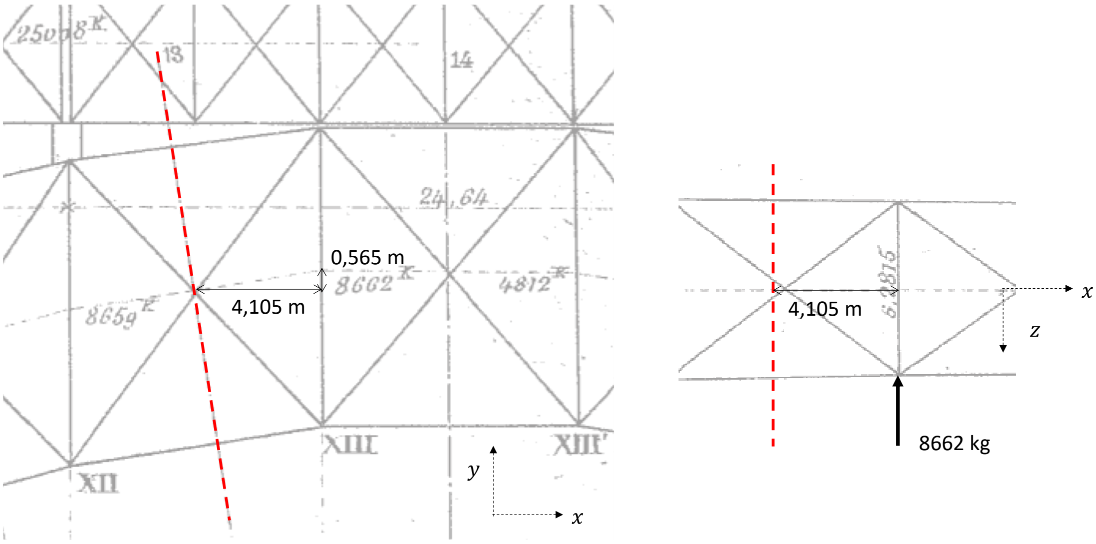


Figure 89. Arc. Calcul du moment mh et du moment mv pour la section 13

Détaillons également la section 12, à l'aide du schéma ci-dessous.

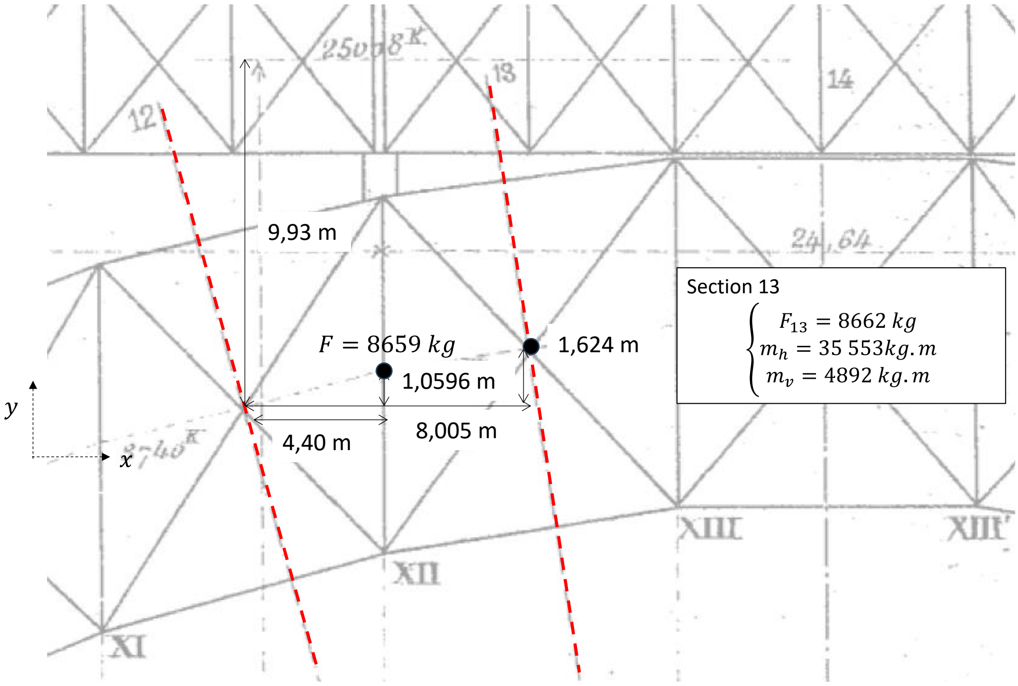


Figure 90. Arc. Calcul du moment mh et du moment mv pour la section 13

On voit que

$$\begin{cases} m_h = m_h(13) + 8662 \times \dfrac{7{,}80 + 8{,}21}{2} + 8659 \times \dfrac{7{,}80}{2} = 236\ 209\ kg.m \\ m_v = 4892 + 8662 \times 1{,}624 + 8659 \times 1{,}059 + 25008 \times 9{,}93 = 276\ 458\ kg.m \end{cases}$$

Le tableau 16 indique $m_h = 236\ 186\ kg.m$ et $m_v = 276\ 482\ kg.m$. La différence négligeable entre nos valeurs et celles du mémoire semblent valider l'hypothèse faite sur la façon dont Eiffel a réalisé ses calculs. Ainsi le calcul des moments m_h et m_v, moments orientés suivant les axes globaux y et x respectivement, est réalisé par une classique méthode de la coupure.

Remarque : poids relatif des différents termes

On voit que le terme $25008 \times 9{,}93 = 248\ 329\ kg.m$ représente 90% des $276\ 482\ kg.m$ du moment m_v. Ainsi la torsion de l'arc est principalement due aux efforts du vent sur le tablier et le train.

Les moments m_h et m_v fournissent ensuite les moments fléchissant m_f et m_t dans les sections.

$$\begin{cases} m_f = m_h.\cos\alpha - m_v.\sin\alpha \\ m_t = m_v.\cos\alpha + m_h.\sin\alpha \end{cases}$$

Les valeurs de m_f et m_t permettent de déterminer le numérateur de m_1, à savoir le terme

$$\sum_{O}^{A}\left[\left(\frac{m_f}{I}+\frac{m_t.\tan\alpha}{\sum(r^2.\sum sin^2\beta.\cos\beta\,.\,\omega)}\right).\Delta x\right]$$

Il n’est pas nécessaire de revenir sur ce numérateur car l’ensemble des termes de son expression ont été expliqués auparavant.

6.6.3 Calcul final de m_1

On rappelle que

$$m_1=\frac{-\sum_O^A\left[\left(\frac{m_f}{I}+\frac{m_t.\tan\alpha}{\sum(r^2.\sum sin^2\beta.\cos\beta\,.\,\omega)}\right).\Delta x\right]}{\sum_O^A\left[\left(\frac{\cos\alpha}{I}+\frac{\sin\alpha\,.\tan\alpha}{\sum(r^2.\sum sin^2\beta.\cos\beta\,.\,\omega)}\right).\Delta x\right]}$$

Pour le vent avec surcharge,

$$m_1=\frac{-20\ 799\ 684}{63{,}923\ 128}=-325\ 386$$

Pour le vent sans surcharge,

$$m_1=\frac{-40\ 397\ 405}{63{,}923\ 128}=-631\ 960$$

6.6.4 Vérification des hypothèses réalisées en début de calcul et valeur finale de m_1

Dans le §6.5, on a vu que l’arc était hyperstatique et qu’Eiffel apporte une équation supplémentaire par des considérations sur la cinématique de la structure. En l’occurrence, en admettant que « *la section de l’arc aux naissances est fixe »,* Eiffel écrit que « *de l’origine O à la clef, la somme des rotations autour de l’axe des y est nulle.* » (Eiffel, 1888a, p. 137).

Eiffel a donc supposé qu’aux naissances, l’arc était encastré. Cependant, deux cas peuvent se présenter (Eiffel, 1888a, p. 137) : « *si la valeur trouvée pour M_h, divisé par la distance des naissances, est inférieure à la poussée, l’arc ne tend pas à se séparer de ses appuis, et tout se passera comme s’il était réellement encastré. Il n’en est plus de même si cette valeur est supérieure à la poussée, et l’hypothèse de l’encastrement ne se réalise plus.* ».

La situation est représentée en Figure 91. On voit que le moment m_h porté par l’axe y, produit par le vent, induit des efforts F_1 et F_2 dans l’arc. Si ces efforts sont supérieurs à la poussée, on ne pourra plus supposer que l’arc est encastré.

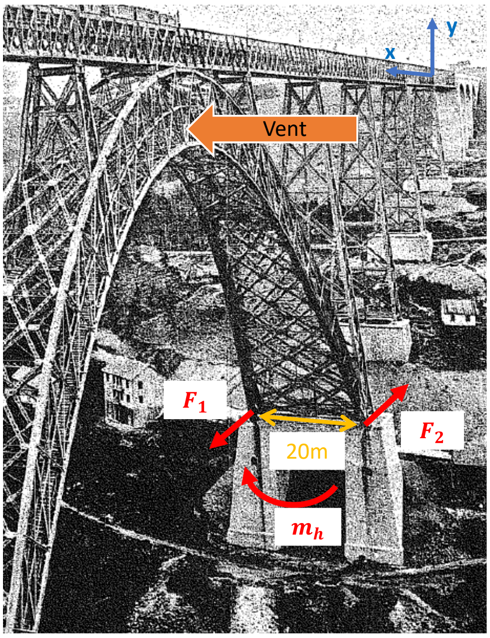


Figure 91. Arc. Action du moment horizontal Mh sur les naissances de l'arc

L'hypothèse d'encastrement de l'arc doit être étudiée pour le cas du vent avec surcharge et le cas du vent sans surcharge.

Vent avec surcharge

Dans ce cas, le moment aux naissances est égal à $m_h + m_1 = 5\,049\,544 - 325\,386 = 4\,724\,158\ kg.m$ (Eiffel, 1888a, p. 142). Ce moment induit un effort horizontal aux naissances égal à

$$\frac{4\,724\,158}{20} = 236\,208\ kg$$

Or on a vu que la poussée dans le cas du vent avec surcharge était de $384\,791\ kg$. Cette valeur correspond à la poussée totale due à la charge permanente (tableau 3 du mémoire) additionnée à la poussée totale due à la surcharge (tableau 4 du mémoire). On divise le total par deux car il y a deux tirants d'amarrage (Figure 91) :

$$\frac{526\,871 + 242\,712}{2} = 384\,791\ kg$$

La poussée est supérieure à l'effort horizontal du au vent, donc l'encastrement est une hypothèse convenable, et « *la valeur trouvée pour le moment à la clef m_1 peut être considérée comme admissible* » (Eiffel, 1888a, p. 142).

Vent sans surcharge

Pour le vent sans surcharge, le moment aux naissances est égal à $m_h + m_1 = 7\,695\,830 - 631\,960 = 7\,063\,870\ kg.m$. Ce moment induit un effort horizontal aux naissances égal à

$$\frac{7\ 063\ 870}{20} = 353\ 193\ kg$$

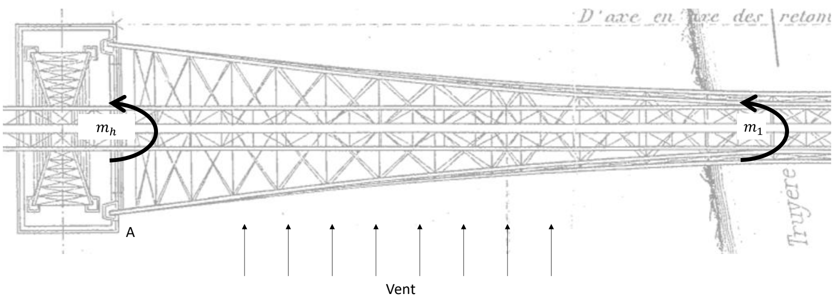
Or sans surcharge, la poussée sur chaque tirant est seulement de

$$\frac{526\ 871}{2} = 263\ 435\ kg$$

Lorsque le vent soufflera à une pression dynamique de $270\ kg/m^2$, le moment m_h induira des efforts aux naissances qui seront supérieurs à la poussée due aux charges verticales : l'encastrement n'est plus assuré, donc la somme des rotations des sections autour de l'axe y n'est pas nulle, et la valeur de m_1 déterminée précédemment n'est plus cohérente.

Pour calculer le moment m_1 dans le cas du vent sans surcharge, Eiffel exploite une autre hypothèse : « *il est impossible d'admettre que des efforts de traction puissent s'exercer dans une direction différente de celle des tirants d'amarrage, car l'effort qui applique l'arc sur ses appuis étant nul, on ne peut compter sur aucun frottement. Or, puisque l'effort vertical de traction est déterminé en divisant l'excès du moment de renversement sur le moment de stabilité par l'écartement aux naissances, l'effort horizontal de traction devra être tel que sa résultante avec l'effort vertical donne un effort dirigé suivant les tirants d'amarrage. C'est cette condition qui permet de déterminer le moment à la clef.* » (Eiffel, 1888a, p. 137).

Isolons donc le tirant d'amarrage en A, dans la Figure 92.



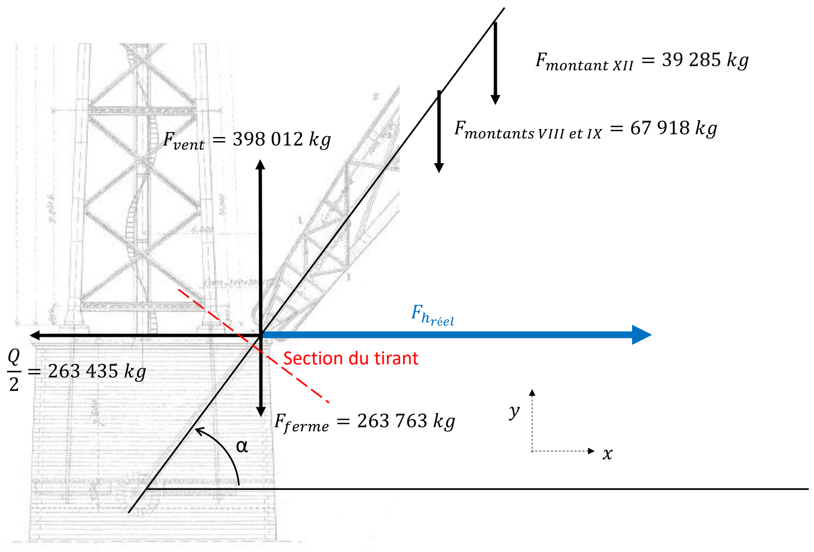


Figure 92. Arc. Calcul du moment m1 à la clef dans le cas du vent sans surcharge. Bilan des forces dans le plan (x,y) pour écriture de l'équilibre d'une section d'un tirant d'amarrage

Dans la section du tirant indiquée en Figure 92, Eiffel suppose que la résultante des efforts est dans l'axe du tirant, donc

$$\frac{\sum \vec{F}.\vec{y}}{\sum \vec{F}.\vec{x}} = \tan\alpha$$

On peut donc écrire

$$\tan\alpha = \frac{398012 - 263763 - 39285 - 67918}{F_{h\,réel} - \frac{Q}{2}}$$

Le terme $F_{h\,réel}$ est ici introduit pour exprimer le moment horizontal aux naissances, provenant du moment m_h dû au vent sur la moitié de l'arc et du moment m_1 représentant les actions à droite de la clef.

Ainsi,

$$F_{h\,réel} = \frac{398012 - 263763 - 39285 - 67918}{\tan\alpha} + \frac{Q}{2} = 19\,573 + \frac{526871}{2} = 283\,008\ kg$$

On en déduit un moment aux naissances tel que :

$$m_{h\,réel} = 20 \times F_{h\,réel} = 5\,660\,160\ kg.m$$

Or

$$m_{h\,réel} = m_h + m_1$$

Donc

$$m_1 = m_{h\,réel} - m_h = 5\,660\,160 - 7\,695\,830 = -2\,035\,670\ kg.m$$

Au signe près, dépendant des conventions, on obtient le moment m_1 à la clef, calculé par Eiffel.

Connaissant maintenant m_1 pour les deux cas de vent, Eiffel calcule les moments fléchissant et moment de torsion dans les sections de l'arc avec les formules

$$\begin{cases} M_f = m_f + m_1.cos\,\alpha \\ M_t = m_t + m_1.sin\,\alpha \end{cases}$$

Ces moments permettent le calcul des contraintes dans les divers éléments de l'arche.

6.7 Contraintes dans les divers éléments de l'arc

Eiffel suppose que la flexion est reprise par les membrures et que l'effort tranchant et la torsion sont repris par les barres de treillis et les contreventements (Eiffel, 1888a, p. 144).

6.7.1 Contraintes dans les membrures

Dans chaque section, la contrainte maximale de flexion R dans les membrures, due au vent, est calculée à l'aide du moment fléchissant M_f avec la formule :

$$R = \frac{M_f}{\frac{I}{v}}$$

Les valeurs de I/v figurent dans le **tableau 14** de l'article. Le moment fléchissant dans chaque section est fourni en **tableau 16** de l'article. Les contraintes calculées figurent dans le **tableau 17** de l'article.

Coefficients de travail des membrures sous l'action du vent.

Nos des SECTIONS 1	VENT SANS SURCHARGE		VENT AVEC SURCHARGE	
	EXTRADOS 2	INTRADOS 3	EXTRADOS 4	INTRADOS 5
	kg	kg	kg	kg
1	2,70	2,77	1,98	2,04
2	2,36	2,43	1,77	1,82
3	2,34	2,44	1,81	1,88
4	2,08	2,20	1,67	1,78
5	1,84	1,99	1,58	1,70
6	1,54	1,70	1,44	1,58
7	1,14	1,28	1,24	1,41
8	0,57	0,67	0,94	1,09
9	0,03	0,04	0,66	0,79
10	0,52	0,64	0,45	0,56
11	1,08	1,36	0,18	0,23
12	1,59	2,09	0,12	0,16
13	2,10	2,80	0,32	0,42
14	2,15	2,90	0,35	0,46

Tableau 22. Arc. Tableau 17 du mémoire. Contraintes maximales dans les membrures sous l'action du vent

Exemple : section 3, vent sans surcharge

En tableau 14 du mémoire (Tableau 18) il est indiqué pour l'intrados

$$\frac{I}{v_i} = 2{,}790$$

En tableau 16 du mémoire (Tableau 21) il est indiqué

$$M_f = 6\ 809\ 528\ kg.m$$

Il vient

$$R = \frac{6\ 809\ 528}{2{,}790} = 2{,}44\ kg/mm^2$$

C'est bien la valeur indiquée dans le tableau 17 du mémoire (Tableau 22).

6.7.2 Contraintes dans les barres de contreventements

Les contreventements subissent un effort tranchant et un moment de torsion, tous deux dus à la pression du vent sur le viaduc. Les contraintes dans les barres de contreventements sont données dans le tableau 18 du mémoire. On propose ci-dessous de détailler les calculs réalisés.

TABLEAU N° 18

Calcul des coefficients de travail des barres du contreventement.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
NUMÉROS des SECTIONS	SECTIONS PROJETÉES EXTRADOS	SECTIONS PROJETÉES INTRADOS	EFFORT TRANCHANT DANS L'EXTRADOS OU L'INTRADOS	COEFFICIENT A L'EXTRADOS	COEFFICIENT A L'INTRADOS	EFFORT P PROVENANT DES MOMENTS DE TORSION	COEFFICIENT A L'EXTRADOS DU A LA TORSION	COEFFICIENT A L'INTRADOS DU A LA TORSION	COEFFICIENTS TOTAUX EXTRADOS	COEFFICIENTS TOTAUX INTRADOS
1	0,02700	0,034125	83 866	3,11	2,45	824	0,03	0,02	3,14	2,43
2	0,02975	0,03300	80 394	2,71	2,45	11 970	0,40	0,36	3,11	2,09
3	0,02750	0,03100	77 809	2,83	2,51	30 307	1,10	0,98	3,93	1,53
4	0,02600	0,02987	74 384	2,88	2,49	51 771	1,99	1,73	4,87	0,76
5	0,02375	0,02725	70 583	2,97	2,58	74 688	3,15	2,74	6,12	0,16
6	0,02250	0,02600	66 386	2,95	2,55	95 179	4,24	3,67	7,19	1,12
7	0,02050	0,02375	62 101	3,04	2,62	86 804	4,24	3,65	7,28	1,03
8	0,01925	0,02250	57 570	2,99	2,56	90 269	4,70	4,02	7,69	1,46
9	0,02900	0,03250	43 873	1,51	1,35	105 520	3,62	3,23	5,13	1,88
10	0,01350	0,01525	30 136	2,22	1,98	52 853	3,91	3,46	6,13	1,48
11	0,01300	0,01450	25 534	1,96	1,76	56 161	4,32	3,89	6,28	2,13
12	0,01250	0,01425	21 164	1,70	1,48	46 808	3,74	3,28	5,44	1,80
13	0,01200	0,01412	4 330	0,36	0,31	16 566	1,37	1,17	1,73	0,86
14	0,01200	0,01425	0	0,00	0,00					

— 166 —

Tableau 23. Arc. Tableau 18 du mémoire. Contraintes dans les contreventements

6.7.2.1 Efforts tranchants dans les barres de contreventements

Les efforts tranchants de la colonne 4 sont déterminés à partir des efforts vent du tableau 13 du mémoire (Tableau 17) et à partir des efforts du vent sur le tablier et les palées (Eiffel, 1888a, p. 133-134). On donne ci-dessous le bilan des forces amenant à ces efforts.

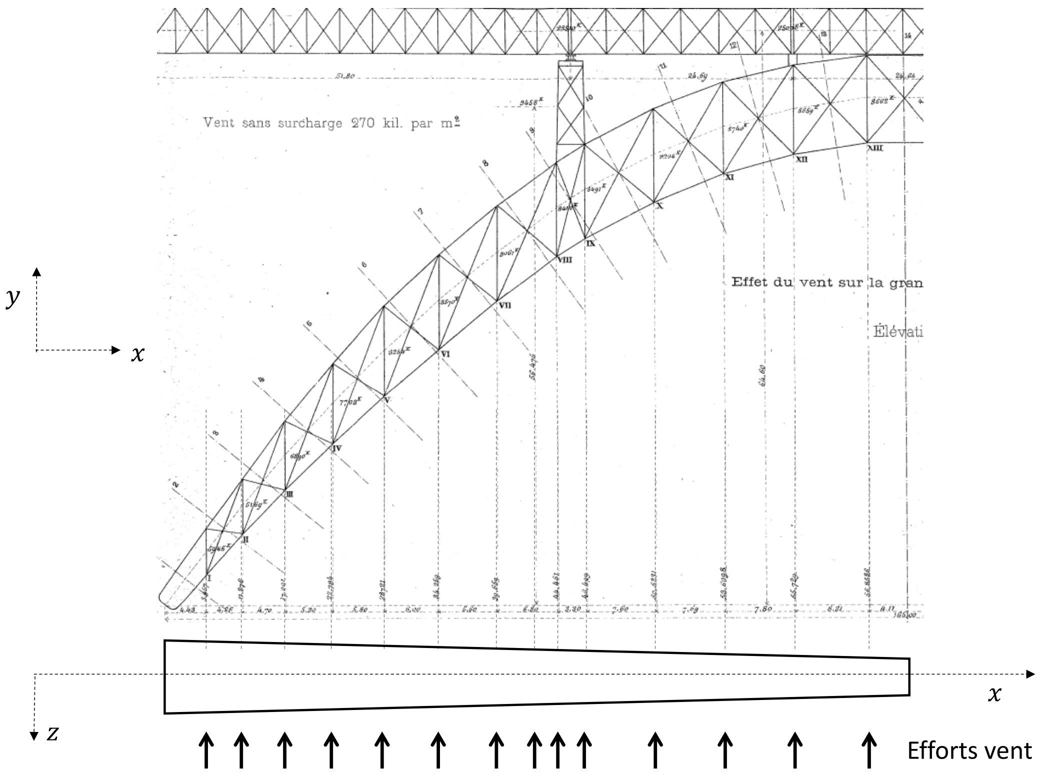


Figure 93. Arc. Efforts vent sur l'arc suivant l'axe z. Vent sans surcharge

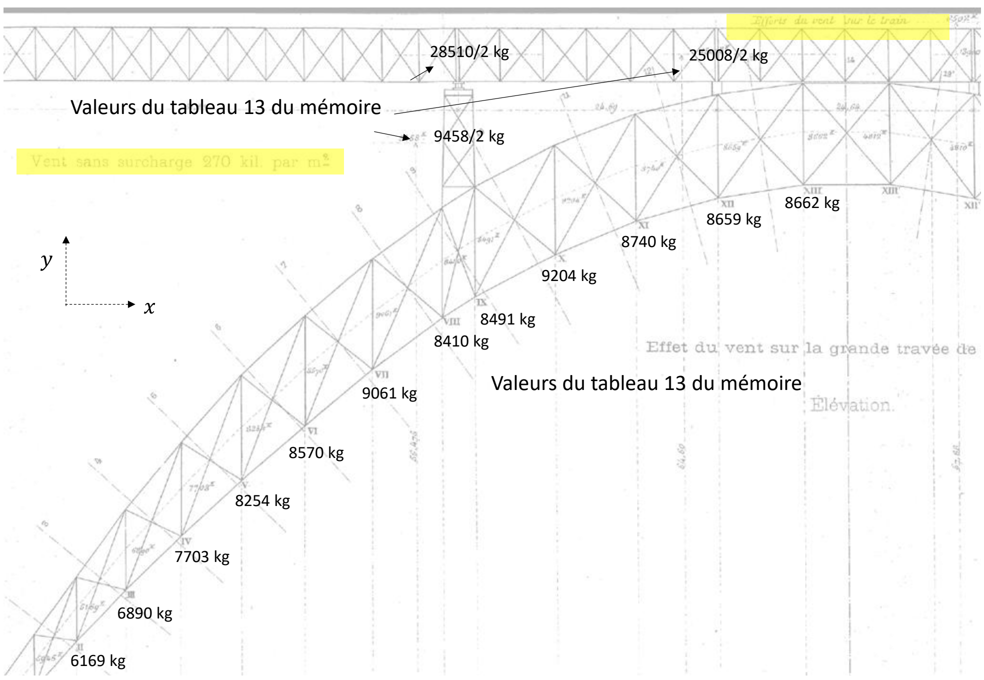


Figure 94. Arc. Efforts vent sur l'arc suivant l'axe z. Vent sans surcharge

Exemple : section 3

On somme les efforts à droite de la section 3. On obtient un effort tranchant T_3 égal à

$$T_3 = 8662 + 8659 + 8740 + 9204 + 8491 + 8410 + 9061 + 8570 + 8254 + 7703 + 6890 + \frac{25008}{2} + \frac{28510}{2} + \frac{9458}{2} = 77\,810\ kg$$

La colonne 4 du tableau 18 du mémoire indique 77 809 kg. Le coefficient 0,5 appliqué aux efforts provenant du tablier et de la palée vient de ce que l'effort se répartit sur chaque ferme.

Les contraintes dues aux efforts tranchants sont finalement obtenues en divisant ces efforts tranchants par les sections projetées des barres en colonnes 2 et 3 (les sections projetées des barres de contreventements sont déterminées graphiquement en planche 182 du mémoire).

6.7.2.2 Efforts P provenant du moment de torsion

Compte-tenu des développements précédents, on montre que l'effort P dans les contreventements dû à la torsion a pour expression :

$$P = \frac{r\,M_t\,\Sigma\,(\sin^2\beta\cos\beta\,\omega)}{\Sigma\,r^2\,(\Sigma(\sin^2\beta\cos\beta\,\omega))}.$$

On présente ci-dessous le détail de nos calculs et la comparaison avec les valeurs du mémoire.

Sections	r	Mt	Σ	r²Σsin².cos	P vent sans surcharge	P vent sans surcharge
		Tableau 16 colonne 6	Tableau 1 colonne 14	Tableau 15 colonne 3	Calcul	Mémoire
1	9,625	208314	0,0432	4,07203	21 271	21 352
2	9,03	436410	0,01	0,89846	43 862	43 903
3	8,445	656789	0,0075	0,66307	62 738	62 526
4	7,795	877575	0,00709	0,61738	78 559	77 490
5	7,15	1094342	0,0062	0,55128	87 999	87 872
6	6,515	1288213	0,006	0,53294	94 488	94 425
7	5,895	1446733	0,01	0,64366	132 500	132 660
8	5,335	1554766	0,012	0,64533	154 241	154 240
9	4,965	1288407	0,0093	0,73914	80 488	80 967
10	4,615	1007504	0,0147	0,58661	116 516	116 670
11	4,22	907000	0,0123	0,51849	90 800	90 881
12	3,935	738592	0,0135	0,52217	75 140	75 189
13	3,73	277493	0,0165	0,55279	30 895	31 134

Tableau 24. Arc. Effort P dans les barres de contreventements dû à la torsion du vent

Les contraintes dues à la torsion sont finalement obtenues en divisant P par les sections projetées des barres.

La contrainte totale est finalement donnée en colonne 11.

6.7.3 Contraintes dans les barres de treillis

L'effort P dans les barres de treillis, dû à la torsion du vent, est calculé avec la même démarche que pour les contreventements (Eiffel, 1888a, p. 145) :

$$\mathrm{P} = \frac{r\,\mathrm{M}_t\,\Sigma\,(\sin^2\beta\cos\beta\,\omega)}{\Sigma\,r^2\,(\Sigma\,(\sin^2\beta\cos\beta\,\omega))}.$$

On résume ci-dessous notre calcul de p dans le cas du vent sans surcharge, réalisé à partir des valeurs du mémoire.

Les contraintes dans les barres de treillis sont obtenues en divisant l'effort P par la section projetée des barres.

Section	$r = \frac{v_e + v_i}{2}$	Mt	Σ	$r^2\Sigma\sin^2.\cos$	P vent sans surcharge	P vent sans surcharge
		Tableau 16 colonne 6	Tableau 1 colonne 14	Tableau 15 colonne 3	Calcul	Mémoire
1	9,625	208314	0,0432	4,07203	21 271	21 352
2	9,03	436410	0,01	0,89846	43 862	43 903
3	8,445	656789	0,0075	0,66307	62 738	62 526
4	7,795	877575	0,00709	0,61738	78 559	77 490
5	7,15	1094342	0,0062	0,55128	87 999	87 872
6	6,515	1288213	0,006	0,53294	94 488	94 425
7	5,895	1446733	0,01	0,64366	132 500	132 660
8	5,335	1554766	0,012	0,64533	154 241	154 240
9	4,965	1288407	0,0093	0,73914	80 488	80 967
10	4,615	1007504	0,0147	0,58661	116 516	116 670
11	4,22	907000	0,0123	0,51849	90 800	90 881
12	3,935	738592	0,0135	0,52217	75 140	75 189
13	3,73	277493	0,0165	0,55279	30 895	31 134
	3,685	0		0,52471		

Tableau 25. Arc. Effort P dans les barres de treillis dû à la torsion du vent

TABLEAU N° 19

Coefficients de travail du treillis.

NUMÉROS des SECTIONS	1	2	3	4	5
	EFFORT P DANS LE CAS DU VENT SANS SURCHARGE	EFFORT P DANS LE CAS DU VENT AVEC SURCHARGE	SECTION PROJETÉE DES BARRES DU TREILLIS	COEFFICIENTS DE TRAVAIL DANS LE CAS DU VENT SANS SURCHARGE	COEFFICIENTS DE TRAVAIL DANS LE CAS DU VENT AVEC SURCHARGE
	kg	*kg*	*mm²*	*kg*	*kg*
1	21 352	61 982	129 600	0,16	0,48
2	43 903	43 903	20 000	1,63	1,63
3	62 526	25 531	25 000	2,50	1,02
4	77 490	8 369	25 500	3,04	0,33
5	87 872	6 725	25 000	3,52	0,27
6	94 425	18 736	33 000	3,77	0,75
7	132 660	37 954	38 500	4,02	1,15
8	154 240	54 816	30 000	4,00	1,42
9	80 967	24 475	39 000	2,67	0,81
10	116 670	27 101	29 000	3,00	0,70
11	90 881	27 185	29 500	3,07	0,92
12	75 189	18 222	29 500	2,55	0,65
13	31 134	4 977	35 000	0,89	0,14
14			32 500		

Tableau 26. Arc. Contraintes dans les treillis sous l'action du vent (Eiffel, 1888a, p. 167)

7 Renversement sous l'effet du vent

7.1 Description générale de la problématique

L'arc pourrait basculer sous l'effet du vent. Le poids propre de l'ensemble du viaduc constitue une première façon d'éviter ce renversement. Ce poids propre induit des charges verticales qui s'opposent aux efforts de renversement verticaux apparaissant aux naissances, et une poussée horizontale, quantifiée précédemment, qui s'oppose aux efforts horizontaux générés par le vent aux naissances.

Si le poids propre de la structure n'est pas suffisant, des tirants d'amarrages sont prévus pour reprendre les efforts apparaissant aux naissances. Ces tirants sont reliés à des maçonneries qui doivent garder les tirants en place.

La démarche est donc de statuer si le poids propre de la structure est suffisant pour assurer la stabilité. Si ce n'est pas le cas, on doit vérifier la résistance des tirants d'amarrages et des maçonneries.

Sont également dimensionnés, en compression, les appuis en maçonnerie de l'arc.

7.2 Vérification de la stabilité

Les efforts induits sur les appuis de l'arche par le moment horizontal m_h et le moment vertical m_v doivent être compensés par le poids propre de la structure et par les ancrages. Les moments m_h et m_v sont donnés aux colonnes 2 et 8 du tableau 16 pour la section (Figure 95).

Moments fléchissants et moments de torsion.

Nos des SECTIONS	VENT SANS SURCHARGE						VENT AVEC SURCHARGE					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	m_h MOMENT horizontal	m_v MOMENT vertical	m_f	m_t	M_f MOMENT fléchissant	M_t MOMENT de torsion	m_h MOMENT horizontal	m_v MOMENT vertical	m_f	m_t	M_f MOMENT fléchissant	M_t MOMENT de torsion
0	—7 695 830	7 960 244					—5 049 544	5 339 292				
1	—7 324 302	7 460 648	—10 357 392	—1 425 174	—9 142 622	208 314	—4 813 250	5 021 430	—6 901 640	— 865 803	—6 707 469	— 604 703

Figure 95. Extrait du tableau 16 de l'article (Eiffel, 1888a)

Les moments m_h et m_v induisent un couple de forces apparaissant au niveau des appuis de l'arc. La distance entre les deux forces est de 20m (Figure 96). Les efforts vent aux appuis de l'arc sont donc tels que

$$F_h = \frac{m_h}{20} ; F_v = \frac{m_v}{20}$$

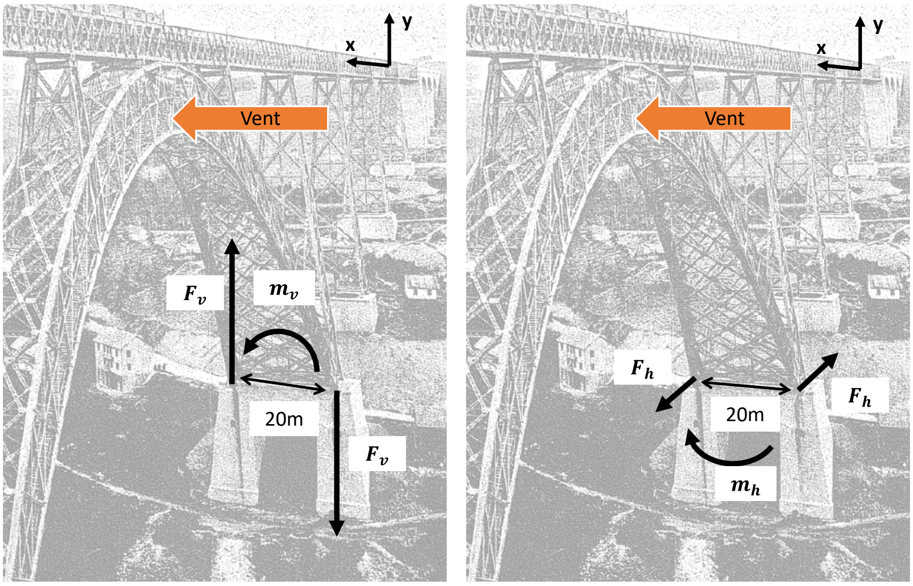


Figure 96. Couple de forces aux ancrages des appuis de l'arche. Ces forces équilibrent les moments dus au vent. Gauche : forces qui équilibrent le moment horizontal (moment suivant y). Droite : forces qui équilibrent le moment vertical de renversement (moment suivant x)

On représente ci-dessous l'ensemble des efforts sur les appuis de l'arc, dus au vent et aux charges verticales.

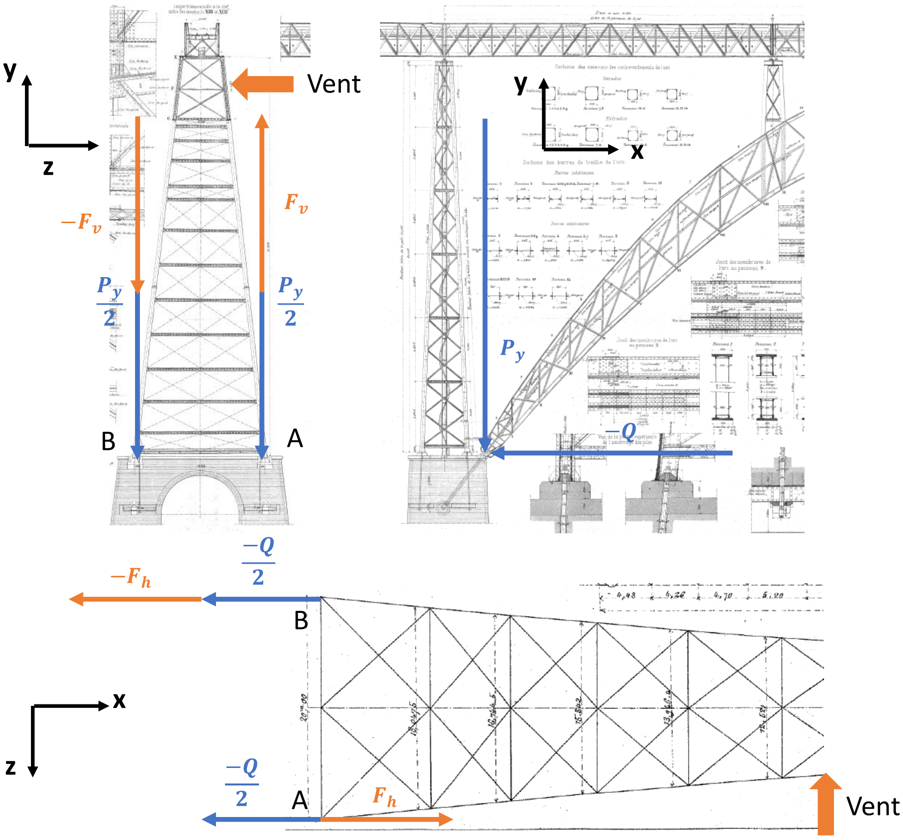


Figure 97. Actions sur les points A et B des appuis (kg). Vent avec et sans surcharge.

Soient $(X_A; Y_A)$ et $(X_B; Y_B)$ la somme des efforts dus au vent et aux charges verticales, en A et B (Tableau 27).

- Vent avec surcharge

On voit que $X_A < 0$ et $Y_A < 0$ donc la poussée et le poids de la structure et de la surcharge suffisent à stabiliser l'arc : « E*n somme, malgré l'effort du vent, l'arc tendra toujours à être appliqué sur son coussinet par une résultante de 274 750 kg* » (Eiffel, 1888a, p. 146).

- Vent sans surcharge

Dans ce cas, « *l'arc tendra à être séparé de ses appuis par un effort de traction de 33 380 kg, qui sera l'effort que subiront les tirants d'amarrage* » (Eiffel, 1888a, p. 146).

		Vent avec surcharge	Vent sans surcharge
Effort vent horizontal	mh (kg.m)	5 049 544	7 695 830
	mi (kg.m)	-325 386	-2 035 670
	Moment horizontal mh+mi (kg.m)	4 724 158	5 660 160
	Distance entre appuis (m)	20	20
	Fh (kg)	236 208	283 008
	Poussée Q/2 (kg)	384 792	263 436
Effort vent vertical	mv (kg.m)	5 339 292	7 960 244
	Distance entre appuis (m)	20	20
	Fv (kg)	266 965	398 012
	Poids propre (kg)	370 967	370 967
	Surcharge (kg)	127 115	0
	P/2 (kg)	498 082	370 967
Appui côté vent	XA (kg)	-148 584	19 573
	YA (kg)	-231 117	27 046
	Résultante (kg)	-274 758	33 385
Appui opposé au vent	XB (kg)	620 999	546 444
	YB (kg)	765 046	768 979
	Résultante (kg)	985 361	943 360

Tableau 27. Efforts aux appuis de l'arche dus au vent, à la charge et la surcharge. Une résultante positive (cas du vent avec surcharge) indique un effort de compression sur l'appui et donc un arc stable ; une résultante négative (vent sans surcharge) indique un effort de traction sur l'appui, donc un arc qui tend à se séparer de son appui. Dans le cas du vent sans surcharge, les tirants d'amarrage seront sollicités en traction.

On représente ci-dessous la somme des forces en A et B, suivant les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

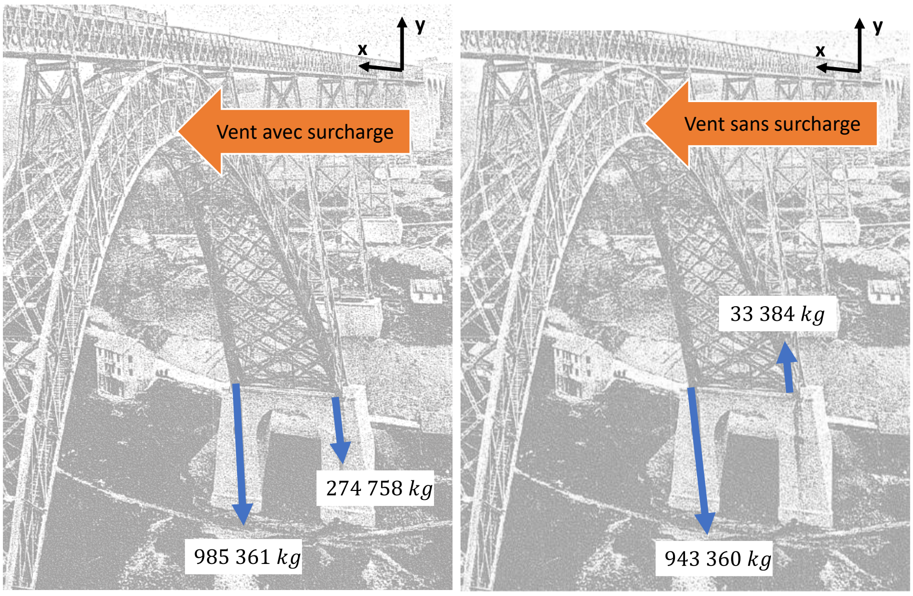


Figure 98. Arc. Représentation des efforts aux appuis pour la stabilité de l'arc sous les effets du vent.

7.3 Calcul des appuis

Les appuis représentés en Figure 99 et situées au point B de la Figure 97 subissent un important effort de compression, provoqué à la fois par les charges verticales et l'action du vent. La résultante maximale de ces efforts est égale à $\sqrt{620\,999 + 765\,045} = 985\,400\ kg$ (Tableau 27) ; elle apparait dans le cas du vent avec surcharge.

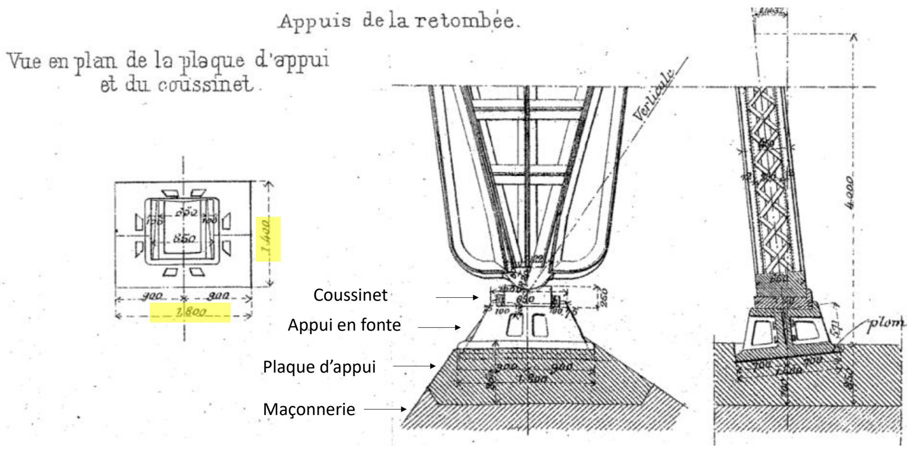


Figure 99. Arc. Géométrie des appuis aux naissances de l'arc (Eiffel, 1888a, p. Planche 175)

La contrainte de compression $\sigma_{compression}$ dans la plaque d'appui est égal à

$$\sigma_{compression} = \frac{985\,400}{180 \times 140} = 39{,}1\ kg/cm^2$$

Selon Eiffel, cette pression « *est acceptable pour la pierre extrêmement dure qui sera employée (pierre d'Étables).* » (Eiffel, 1888a, p. 147).

Eiffel dimensionne enfin la maçonnerie, le coussinet et l'appui en fonte, à la compression, sans difficulté particulière.

8 Combinaison charges et vent

Pour calculer les contraintes définitives dans les éléments de l'arc, Eiffel utilise le théorème de superposition ; il additionne simplement les contraintes dues aux charges verticales et les contraintes dues au vent (Eiffel, 1888a, p. 148).

8.1 Contraintes dans les membrures

Les contraintes finales dans les membrures d'intrados et d'extrados sont données ci-dessous.

TABLEAU N° 20

Coefficients de travail des membrures d'extrados.

Nos des Sections	ARC ET TABLIER SEULS	ARC ENTIÈREMENT CHARGÉ	ARC CHARGÉ AU MILIEU	ARC A DEMI CHARGÉ	VENT SANS SURCHARGE	VENT AVEC SURCHARGE	COEFFICIENTS MAXIMUMS
	kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg
1	2,65	3,19	2,95	3,25	2,70	1,98	5,35
2	2,51	2,73	2,55	3,15	2,35	1,77	4,92
3	2,58	2,70	2,52	3,33	2,34	1,81	5,14
4	2,48	2,64	2,41	3,36	2,08	1,67	5,03
5	2,53	2,82	2,52	3,61	1,84	1,58	5,19
6	2,60	3,11	2,71	3,94	1,54	1,44	5,38
7	2,75	3,56	3,04	4,45	1,14	1,24	5,69
8	2,84	4,07	3,38	4,91	0,57	0,94	5,85
9	2,98	4,48	3,73	5.26	0,03	0,66	5,92
10	2,98	4,63	4,01	5,58	0,52	0,45	5,83
11	2,57	4,27	3,90	4,67	1,08	0,18	4,85
12	2,43	4,37	4,20	4,45	1,59	-0,12	4,57
13	2,33	4,34	4,27	3,98	2,10	0,32	4,66
14	2,19	4,08	4,07	3,14	2,15	0,35	4,43

TABLEAU N° 21

Coefficients de travail des membrures d'intrados.

Nos des Sections	ARC ET TABLIER SEULS	ARC ENTIÈREMENT CHARGÉ	ARC CHARGÉ AU MILIEU	ARC A DEMI C ARGÉ	VENT SANS SURCHARGE	VENT AVEC SURCHARGE	COEFFICIENTS MAXIMUMS
	kg	kg	kg	kg	kg	kg	kg
1	2,49	3,95	3,53	3,37	2,77	2,04	5,99
2	2,25	3,97	3,51	3,47	2,43	1,82	5,79
3	2.28	4,22	3,72	3,77	2,44	1,88	6,10
4	2,18	4,11	3,63	3,77	2,20	1,78	5,89
5	2,19	4,08	3,66	3,90	1,99	1,70	5,78
6	2,14	3,91	3,57	3,95	1,70	1,58	5,53
7	2,03	3,60	3,37	3,94	1,28	1,41	5,35
8	1,74	2,87	2,80	3,58	0,67	1,09	4,67
9	1,62	2,40	2,49	3,50	0,04	0,79	4,29
10	2,00	2,75	2,77	4,06	0,64	0,56	4,62
11	2,35	3,05	2,78	4,07	1,36	0,23	4,30
12	2,43	2,83	2,36	3,75	2,09	0,16	4,52
13	2,61	2,84	2,21	3,48	2,80	0.42	5,41
14	2,77	3,14	2,45	2,58	2,90	0,46	5,67

Tableau 28. Arc. Tableaux 20 et 21 du mémoire. Contraintes finales dans les membrures (charges verticales et vent) (Eiffel, 1888a, p. 168-169)

Pour chaque section, les valeurs soulignées sont celles retenues pour le calcul de la contrainte totale.

Exemple : section 1

Dans le cas du vent sans surcharge, le poids propre de la structure induit une contrainte de $2{,}65\ kg/mm^2$. Le vent induit une contrainte de $2{,}70\ kg/mm^2$. Pour les cas avec surcharge, le vent induit une contrainte de $1{,}98\ kg/mm^2$. Il y a ensuite trois cas de surcharge :

- Arc entièrement chargé : $3{,}19\ kg/mm^2$
- Arc chargé au milieu : $2{,}95\ kg/mm^2$

- Arc à demi chargé : $3{,}25\ kg/mm^2$

Finalement, l'ensemble des cas est listé ci-dessous :

- Vent sans surcharge + poids propre : $2{,}65 + 2{,}70 = 5{,}35\ kg/mm^2$
- Vent avec surcharge + Poids propre + Arc entièrement chargé : $1{,}98 + 3{,}19 = 5{,}17\ kg/mm^2$
- Vent avec surcharge + Poids propre + Arc chargé au milieu : $1{,}98 + 2{,}95 = 4{,}93\ kg/mm^2$
- Vent avec surcharge + Poids propre + Arc à demi chargé : $1{,}98 + 3{,}25 = 5{,}23\ kg/mm^2$

La contrainte maximale sur l'ensemble des cas de charges est bien celle qui correspond au cas vent sans surcharge + poids propre.

Finalement, pour les membrures, « *tous les efforts qui se produisent […] restent au-dessous de* $6\ kg$ *et sont tous des efforts de compression. (Un seul coefficient dans les membrures d'intrados est égal à* $6{,}10\ kg$*, qui ne diffèrent pas beaucoup de* $6\ kg$*.)* » (Eiffel, 1888a, p. 148).

8.2 Contraintes dans les treillis

Les contraintes dues aux efforts tranchants provenant des charges verticales et les contraintes dues à la torsion due au vent sont additionnées dans le tableau 22 du mémoire. « *les coefficients maxima restent en-dessous de* $5\ kg$ » (Eiffel, 1888a, p. 148).

TABLEAU N° 22

Coefficients de travail des barres de treillis obtenus en ajoutant les coefficients dus aux efforts tranchants du tableau N° 11 aux coefficients dus à la torsion du tableau N° 19.

N^os des SECTIONS	CAS DU VENT SANS SURCHARGE			CAS DU VENT AVEC SURCHARGE		
	EFFORT TRANCHANT	VENT	TOTAL	EFFORT TRANCHANT	VENT	TOTAL
	kil.	kil.	kil.	kil.	kil.	kil.
1	0,06	0,16	0,22	0,28	0,48	0,76
2	0,20	1,63	1,83	1,30	1,63	2,93
3	0,14	2,50	2,64	1,31	1,02	2,33
4	0,13	3,04	3,17	1,09	0,33	1,42
5	0,24	3,52	3,76	0,92	0,27	1,19
6	0,51	3,77	4,28	2,08	0,75	2,83
7	0,67	4,02	4,69	2,22	1,15	3,37
8	0,93	4,00	4,93	2,63	1,42	4,05
9	0,42	2,67	3.08	0,73	0,81	1,54
10	1,49	3,00	4,49	2,20	0,70	2,90
11	1,01	3,07	4,08	1,51	0,92	2,43
12	0,11	2,55	2,66	2,61	0,65	3,26
13	1,08	0,89	1,97	3,97	0,14	4,11
14				2,63		2,63

Tableau 29. Arc. Tableau 22 du mémoire. Tableau 22 = Tableau 11 + Tableau 19. Contraintes finales dans les barres de treillis (charges verticales et vent).

Références

Bresse. (1859). *Cours de Mécanique Appliquée. Première partie Résistance des matériaux et stabilité des constructions*. Mallet Bachelier.

Callandreau, E. (1944). *Problèmes de résistance des matériaux avec leurs solutions*. Albin Michel. Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Ducout. (1997). *Ponts métalliques—Conception générale C 2 675. Techniques de l'Ingénieur*.

Duverger. (1888). Décision ministérielle. 14 juin 1879. *Mémoires de la Société des ingénieurs civils. http://cnum.cnam.fr/redir?ECCMC6.49*, *50*, 171. http://cnum.cnam.fr/redir?ECCMC6.49

Eiffel, G. (1880). Mémoire sur le viaduc métallique de Garabit. *Mémoires de la Société des ingénieurs civils https://cnum.cnam.fr/redir?ECCMC6.33*, *34*, 414. https://cnum.cnam.fr/redir?ECCMC6.33

Eiffel, G. (1888a). Mémoire présenté à l'appui du projet définitif du viaduc de Garabit. *Mémoires de la Société des ingénieurs civils. http://cnum.cnam.fr/redir?ECCMC6.49*, *50*, 55-184. http://cnum.cnam.fr/redir?ECCMC6.49

Eiffel, G. (1888b). Note sur les épreuves définitives du Viaduc de Garabit. *Mémoires de la Société des ingénieurs civils. Conservatoire Nationale des Arts et Métiers http://cnum.cnam.fr*, *49*, 547. https://cnum.cnam.fr/redir?ECCMC6.48

Goulet, J., Boutin, J.-P., & Lerouge, F. (2019). *Résistance des matériaux* (10e éd.). Dunod : Editions le Moniteur.

Koechlin, M. (1898). *Applications de la statique graphique* (2e éd.). gallica.bnf.fr

Murry, G. (1993). *M300 Techniques de l'Ingénieur—Aciers. Généralités*.

Ringot, E. (2017). *Calcul des ouvrages : Résistance des matériaux et fondements du calcul des structures*. Eyrolles.

Ringot, E., Husson, B., & Vidal, T. (2023). *Calcul des ouvrages : Applications exercices et problèmes résolus de résistance des matériaux et de calcul des structures* (2eme éd). Eyrolles.

Seyrig, T. (1878). *Le pont sur le Douro de MM. G. Eiffel et Cie* (Société des ingénieurs civils, Vol. 31, p. 741-816). https://cnum.cnam.fr/redir?ECCMC6.30

Tissandier, G. (1888). Le viaduc de Garabit. *La Nature*, *Seizième année, deuxième semestre*, p391. https://cnum.cnam.fr/redir?4KY28.31

Viaduc de Garabit. (s. d.). Consulté 29 décembre 2024, à l'adresse https://fr.wikipedia.org/wiki/Viaduc_de_Garabit

Webographie

https://www.garabit-viaduc-eiffel.com/ (Copyright © 2024 Syndicat Mixte Garabit Grandval)

https://passerelles.essentiels.bnf.fr/fr/chronologie/construction/44259ad3-6fa5-4b74-8bd8-f9a025239ead-viaduc-garabit