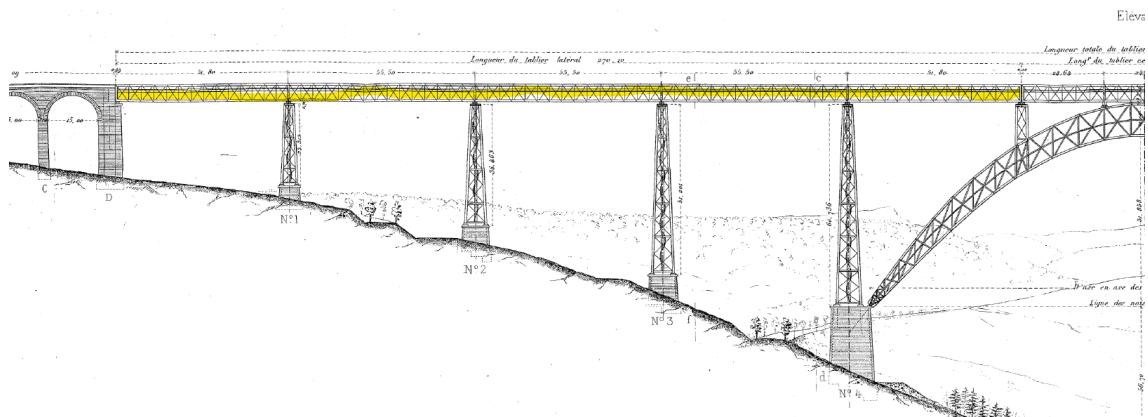


# Dimensionnement du viaduc de Garabit

# Calcul du Tablier Marvejols



## Table des Matières

<b>1</b>	<b>DESCRIPTION.....</b>	<b>3</b>
1.1	DONNEES GENERALES .....	3
1.2	POIDS PERMANENT ET CHARGE PENDANT L'EPREUVE PAR METRE COURANT DE TABLIER .....	3
<b>2</b>	<b>TABLIER MARVEJOLS. TABLES HORIZONTALES DES POUTRES PRINCIPALES .....</b>	<b>5</b>
2.1	OBJECTIF ET DEMARCHE .....	5
2.2	CAS DE CHARGE ETUDES.....	5
2.3	MOMENTS SUR PILES .....	6
2.4	MOMENT MAXIMAL EN TRAVEE .....	9
2.5	AUTRE METHODE ANALYTIQUE POUR LE CALCUL DU MOMENT FLECHISSANT MAXIMAL EN TRAVEE .....	9
2.6	CALCULS SUR ROBOT STRUCTURAL ANALYSIS .....	10
2.7	MOMENT FLECHISSANT : SYNTHESE .....	12
2.8	DIAGRAMME DES MOMENTS FLECHISSANT .....	13
2.9	SECTIONS DES POUTRES PRINCIPALES .....	16
<b>3</b>	<b>TABLIER MARVEJOLS. TREILLIS DES PAROIS VERTICALES .....</b>	<b>21</b>
3.1	HYPOTHESES.....	21
3.2	ÉVALUATION DES EFFORTS TRANCHANTS PAR STATIQUE GRAPHIQUE .....	21
3.3	ÉVALUATION DES EFFORTS DANS LES BARRES DE TREILLIS .....	25
3.4	TREILLIS DES PAROIS VERTICALES. ANALYSE DES CALCULS D'EIFFEL.....	27
<b>4</b>	<b>TABLIER MARVEJOLS. PANNEAUX .....</b>	<b>31</b>
4.1	PANNEAUX DE LA CULEE MARVEJOLS ET DE LA PALEE B.....	31
4.2	PANNEAUX DES PILES.....	34
<b>5</b>	<b>TABLIER MARVEJOLS. PIECES DE PONT.....</b>	<b>35</b>
<b>6</b>	<b>TABLIER MARVEJOLS. LONGERONS .....</b>	<b>41</b>
<b>7</b>	<b>TABLIER MARVEJOLS. CONTREFICHES.....</b>	<b>43</b>
	<b>REFERENCES.....</b>	<b>46</b>

# 1 Description

Le tablier Marvejols est une poutre continue de cinq travées sur six appuis simples.

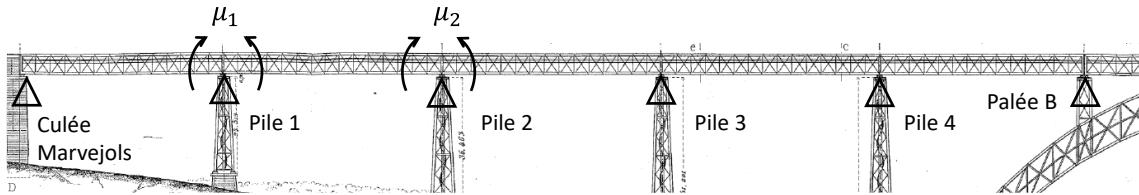


Figure 1. Tablier Marvejols

## 1.1 Données générales

- Panneau plein sur la culée d'une largeur de 0,240 m
- Nombre de travées : 5
- Longueur  $L_i$  de la travée i :  $L_1 = L_5 = 51,80 \text{ m}$  ;  $L_2 = L_3 = L_4 = 55,50 \text{ m}$
- Nombre de panneaux dans une travée extrême : 14
- Nombre de panneaux dans une travée intermédiaire : 15
- Longueur totale : 270,340 m
- Largeur des panneaux, espacement des pièces de pont : 3,700 m
- Ecartement d'axe en axe des poutres principales : 5,000m
- Hauteur des poutres : 5,160 m

## 1.2 Poids permanent et charge pendant l'épreuve par mètre courant de tablier

Le poids du tablier est estimé à 3390 kg/m (fers 2510 kg, platelage 400 kg, bois et rails 300 kg, passerelle 180 kg). On en déduit une **charge permanente (poids propre) sur chaque poutre de 1695 kg/m**.

La surcharge est estimée à 4800 kg/m, par décision ministérielle (Eiffel, 1888, p. 179). Cette surcharge correspond à « *un train de locomotives entièrement composé de machines du type 1001 de la Compagnie du Midi* » (Eiffel, 1888, p. 75). En effet, sur la figure ci-dessous, la somme des efforts des essieux divisée par la longueur donne

$$\frac{13600 \times 2 + 14400 + 13200 + 2 \times 10000}{15,7} = 4\,764 \text{ kg/m}$$

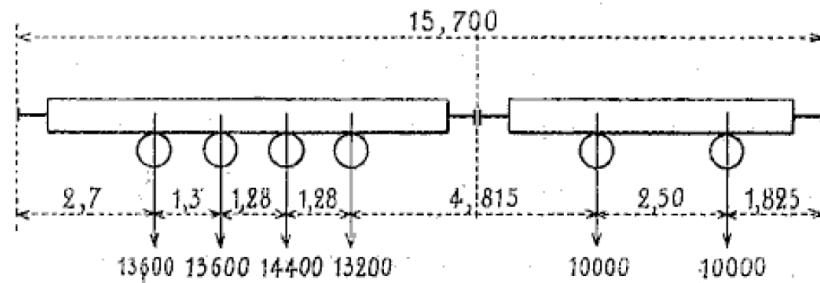


Figure 2. Train de locomotives entièrement composé de machines du type 1001 de la Compagnie du Midi  
(Eiffel, 1888a, p. 75)

On obtient une charge totale pendant l'épreuve de 8190 kg/m, soit **une charge totale pendant l'épreuve sur chaque poutre de 4095 kg/m**.

## 2 Tablier Marvejols. Tables horizontales des poutres principales

### 2.1 Objectif et démarche

Les tables horizontales des poutres principales sont calculées « *de manière qu'elles puissent résister aux moments fléchissants sous l'effet des charges* » (Eiffel, 1888, p. 70).

C'est là une démarche que nous ne laisserons pas implicite : Eiffel n'essaie pas de calculer la part de flexion reprise par les barres de treillis et la part reprise par les tables horizontales, tout comme il n'essaiera pas de calculer la part de l'effort tranchant reprise par les barres de treillis et la part reprise par les tables horizontales. Pour simplifier son analyse, il considère que les tables horizontales doivent résister à l'ensemble du moment fléchissant tandis que les barres de treillis doivent résister à l'ensemble de l'effort tranchant. La détermination des cheminements réels des efforts au sein de la structure n'est pas cherchée.

L'objectif du dimensionnement des tables horizontales est de déterminer les sections nécessaires pour résister aux contraintes normales induites par le moment fléchissant. Eiffel détermine le moment fléchissant dans toute section du tablier. Si la section constante des tables n'est pas suffisante pour résister à ce moment fléchissant, elle est renforcée par des semelles supplémentaires.

On présente ci-dessous les étapes du calcul :

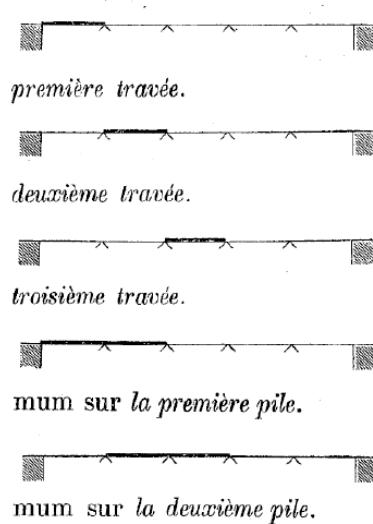
1. Détermination des cas de charges induisant les plus grands moments en travée
2. Calcul des moments sur appuis (sur la culée Marvejols, les piles et la palée B) pour chaque cas de charge
3. Calcul du moment fléchissant maximal en travée pour chaque cas de charge
4. Tracé par statique graphique du moment fléchissant dans le tablier, pour chaque cas de charge
5. Tracé de l'enveloppe du moment fléchissant, soit pour chaque section, le moment maximal sur tous les cas de charge et pour la courbe de lançage (le calcul du moment fléchissant dû au lançage n'est pas détaillé)
6. Calcul du moment résistant apporté par la partie constante des poutres des tabliers
7. Ajout de semelles supplémentaires en cas de besoin de renforcement

Par cette méthode, Eiffel ajuste en chaque section du tablier la quantité de matière à ajouter, afin d'utiliser le strict minimum nécessaire.

Détaillons maintenant ces calculs.

### 2.2 Cas de charge étudiés

Les cinq cas avec surcharge sont représentés en Figure 3. Le sixième cas correspond à la charge permanente seulement (poids propre du tablier). On a résumé les six cas dans le Tableau 1.



**1<sup>o</sup> Première travée chargée.** — Le moment est maximum dans la première travée.

**2<sup>o</sup> Deuxième travée chargée.** — Le moment est maximum dans la deuxième travée.

**3<sup>o</sup> Troisième travée chargée.** — Le moment est maximum dans la troisième travée.

**4<sup>o</sup> Première et deuxième travées chargées.** — Le moment est maximum sur la première pile.

**5<sup>o</sup> Deuxième et troisième travées chargées.** — Le moment est maximum sur la deuxième pile.

Figure 3. Cas de charges étudiés par Eiffel pour le tablier côté Marvejols (Eiffel, 1888)

	$p_1$ (kg/m)	$p_2$ (kg/m)	$p_3$ (kg/m)	$p_4$ (kg/m)	$p_5$ (kg/m)
Cas 1	4095	1695	1695	1695	1695
Cas 2	1695	4095	1695	1695	1695
Cas 3	1695	1695	4095	1695	1695
Cas 4	4095	4095	1695	1695	1695
Cas 5	1695	4095	4095	1695	1695
Cas 6	1695	1695	1695	1695	1695

Tableau 1. Tablier Marvejols. Cas de charges

## 2.3 Moments sur piles

Eiffel utilise la théorie de Clapeyron pour calculer les moments sur appuis  $\mu_1$  et  $\mu_2$  (Figure 4), théorie aussi appelée théorème des trois moments.

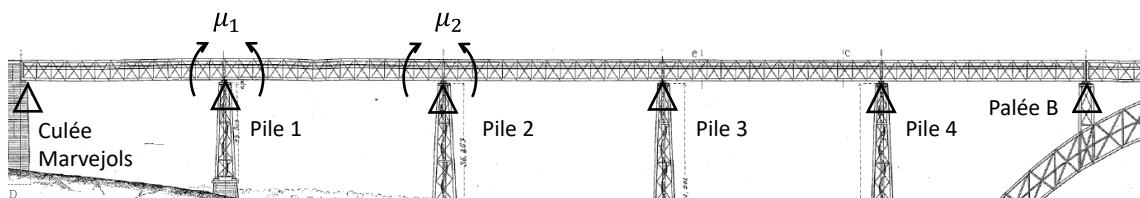


Figure 4. Tablier Marvejols. Moments sur piles

La théorie de Clapeyron donne les formules suivantes pour la valeur des moments fléchissants sur piles :

$$\mu_1 = \frac{p_1(30l_1^4 + 26l_1^3l_2) + p_2(22l_1l_2^3 + 19l_2^4) - p_3(8l_1l_2^3 + 5l_2^4) + p_4(2l_1l_2^3 + l_2^4) - p_5l_1^3l_2}{4(60l_1^2 + 104l_1l_2 + 45l_2^2)}$$

$$\mu_2 = \frac{-p_1(8l_1^4 + 7l_1^3l_2) + p_2(16l_1^2l_2^2 + 22l_1l_2^3 + 7l_2^4) + p_3(12l_1^2l_2^2 + 22l_1l_2^3 + 10l_2^4) - p_4(4l_1^2l_2^2 + 6l_1l_2^3 + 2l_2^4) + p_5(2l_1^4 + 2l_1^3l_2)}{4(60l_1^2 + 104l_1l_2 + 45l_2^2)}$$

Nous désignerons par  $l_1$  la portée des travées extrêmes et par  $l_2$  celle des travées intermédiaires.

Figure 5. Formules pour les moments sur piles utilisées par Eiffel (Eiffel, 1888)

Les formules du mémoire ne sont pas lisibles et contiennent des erreurs mais on les retrouve dans un ouvrage de son associé Maurice Koechlin (1856-1946) (Figure 6). Koechlin utilise la lettre M dans son ouvrage pour les moments sur piles tandis qu'Eiffel utilise la lettre  $\mu$  pour les moments sur piles et M pour les moments sur travée. Les résultats des formules de la Figure 6 sont donnés dans le Tableau 2.

**4° Poutres à cinq travées dont les deux extrêmes sont égales ainsi que les trois centrales.**

$$M_1 = \frac{p_1(30l_1^4 + 26l_1^3l_2) + p_2(22l_1l_2^3 + 19l_2^4) - p_3(6l_1l_2^3 + 5l_2^4) + p_4(2l_1l_2^3 + l_2^4) - p_5l_1^3l_2}{4(60l_1^2 + 104l_1l_2 + 45l_2^2)}$$

$$M_2 = \frac{-p_1(8l_1^4 + 7l_1^3l_2) + p_2(16l_1^2l_2^2 + 22l_1l_2^3 + 7l_2^4) + p_3(12l_1^2l_2^2 + 22l_1l_2^3 + 10l_2^4) - p_4(4l_1^2l_2^2 + 6l_1l_2^3 + 2l_2^4) + p_5(2l_1^4 + 2l_1^3l_2)}{4(60l_1^2 + 104l_1l_2 + 45l_2^2)}$$

Figure 6. Théorème des trois moments, poutre à cinq travées dont les deux extrêmes sont égales ainsi que les trois centrales (Koechlin, 1898, p. 621)

Dénominateur	-2394381	-2394381	-2394381	-2394381	-2394381	-2394381
$\mu_0$	0	0	0	0	0	0
$\mu_1$	-920547	-878981	-402203	-1296518	-778173	-503011
$\mu_2$	-309642	-815899	-811292	-704040	-1205691	-421500

Tableau 2. Moments sur piles avec formules du mémoire

Vérification du cas 1

Le tablier est hyperstatique de degré externe  $d_e = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 3 = 4$  et de degré interne  $d_i = 0$ . Le degré global a pour valeur  $d = d_i + d_e = 4$ . Il y a 4 inconnues de liaison surabondantes, donc il nous faut écrire 4 équations supplémentaires. Ces équations sont apportées par le théorème des 3 moments sur les appuis 1, 2, 3 et 4.

Théorème sur l'appui i, avec i=1...4

$$l_i \cdot \mu_{i-1} + 2 \cdot (l_i + l_{i+1}) \cdot \mu_i + l_{i+1} \cdot \mu_{i+1} = 6EI \left( -p_{i+1} \cdot \frac{l_{i+1}^3}{24EI} - p_i \cdot \frac{l_i^3}{24EI} \right)$$

On obtient un système des 4 équations ; les 4 inconnues sont les moments sur piles  $\mu_i$  avec  $i=1\dots 4$ .

La résolution littérale est fastidieuse et déjà proposée par Koechlin. On propose d'écrire le système d'équations et de le résoudre numériquement.

$$A \cdot X = B; X = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix}$$

La matrice A du système d'équations est donnée ci-dessous (la même pour tous les cas).

$$A = \begin{pmatrix} 2 \cdot (l_1 + l_2) & l_2 & 0 & 0 \\ l_2 & 2 \cdot (l_2 + l_2) & l_2 & 0 \\ 0 & l_2 & 2 \cdot (l_2 + l_2) & l_2 \\ 0 & 0 & l_2 & 2 \cdot (l_1 + l_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 214,6 & 55,5 & 0 & 0 \\ 55,5 & 222 & 55,5 & 0 \\ 0 & 55,5 & 222 & 55,5 \\ 0 & 0 & 55,5 & 214,6 \end{pmatrix}$$

Le second membre pour le cas 1 est donné ci-dessous.

$$B = \begin{pmatrix} -214734593 \\ -144883409 \\ -144883409 \\ -131339493 \end{pmatrix}$$

On peut résoudre le système sur Python :

```
import numpy as np
from scipy import linalg

# On veut résoudre le système A.X=B. On sait que la solution est X=inv(A).B

# Définition de la matrice du système linéaire
A = np.array([(214.6,55.5,0,0),(55.5,222,55.5,0),(0,55.5,222,55.5),(0,0,55.5,214.6)])
print('matrice du système linéaire')
print(A)
print("")

# Calcul du déterminant
detA=linalg.det(A)
print('determinant de A =',detA)
print("")

# Définition du second membre
B = np.array([-214734593,-144883409,-144883409,-131339493])
print('second membre =',B)
print("")

# Inverse de la matrice A
iA = linalg.inv(A)
```

```

print('inverse de A')
print(iA)
print("")

# Calcul de X
X=iA.dot(B)
print('solution X =',X)
print("")

```

On retrouve bien les résultats obtenus par Eiffel pour le cas 1.

	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$
Article	920 547	309 624	/	/
Résolution Python	-920 547	-309 642	-451 398	-495 279

Tableau 3. Tablier Marvejols. Moments sur piles cas 1. Vérification des formules de Koechlin

## 2.4 Moment maximal en travée

« Le maximum du moment fléchissant dans le courant d'une travée quelconque est donné par l'expression

$$M_{max} = \mu_n - \frac{p}{2} \cdot \left( \frac{\mu_n - \mu_{n+1}}{pl} + \frac{l}{2} \right)^2$$

Dans laquelle  $\mu_n$  et  $\mu_{n+1}$  représentent les moments fléchissants sur les piles contiguës à la travée,  $l$  la portée de la travée et  $p$  la charge par mètre courant. » (Eiffel, 1888, p. 71)

Les résultats sont résumés dans le Tableau 4.

## 2.5 Autre méthode analytique pour le calcul du moment fléchissant maximal en travée

En partant de la même expression pour le moment sur piles, on peut utiliser la formule ci-dessous pour le moment dans la travée 1

$$M(x) = M_0(x) + \mu_0 \cdot \left( 1 - \frac{x}{L} \right) + \mu_1 \cdot \frac{x}{L}$$

Avec  $\mu_0 = 0$  (moment sur la culée Marvejols) et  $M_0(x)$  moment dans la travée isostatique associée (travée considérée comme indépendante et non reliée aux autres travées).

$$M_0(x) = p_1 \cdot \frac{L}{2} \cdot x - p_1 \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$M(x) = p_1 \cdot \frac{L}{2} \cdot x - p_1 \cdot \frac{x^2}{2} - (p_1 + p_2) \cdot \frac{L^2}{16} \cdot \frac{x}{L}$$

Le moment fléchissant maximal en travée est alors donné par

$$\frac{dM}{dx} = p_1 \cdot \frac{L}{2} - p_1 \cdot x - (p_1 + p_2) \cdot \frac{L}{16}$$

$$\frac{dM}{dx} = 0 \Leftrightarrow 0 = p_1 \cdot \frac{L}{2} - p_1 \cdot X - (p_1 + p_2) \cdot \frac{L}{16}$$

$$X = \frac{1}{p_1} \cdot \left( -(p_1 + p_2) \cdot \frac{L}{16} + p_1 \cdot \frac{L}{2} \right)$$

$$M_{max} = M(X)$$

Avec cette démarche on obtient aussi l'abscisse X où le moment fléchissant est maximal.

## 2.6 Calculs sur Robot Structural Analysis

On présente ci-dessous les calculs réalisés sur le logiciel Robot Structural Analysis.

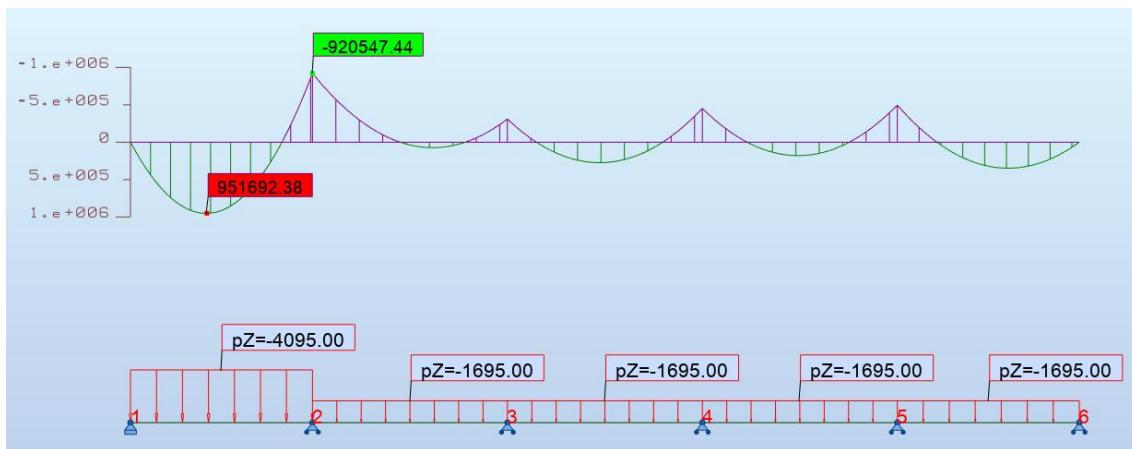


Figure 7. Résultats sur RSA. Tablier Marvejols. Moment fléchissant cas 1

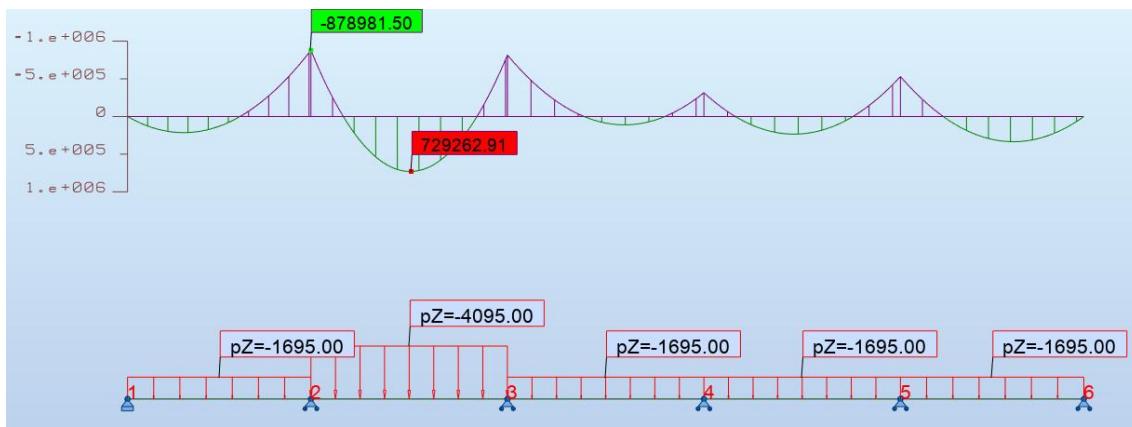


Figure 8. Résultats sur RSA. Tablier Marvejols. Moment fléchissant cas 2

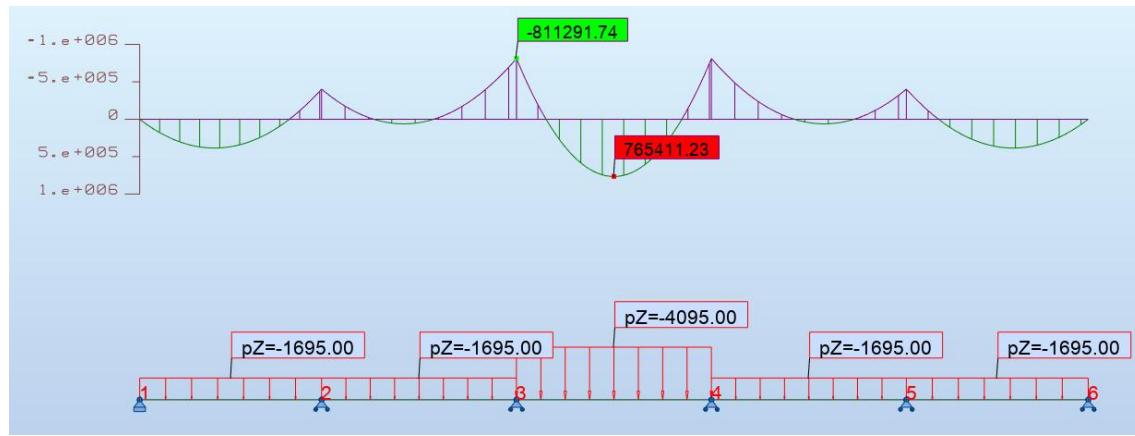


Figure 9. Résultats sur RSA. Tablier Marvejols. Moment fléchissant cas 3

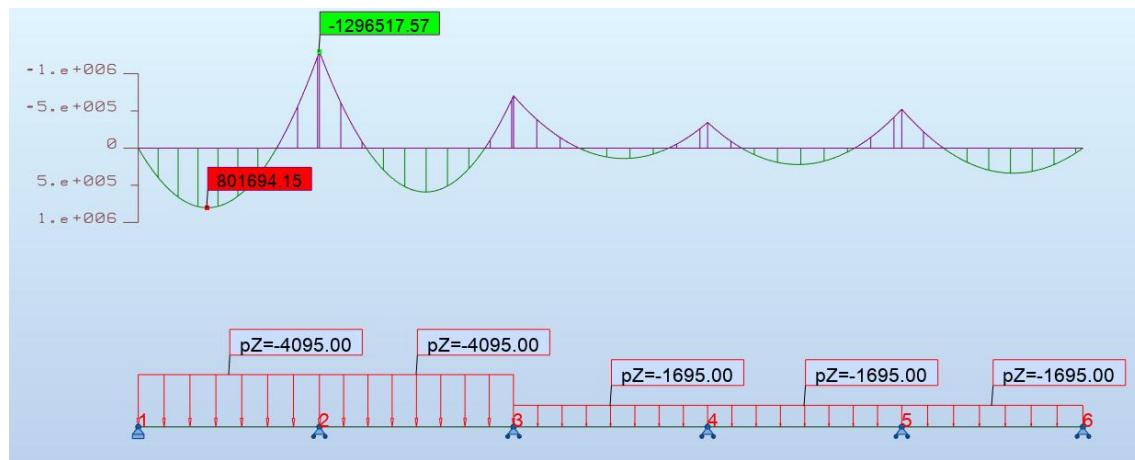


Figure 10. Résultats sur RSA. Tablier Marvejols. Moment fléchissant cas 4

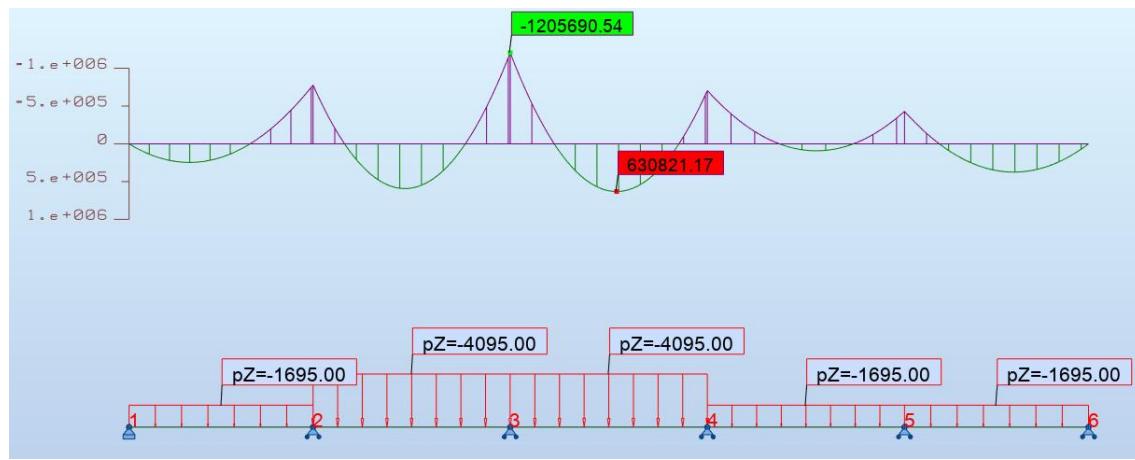


Figure 11. Résultats sur RSA. Tablier Marvejols. Moment fléchissant cas 5

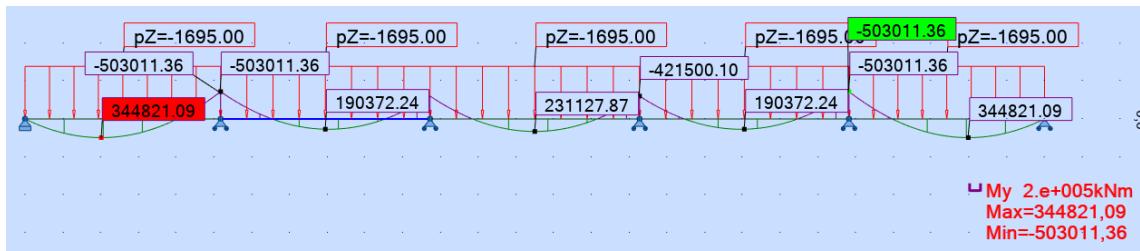


Figure 12. Résultats sur RSA. Tablier Marvejols. Moment fléchissant cas 6 poids permanent.

## 2.7 Moment fléchissant : synthèse

Le Tableau 4 compare les résultats du mémoire avec les résultats que nous avons obtenus par calcul analytique et avec le logiciel RSA. Le degré de précision des calculs d'Eiffel est tout à fait remarquable.

Cas	Calculs RSA	Calcul analytique §2.5	Mémoire
1.	$\mu_1 = 920\ 547$ $\mu_2 = 309\ 642$ $M_1 = -951\ 692$	$\mu_1 = 920\ 547$ $\mu_2 = 309\ 642$ $M_1 = -951\ 771$	1 <sup>er</sup> Cas. — Première travée chargée : $\mu_1 = 920\ 518$ $\mu_2 = 309\ 638$ $M' = - 951\ 947$
2.	$\mu_1 = 878\ 981$ $\mu_2 = 815\ 889$ $M_2 = -729\ 263$	$\mu_1 = 878\ 981$ $\mu_2 = 815\ 889$ $M_2 = -729\ 421$	2 <sup>e</sup> Cas. — Deuxième travée chargée : $\mu_1 = 878\ 950$ $\mu_2 = 815\ 887$ $M' = - 729\ 448$
3.	$\mu_1 = 402\ 203$ $\mu_2 = 811\ 292$ $M_3 = -765\ 411$	$\mu_1 = 402\ 203$ $\mu_2 = 811\ 292$	3 <sup>e</sup> Cas. — Troisième travée chargée : $\mu_1 = 402\ 190$ $\mu_2 = 811\ 279$ $M' = - 765\ 463$
4.	$\mu_1 = 1\ 296\ 518$	$\mu_1 = 1\ 296\ 518$	4 <sup>e</sup> Cas. — Première et deuxième travées chargées : $\mu_1 = 1\ 296\ 478$ $\mu_2 = 794\ 047$
5.	$\mu_1 = 778\ 173$ $\mu_2 = 1\ 205\ 691$	$\mu_1 = 778\ 173$ $\mu_2 = 1\ 205\ 691$	5 <sup>e</sup> Cas. — Deuxième et troisième travées chargées : $\mu_1 = 778\ 131$ $\mu_2 = 1\ 205\ 668$
6.	$\mu_1 = 503\ 011$ $\mu_2 = 421\ 500$ $M_1 = -344\ 821$ $M_2 = -190\ 372$ $M_3 = -231\ 128$	$\mu_1 = 503\ 011$ $\mu_2 = 421\ 500$ $M_1 = -344\ 882$ $M_2 = -190\ 009$	6 <sup>e</sup> Cas. — Le tablier ne supporte aucune charge : $\mu_1 = 502\ 990$ $\mu_2 = 421\ 495$  $M' = - 344\ 850$ $M' = - 191\ 480$ $M' = - 231\ 420$

Tableau 4. Tablier Marvejols. Moment fléchissant.  $M_i$  moment maximal en travée  $i$ .  $\mu_i$  moment sur pile  $i$

## 2.8 Diagramme des moments fléchissant

« Au moyen des valeurs énumérées ci-dessus, il est facile de tracer, pour chaque cas, la parabole des moments fléchissants. Chacune de ces courbes porte sur l'épure le numéro du cas de surcharge auquel il correspond ». (Eiffel, 1888, p. 72). On présente ci-dessous un aperçu ; l'épure complet est fournie dans la planche 176 du mémoire.

En toute rigueur, Eiffel trace la valeur absolue du moment fléchissant, c'est pourquoi l'ensemble de l'épure comporte des moments positifs.

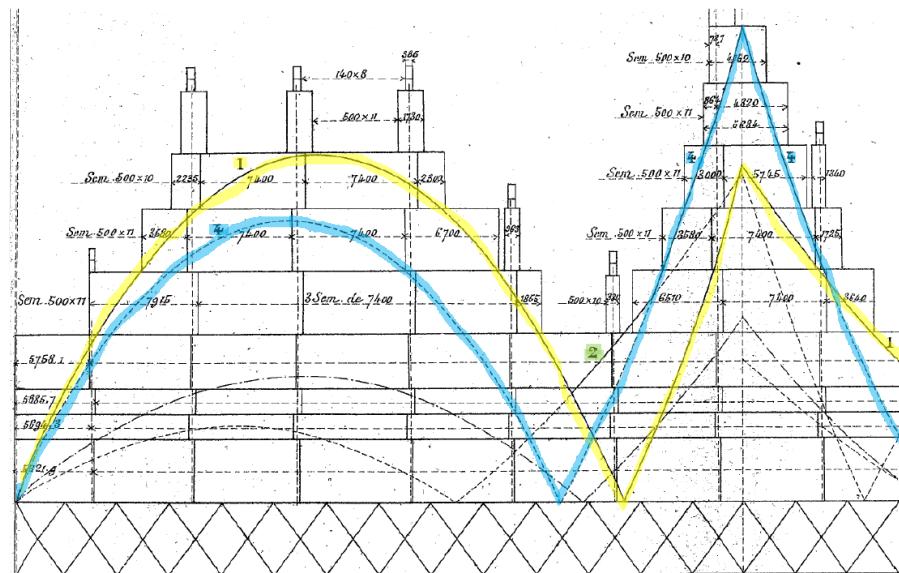


Figure 13. Tablier Marvejols. Diagramme des moments fléchissant (Eiffel, 1888, p. Planche 176)

A partir des diagrammes des moments fléchissant pour chaque cas de charge, Eiffel trace en gras l'enveloppe du moment fléchissant, soit le moment fléchissant maximal dans une section entre tous les cas de charge, en valeur absolue :  $\text{Max}(M(x)_i, i = 1 \dots 6)$ .

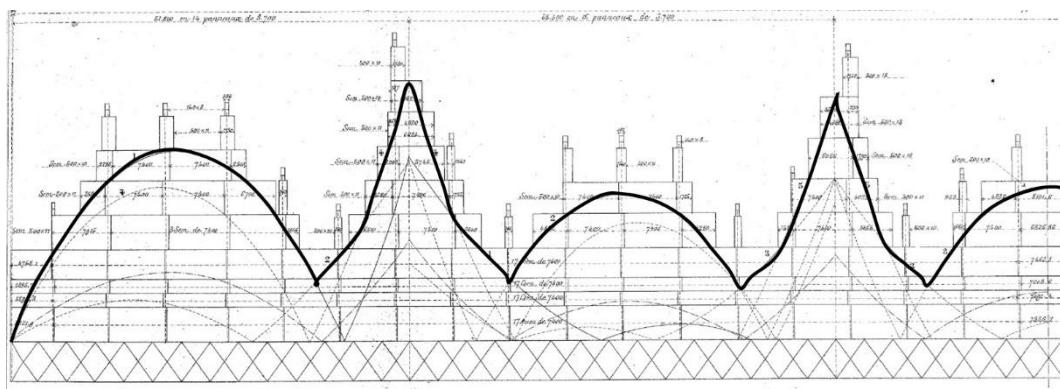
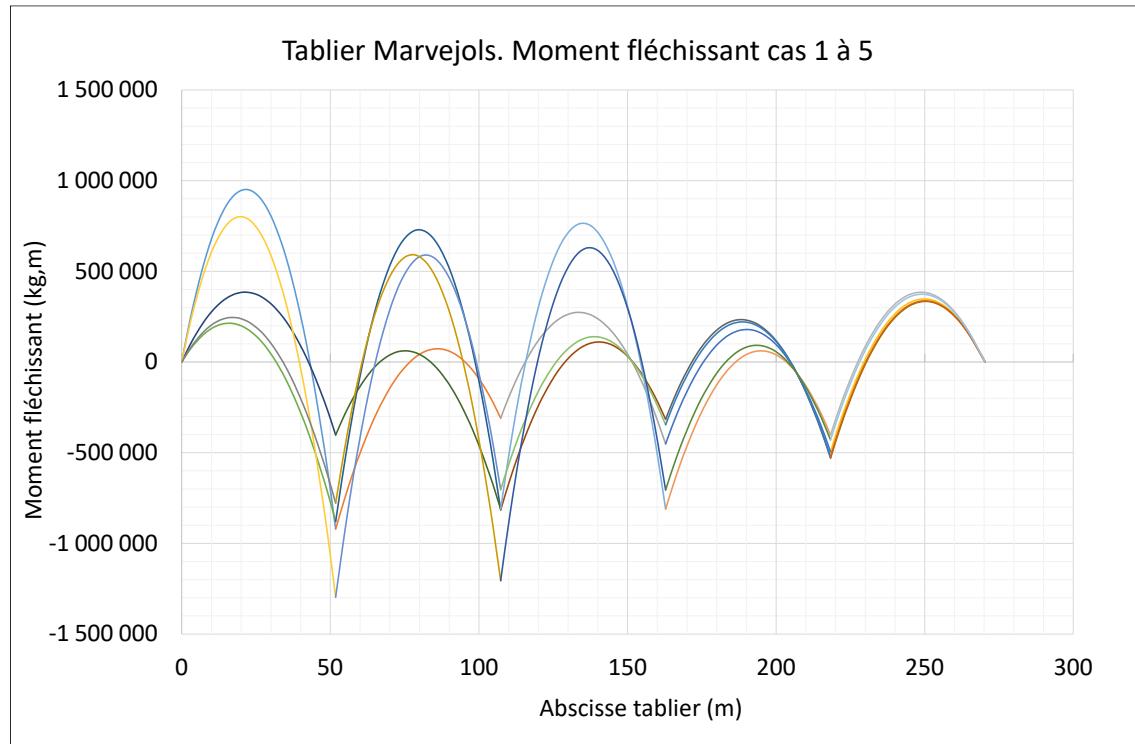


Figure 14. Tablier Marvejols. Epure des moments fléchissant et sections des poutres (Eiffel, 1888, p. Planche 176). Seule la moitié gauche du tablier est présentée ici, la partie de droite est obtenue par symétrie, pour un passage de train dans l'autre sens.

On a tracé ci-dessous les moments fléchissant pour les cas de charge 1 à 5 avec la formule donnant le moment fléchissant en travée i (voir annexe) :

$$M(x) = M_0(x) + \mu_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \mu_1 \cdot \frac{x}{L}$$

On cherche, pour chaque section, le moment maximal. Ce moment maximal est tracé en Figure 16. On retrouve le tracé d'Eiffel de la Figure 14.



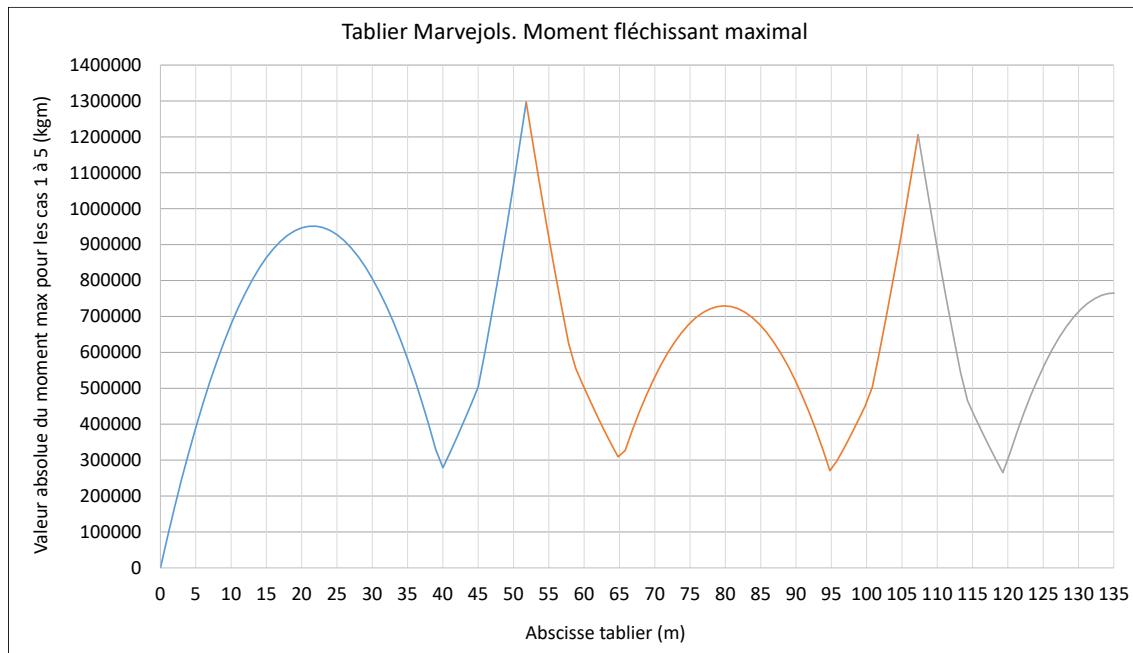


Figure 16. Tablier Marvejols. Moment fléchissant maximal.

### Remarque

On observe aussi la « courbe de lancement » sur l'épure. Eiffel calcule en effet le moment fléchissant maximal en toute section, lors de l'opération de lancement du tablier. Le lancement est l'opération de construction consistant à assembler le tablier sur la terre et à le tirer ou le pousser, pour le poser sur ses appuis. On donne ci-dessous un schéma publié dans la revue « La Nature » en 1888.

Nous calculerons la courbe de lancement dans le cas du tablier Neussargues, dans le prochain chapitre.

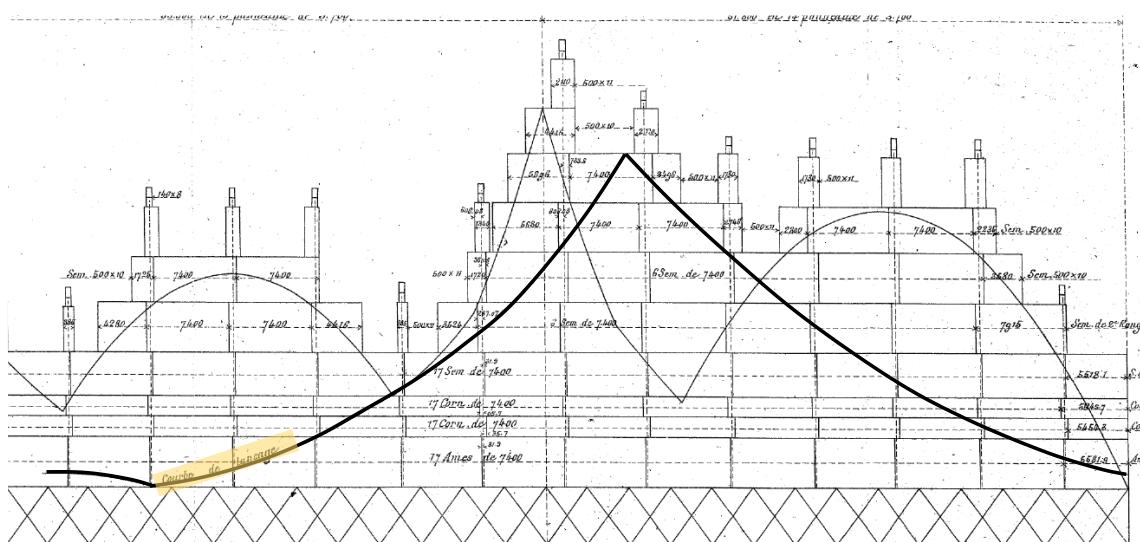


Figure 17. Tablier Marvejols. Courbe de lancement

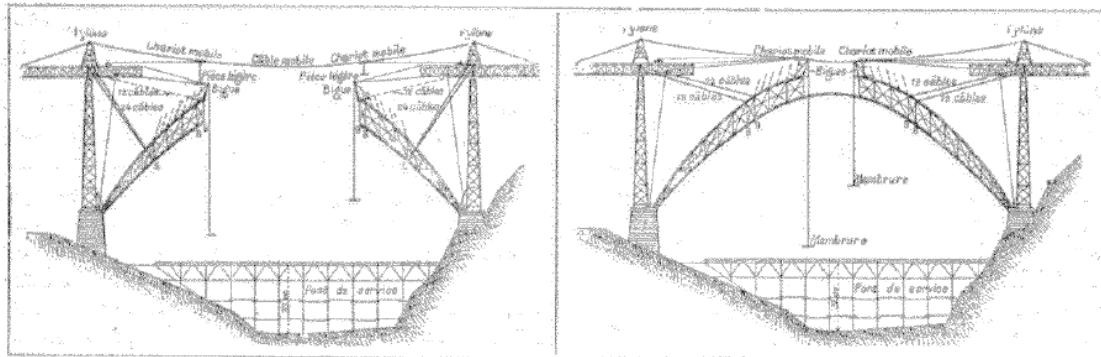


Fig. 1. — Construction du viaduc de Garabit.  
Amarrage de l'arc et du tablier.

Fig. 2. — Amarrage de l'arc et du tablier.  
Dernière phase.

Figure 18. Étape de la construction du viaduc (Tissandier, 1883, p. 392)

## 2.9 Sections des poutres principales

« Les poutres doivent présenter en chaque point une section telle que la valeur du moment de résistance qui en résulte soit au moins égale à celle du moment fléchissant, au point considéré ». (Eiffel, 1888, p. 72).

En chaque point du tablier, Eiffel adapte ainsi la section des poutres en fonction du moment fléchissant, afin d'assurer une résistance suffisante sans ajout de matière inutile.

On décrit ci-dessous la méthode utilisée (Eiffel, 1888, p. 72).

« Les poutres doivent présenter en chaque point une section telle que la valeur du moment de résistance qui en résulte soit au moins égale à celle du moment fléchissant, au point considéré.

*Le moment de résistance a pour expression*

$$\frac{R \cdot I}{v}$$

R représente le coefficient de travail maximum du fer, soit 6 kg par millimètre carré soit 6 000 000 kg/m<sup>2</sup>. I le moment d'inertie de la section considérée. v, la distance de la fibre la plus éloignée de la fibre moyenne à cette dernière fibre ».

La notion de moment résistant vient du raisonnement ci-après. La contrainte normale maximale de flexion  $\sigma$  dans une section a pour expression

$$\sigma = \frac{M \cdot v}{I}$$

Donc

$$M = \frac{\sigma \cdot I}{v}$$

La contrainte maximale ne doit pas dépasser  $R = 6 \text{ kg/mm}^2$  donc le moment maximal admissible par la section, appelé moment résistant est

$$M_{\text{résistant}} = \frac{R \cdot I}{v}$$

Il reste maintenant à définir les sections.

La section par défaut, appelée section constante, est donnée Figure 19.

Le calcul du moment quadratique  $I$  de la partie constante des poutres des tabliers est opéré par soustraction de sections. Eiffel considère le moment quadratique d'un rectangle de largeur 0,500 m, hauteur 5,180 m. Il enlève ensuite les moments quadratiques des parties vides.

De plus,

$$v = \frac{5,180}{2} = 2,590$$

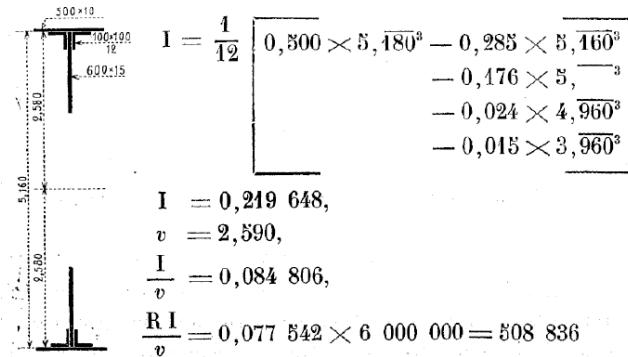


Figure 19. Tablier Marvejols. "Partie constante" d'une poutre (Eiffel, 1888, p. 72). Section par défaut utilisée en toute section des poutres des tabliers puis renforcée au strict nécessaire, en fonction du moment fléchissant

Dans la majeure partie du tablier, cette section est insuffisante. Elle est donc renforcée à l'aide de semelles supplémentaires (Figure 20).

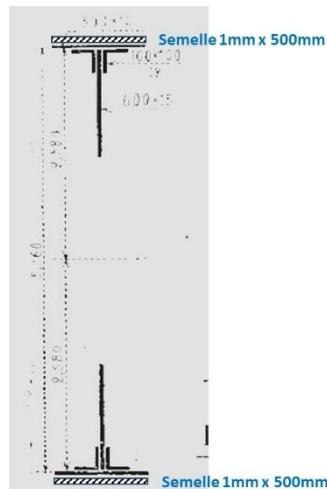


Figure 20. Illustration de l'ajout d'une semelle épaisseur 1mm au-dessus et en-dessous de la partie constante des poutres des tabliers

Eiffel précise ensuite que « *L'augmentation du moment de résistance correspondant à un mm d'épaisseur des semelles est de  $0,500 \times 0,001 \times 6\,000\,000 \times 5,160 = 15\,480$*  ». On propose d'expliquer ce résultat.

La section d'une semelle de largeur 0,500 m épaisseur 1 mm est  $S = 0,500 \times 0,001 m^2$ . La distance d'une semelle au centre d'inertie de la section est, sans tenir compte de la position précise du centre de gravité de la semelle supplémentaire

$$d = \frac{5,160}{2} m$$

D'après le théorème de Huygens, une semelle en haut et en bas de la section augmente le moment d'inertie de

$$2 \times (I_{semelle} + S \cdot d^2)$$

Eiffel néglige de toute évidence  $I_{semelle}$ , moment d'inertie de chaque semelle par rapport à leur centre d'inertie. Nous y reviendrons. Ainsi, le moment d'inertie de deux semelles par rapport au centre de la section est environ  $2 \cdot S \cdot d^2$  et le moment résistant apporté par deux semelles de 1mm d'épaisseur a pour expression

$$\frac{R \cdot I}{v} = \frac{R \cdot 2 \cdot S \cdot d^2}{v}$$

$$\frac{R \cdot I}{v} = \frac{6\,000\,000 \times 2 \times 0,500 \times 0,001 \times \left(\frac{5,160}{2}\right)^2}{\frac{5,160}{2}} = 15\,480 \text{ kg.m}$$

La valeur de 15 480 kg.m est le moment résistant apporté par l'ajout de deux semelles d'épaisseur 1mm, une de chaque côté de la section constante (Figure 20).

En divisant par 15 480 l'excès du moment fléchissant sur le moment résistant de la section constante, Eiffel obtient l'épaisseur à donner aux semelles supplémentaires. » (Tableau 5).

MOMENTS M SUR TRAVÉES et moments $\mu$ sur piles	SECTION CONSTANTE	SEMELLES SUPPLÉMENTAIRES ajoutées à la section constante	VALEURS DE $\frac{1}{v}$			VALEUR DE R par $mm^2$
			DE LA SECTION constante	DES SEMELLES SUPPLÉMENTAIRES	TOTALES	
1 <sup>re</sup> TRAVÉE : 951 952		2 sem. $500 \times 11$	0,084 806	0,082 560	0,167 366	5,70
		1 sem. $500 \times 10$	"	"	"	"
2 <sup>e</sup> TRAVÉE : 729 448		1 sem. $500 \times 11$	"	0,046 440	0,131 246	5,55
		1 sem. $500 \times 7$	"	"	"	"
3 <sup>e</sup> TRAVÉE : 765 414		1 sem. $500 \times 11$	"	0,051 600	0,136 406	5,60
		1 sem. $500 \times 9$	"	"	"	"
1 <sup>re</sup> PILE : 1 296 478		4 sem. $500 \times 11$	"	0,439 320	0,224 126	5,77
		1 sem. $500 \times 10$	"	"	"	"
2 <sup>e</sup> PILE : 1 205 668		2 sem. $500 \times 11$	"	8,123 840	0,208 646	5,77
		2 sem. $500 \times 13$	"	"	"	"

Tableau 5. Tablier Marvejols. Sections des poutres, contrainte R maximale dans les sections (Eiffel, 1888, p. 73)

Exemple : travée 1

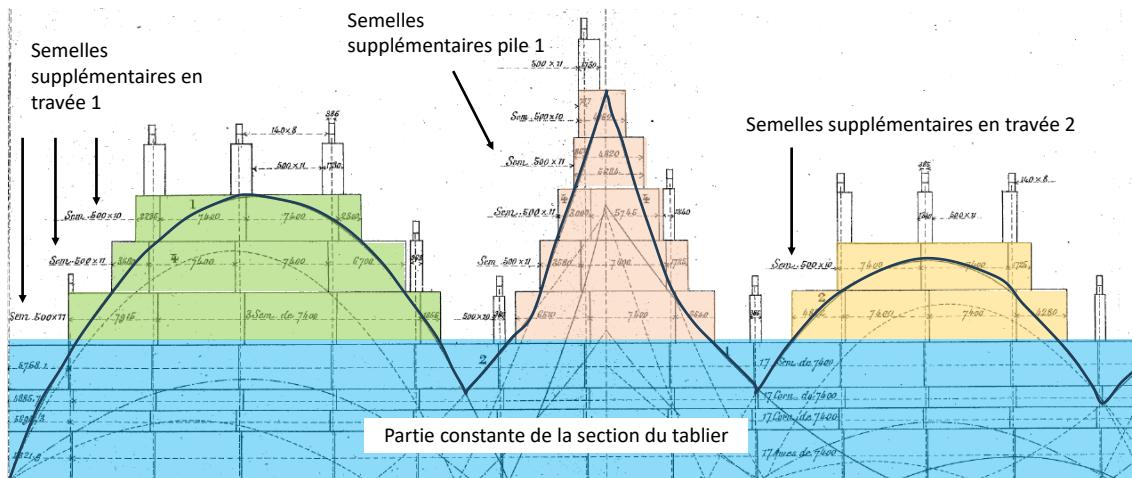
$$M_{max} = 951\ 962\ kg.m$$

Moment résistant de la partie constante : 508 836 kg.m. L'excès de moment fléchissant est  $951\ 962 - 508\ 836 = 443\ 126\ kg.m$ . L'épaisseur de semelle à ajouter vaut donc

$$\frac{443\ 126}{15\ 480} = 28,6$$

Il faut donc ajouter au moins 28,6 mm d'épaisseur de semelle à la section constante. Les résultats sont synthétisés ci-dessous.

L'ajout des semelles est représenté sur le diagramme des moments fléchissant, dans la planche 176 du mémoire (Figure 21).



*Figure 21. Tablier Marvejols. Sections des poutres*

### Remarque

Eiffel néglige de toute évidence moment d'inertie de chaque semelle par-rapport à leur centre d'inertie. Ce moment d'inertie que nous appelons  $I_{semelle}$  est donné par

$$I_{semelle} = \frac{0,500 \times 0,001^3}{12}$$

Le moment résistant correspondant a pour valeur

$$R \cdot \frac{I}{v} = R \cdot \frac{2 \cdot b \cdot h^3}{12} \cdot \frac{1}{v} = 6\,000\,000 \times \frac{2 \times 0,500 \times 0,001^3}{12} \times \frac{1}{0,5 \times 5,160 + 0,001}$$

$$R \cdot \frac{I}{\eta} = 1,94 \times 10^{-4} \text{ kg.m}$$

Ce moment est négligeable par-rapport au moment résistant calculé de 15 480 kg.m. Par ailleurs, négliger  $I_{semelle}$  tend à sous-estimer la résistance des sections.

# 3 Tablier Marvejols. Treillis des parois verticales

## 3.1 Hypothèses

« Les barres de treillis formant les parois verticales des poutres sont calculées de manière à pouvoir résister, à elles seules, aux efforts tranchants dans les poutres ». (Eiffel, 1888, p. 73).

On insiste encore sur l'hypothèse simplificatrice réalisée : Eiffel n'essaie pas de déterminer la distribution des efforts tranchants entre les barres de treillis et les tables horizontales des poutres.

Par ailleurs, Eiffel décompose le treillis en deux systèmes et en étudie un seul. Il considère que chaque barre reprend la moitié de l'effort tranchant  $P$ , l'une étant comprimée et l'autre tendue (Figure 22).

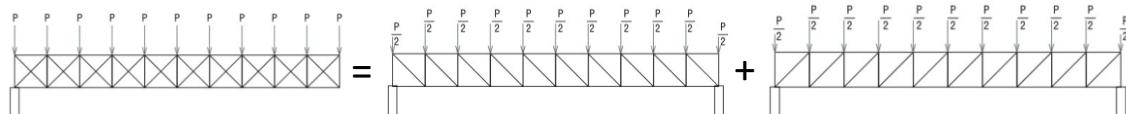


Figure 22. Tablier Marvejols. Décomposition du treillis en deux systèmes. Chacun reprend la moitié des efforts tranchants. Référence (Koechlin, 1898, p. 163)

## 3.2 Évaluation des efforts tranchants par statique graphique

Le plan du mémoire prête ici à confusion. En page 74, Eiffel décrit une méthode (calcul analytique des réactions aux appuis puis tracé de l'épure) puis utilise une autre méthode pour calculer les efforts tranchants. C'est cette autre méthode, « entièrement graphique », que nous allons décrire.

« Les efforts tranchants [...] obtenus en supposant une charge uniformément répartie sur la longueur entière des travées, [...] ne donnent pas les maxima en un point quelconque de la poutre ; ces derniers sont produits par la surcharge roulante d'un train de locomotives et de tenders. » (Eiffel, 1888, p. 74). Pour dimensionner les barres de treillis, Eiffel propose ainsi de modéliser la surcharge par des efforts ponctuels venant des essieux du train (Figure 23).

Un train de locomotives entièrement composé de machines du type 1001 de la Compagnie du Midi, dont le diagramme est figuré ci-contre, est supposé occuper toute la travée ; la roue d'avant de la première machine étant placée sur l'appui de gauche A. Les roues du train occupent les positions 1, 2, 3, etc.

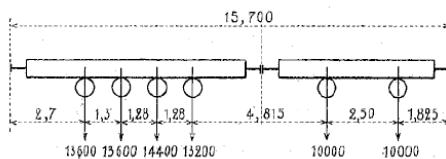


Figure 23. Tablier Marvejols. Cas de charge pour le calcul de l'effort tranchant, pour le dimensionnement des barres de treillis (Eiffel, 1888, p. 75)

Eiffel opère par statique graphique. Il additionne graphiquement les efforts tranchants

- Dus à la charge permanente, le poids propre du tablier (Figure 24)
- Dus aux essieux du train (Figure 25)
- Dus à la continuité des travées et dépendant des moments sur piles (Figure 26)

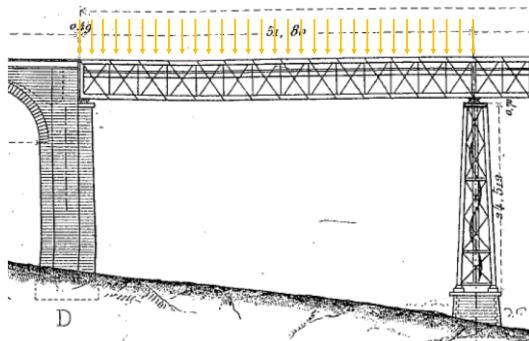


Figure 24. Tablier Marvejols. Charge permanente travée 1

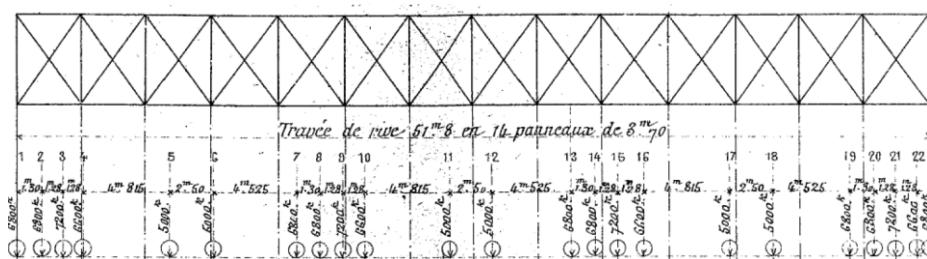
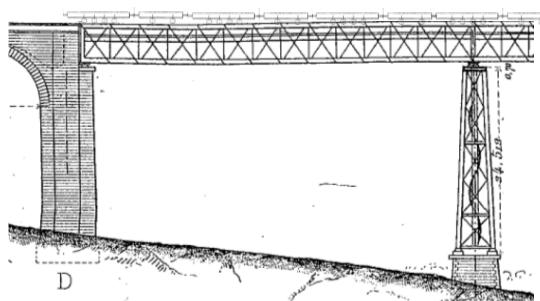


Figure 25. Tablier Marvejols. Charges due aux essieux du train sur la travée 1 (Eiffel, 1888)

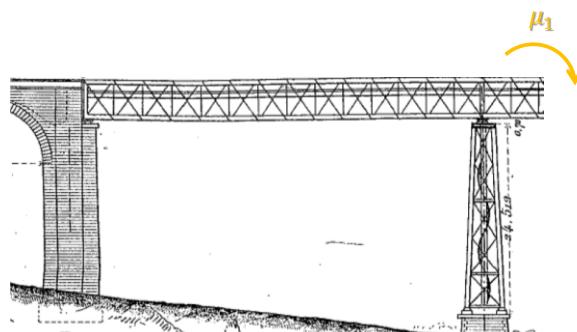


Figure 26. Tablier Marvejols. Moment sur pile dû à la continuité des travées

En Figure 27, Eiffel donne un exemple schématique de sa démarche. La courbe AMN représente l'effort tranchant dû aux essieux du train. La courbe DC représente l'effort tranchant du au poids propre de la structure et la quantité CE correspond au terme exprimant la continuité des travées :

$$\frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{l}$$

Dans une section S, l'effort tranchant total est finalement donné par la longueur OP sur le graphique.

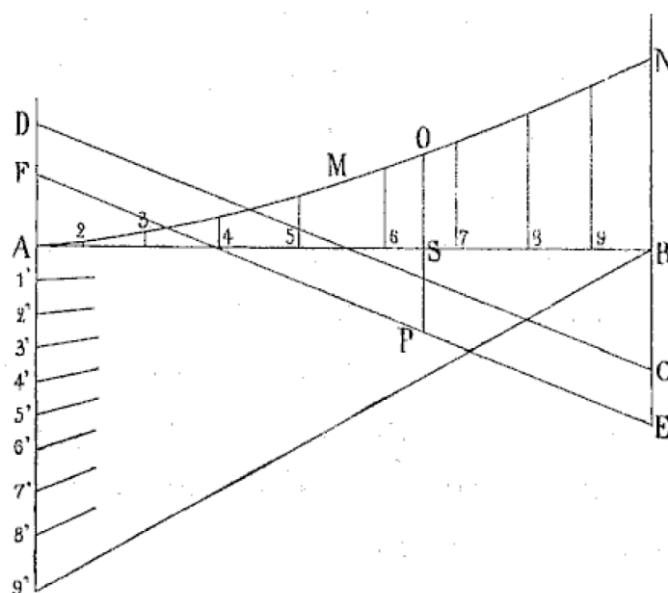


Figure 27. Tablier Marvejols. Estimation par statique graphique des efforts tranchants dans une travée.  
Schéma de la démarche utilisée par Eiffel (Eiffel, 1888, p. 75)

Remarque : le tracé de l'effort tranchant pour le train est obtenu par le tracé d'un polygone funiculaire, voir plus de détails en annexe et Figure 28. On ne retrouve pas l'allure usuelle d'un effort tranchant dû à une charge globalement répartie sur toute la poutre. Eiffel calcule en fait l'effort tranchant pour une surcharge de train de locomotive roulante. L'analyse de la ligne d'influence pour l'effort tranchant dans une poutre sur deux appuis montre que dans une section, l'effort tranchant maximal se présente pour une charge répartie sur un seul côté de la section (Figure 29).

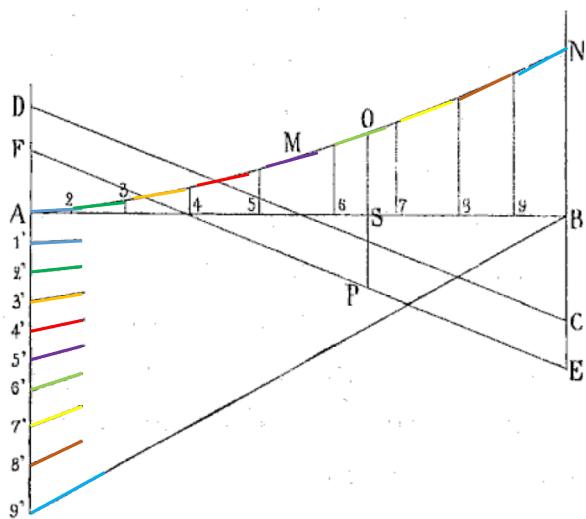


Figure 28. Tablier Marvejols. Estimation par statique graphique des efforts tranchants dans une travée.  
Cas du train

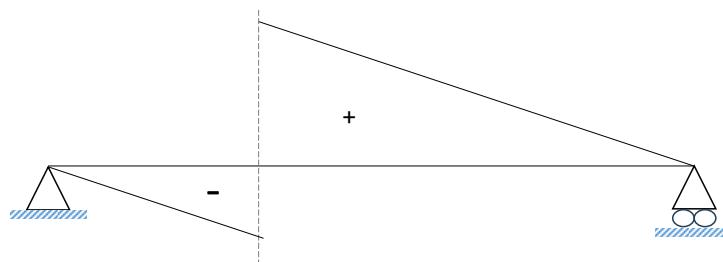


Figure 29. Ligne d'influence de l'effort tranchant dans une poutre sur deux appuis

Le diagramme des efforts tranchants obtenu pour une travée de rive et une travée intermédiaire est donné ci-dessous.

Remarque : l'effort tranchant maximal est la valeur maximale entre deux situations symétriques : le train circule de gauche à droite ou de droite à gauche. C'est pourquoi chaque cas (charge, surcharge) comporte deux courbes symétriques. Pour plus de détails, voir (Buchetti, 1888, p. 45)

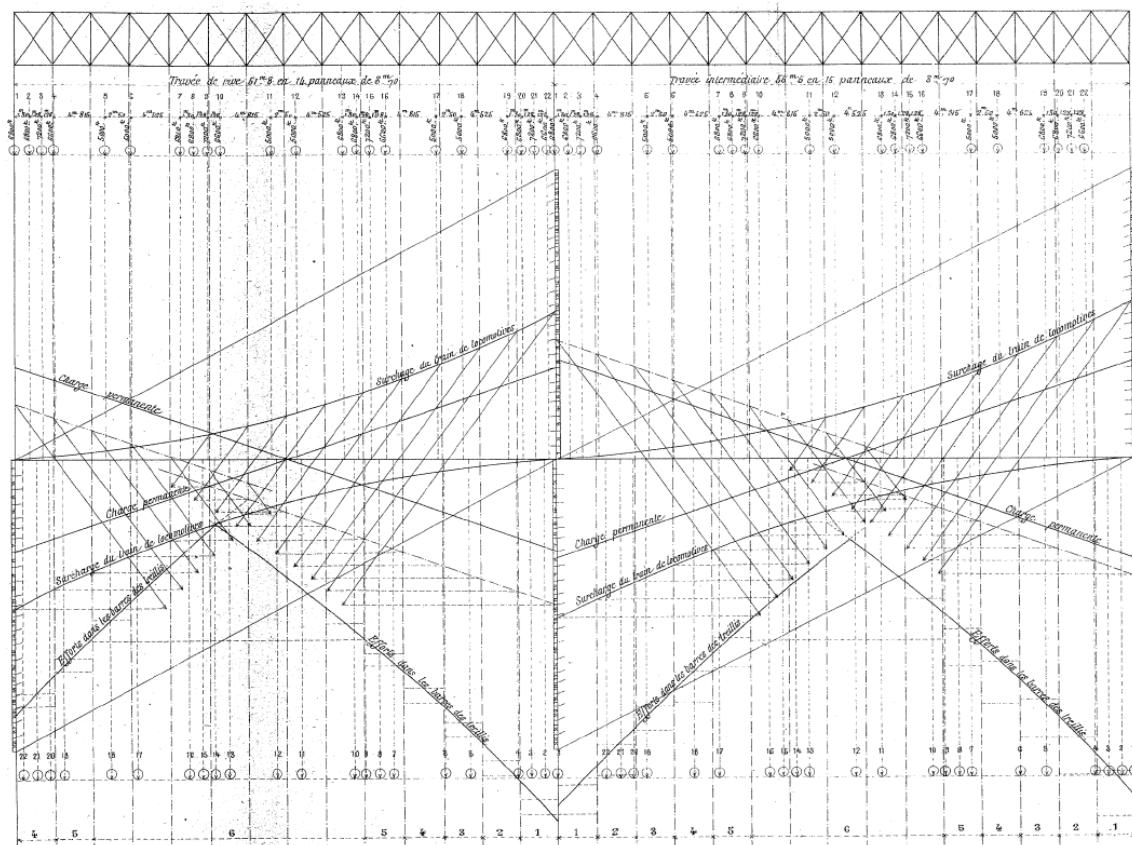


Figure 30. Tablier Marvejols. Efforts tranchants (Eiffel, 1888, p. Planche 178)

### 3.3 Évaluation des efforts dans les barres de treillis

Eiffel connaît maintenant l'effort tranchant maximal dans toute section du tablier. Il peut en déduire l'effort dans les barres de treillis. Il continue à opérer par statique graphique. On explique ci-dessous son raisonnement. Soit le demi-panneau ci-dessous sollicité par un effort tranchant  $T$  (Figure 31). L'équilibre du nœud où s'applique l'effort conduit à un triangle des forces car trois forces sont appliquées sur ce nœud :  $T$ , l'effort dans la membrure et l'effort dans la barre de treillis. Par lecture graphique, connaissant l'intensité de  $T$  et l'échelle choisie, on peut en déduire l'intensité de l'effort dans la barre de treillis en mesurant la longueur du vecteur correspondant.

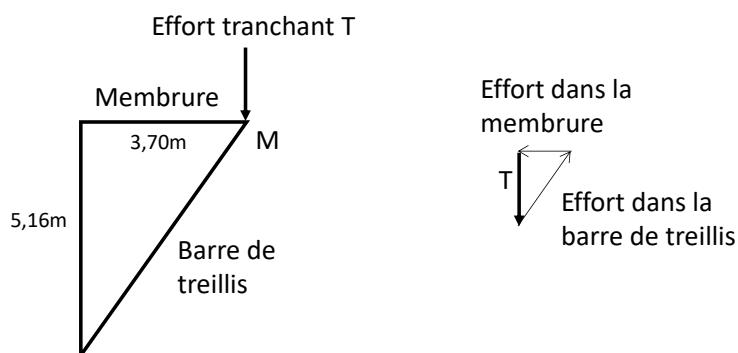


Figure 31. Effort dans les barres de treillis par statique graphique. (a) Demi-panneau soumis à l'effort tranchant T (b) Equilibre du nœud M : triangle des forces

On a mis en évidence quelques triangles des forces ci-dessous.

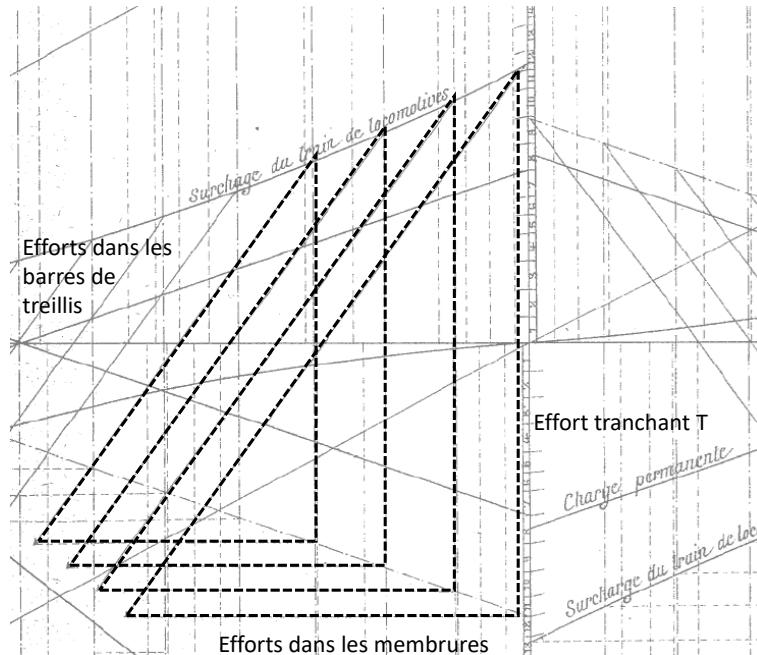


Figure 32. Effort dans les barres de treillis par statique graphique. Calculs réalisés dans le mémoire pour le tablier Marvejols

Il semble qu'Eiffel identifie 6 niveaux d'efforts, afin de définir 6 sections différentes pour les barres de treillis. Il trouve probablement un compromis entre l'ajustement de la section au plus proche de ce qui est nécessaire, et diminuer la quantité de sections définies pour faciliter la fabrication, la logistique, et la construction. Pour Ces 6 niveaux d'efforts, Eiffel détermine la contrainte dans les barres tendues et dans les barres comprimées (Tableau 6).

Remarque : pour les barres tendues, Eiffel enlève à la section brute les sections correspondant aux trous de rivets et divise l'effort par la section nette obtenue.

N°	EFFORT TOTAL	EFFORT PAR BARRE	SECTION A 6 KILOG.	BARRES TENDUES				BARRES COMPRIMÉES				
				COMPOSITION	SECTION BRUTE	SECTION NETTE	R	COMPOSITION	SECTION	R		
1	165 000 kg	82 500 kg	18 750	Ame $230 \times 11 = 2530$ 2 Corn. $120 \times 120 = 6750$ Sem. $370 \times 16 = 5920$	m/m <sup>2</sup>	15 200	14 257	5,78 kg	Ame $230 \times 18 = 4140$ 2 Corn. $120 \times 120 \times 14 = 6328$ Sem. $370 \times 10 = 3700$	m/m <sup>2</sup>	14 168	5,85 kg
2	146 000 kg	73 000 kg	12 166	Ame $220 \times 11 = 2420$ 2 Corn. $100 \times 100 \times 15 = 5550$ Sem. $330 \times 17 = 5610$	13 580	12 637	5,77 kg	Ame $220 \times 18 = 3960$ 2 Corn. $100 \times 100 \times 14 = 5208$ Sem. $330 \times 11 = 3630$	12 798	5,71 kg		
3	128 000 kg	64 000 kg	10 666	Ame $210 \times 10 = 2100$ 2 Corn. $100 \times 100 \times 12 = 4512$ Sem. $330 \times 16 = 5280$	11 892	11 110	5,75 kg	Ame $210 \times 17 = 3570$ 2 Corn. $100 \times 100 \times 11 = 4158$ Sem. $330 \times 10 = 3300$	11 028	5,81 kg		
4	111 000 kg	55 500 kg	9 250	Ame $200 \times 10 = 2000$ 2 Corn. $90 \times 90 \times 12 = 4032$ Sem. $310 \times 15 = 4650$	10 682	9 900	5,6 kg	Ame $200 \times 15 = 3000$ 2 Corn. $90 \times 90 \times 11 = 3718$ Sem. $310 \times 10 = 3400$	9 818	5,65 kg		
5	95 000 kg	47 500 kg	7 916	Ame $180 \times 8 = 1440$ 2 Corn. $80 \times 80 \times 12 = 3552$ Sem. $290 \times 14 = 4060$	9 052	8 316	5,72 kg	Ame $180 \times 14 = 2520$ 2 Corn. $80 \times 80 \times 11 = 3278$ Sem. $290 \times 9 = 2610$	8 408	5,66 kg		
6	79 000 kg	39 500 kg	6 583	Ame $160 \times 8 = 1280$ 2 Corn. $70 \times 70 \times 11 = 2638$ Sem. $270 \times 13 = 3510$	7 628	6 938	5,68 kg	Ame $160 \times 14 = 2240$ 2 Corn. $70 \times 70 \times 10 = 2600$ Sem. $270 \times 10 = 2700$	7 540	5,23 kg		

Tableau 6. Tablier Marvejols. Contraintes dans les barres de treillis (Eiffel, 1888, p. 77)

### 3.4 Treillis des parois verticales. Analyse des calculs d'Eiffel

On donne ci-dessous les efforts tranchants dus au poids propre du tablier, aux essieux du train et à la continuité des travées calculés avec le logiciel RSA.

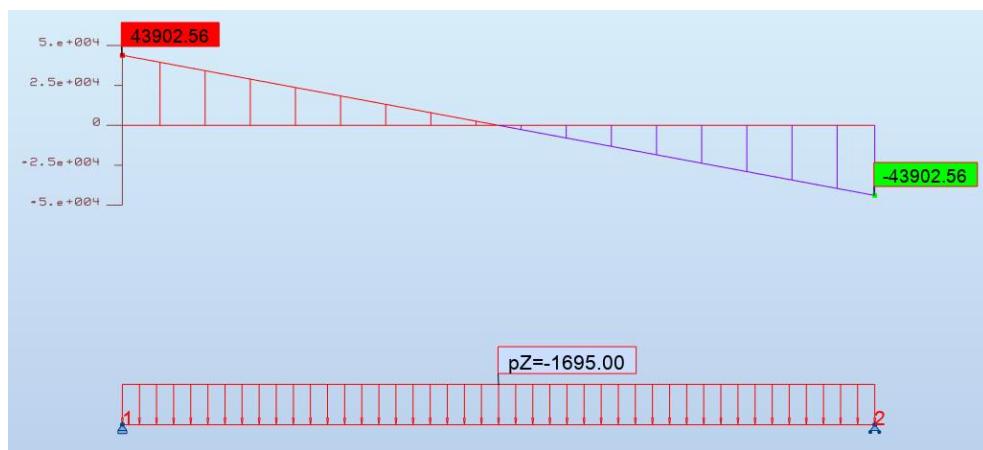


Figure 33. Tablier Marvejols. Travée 1. Cas de charge permanent

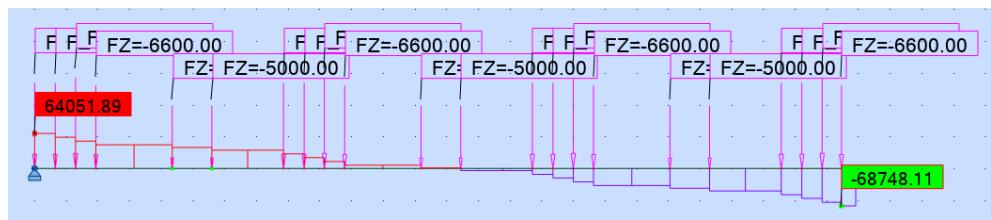


Figure 34. Tablier Marvejols. Travée 1. Cas de charge train



Figure 35. Tablier Marvejols. Travée 1. Cas de charge continuité des travées avec  $\mu_1=1\ 296\ 518$

Sur l'épure de la planche 178, l'effort tranchant en bleu (Figure 36) correspond à l'effort tranchant maximal dû à la charge permanente :  $p \cdot \frac{l}{2} = 1695 \times 51,8/2 = 43\ 901\ kg$ . Si le trait bleu correspond à 43 901 kg, alors l'effort tranchant max dû à la surcharge du train de locomotives a pour valeur 69 791 kg (trait rouge). Cette valeur est proche des 68 748 kg déterminés par nos calculs (Figure 34).

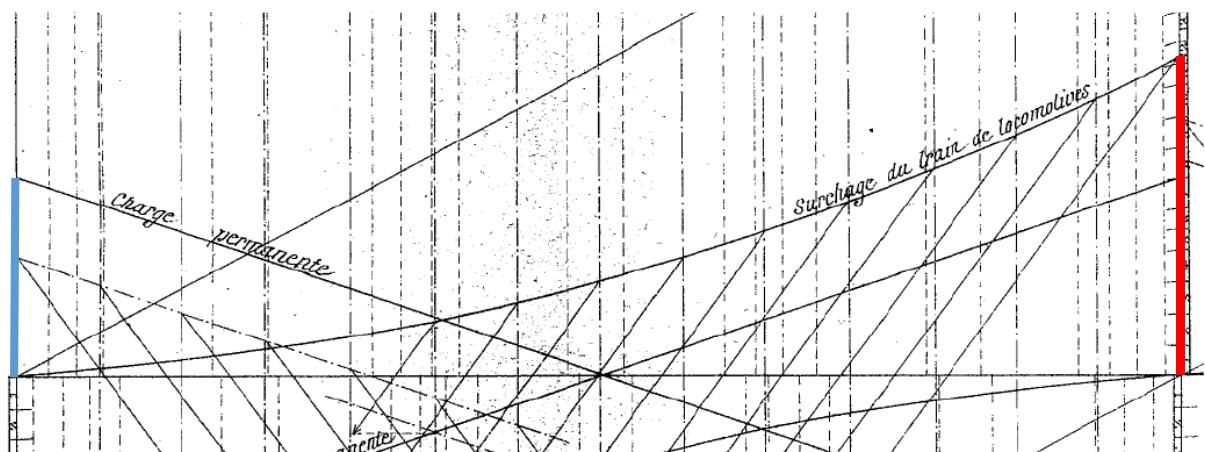


Figure 36. Tablier Marvejols. Epure des efforts tranchants

Pour la travée 1, le cas 4 donne la valeur maximale de  $\mu_1$ .

$$\frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{l} = \frac{\mu_1 - \mu_0}{l} = \frac{1\ 296\ 478 - 0}{51,80} = 25\ 029\ kg$$

Effort tranchant V	Calculs Eiffel (kg)	Calculs RSA (kg)
Charge permanente	43 901	43 901
Train	69 791	68 750
Continuité des travées	25 029	25 029
Total	138 721	137 680

Tableau 7. Tablier Marvejols. Effort tranchant, travée 1 (Eiffel, 1888, p. Planche 178)

#### Efforts dans les barres : calculs analytiques

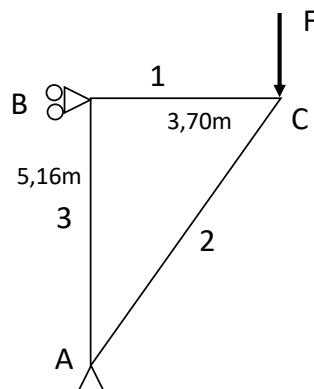


Figure 37. Barres de treillis, modélisation

Equilibre du triangle ABC (principe fondamental de la statique) :

$$\begin{cases} X_A + X_B = 0 \\ Y_A - F = 0 \\ -3,70 \cdot F - 5,16 \cdot X_B = 0 \Leftrightarrow X_B = -\frac{3,70 \cdot F}{5,16} \end{cases}$$

Equilibre du nœud B

$$N_1 = -X_B$$

Equilibre du nœud C

$$N_1 + N_2 \cdot \cos \alpha = 0$$

Avec  $\alpha = \text{atan } 5,16/3,70$

$$N_2 = -\frac{N_1}{\cos \alpha} = \frac{X_B}{\cos \alpha} = -\frac{3,70 \cdot F}{5,16} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$$

Pour

$$F = \frac{137680}{2} = 68840 \text{ kg}$$

On a

$$N_2 = -84\,709 \text{ kg}$$

On obtient un résultat proche des 82 500 kg calculés par Eiffel.

Par symétrie on aurait le même résultat en valeur absolue pour la barre en traction.

## 4 Tablier Marvejols. Panneaux

### 4.1 Panneaux de la culée Marvejols et de la palée B

L'effort d'écrasement maximal qui sera supporté par un panneau est la valeur absolue de l'effort tranchant  $T_0$  maximal sur tous les cas de charge étudiés (Figure 3).

Par symétrie des cas de charge et de la longueur et géométrie des travées, la réaction maximale sur la palée B et la réaction maximale sur la culée Marvejols sont identiques. On la nommera  $R_0$ .

Selon Eiffel, la valeur maximale de  $R_0$  est de 88 290 kg, obtenue pour le cas de charge 1 (Figure 38). Ce résultat est obtenu sur chacune des deux poutres du tablier, donc c'est immédiatement l'effort d'écrasement sur le panneau de chaque poutre. Ce résultat est confirmé par les calculs RSA des Figure 39 à Figure 44.

On peut également retrouver ce résultat par l'analyse la théorie des lignes d'influence appliquée à une poutre continue.

1<sup>o</sup> — 1<sup>re</sup> travée chargée :

$$T_0 = 88\ 290 \text{ kg.}$$

4<sup>o</sup> — 1<sup>re</sup> et 2<sup>e</sup> travées chargées :

$$T_1 = 131\ 088 \text{ kg}$$

$$T_4 = 124\ 311 \text{ kg.}$$

5<sup>o</sup> — 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> travées chargées :

$$T_2 = 121\ 339 \text{ kg}$$

$$T_5 = 122\ 640 \text{ kg.}$$

6<sup>e</sup> cas. — Le tablier ne porte aucune surcharge :

$$T_0 = 34\ 190 \text{ kg}$$

$$T_1 = 53\ 640 \text{ kg}$$

$$T_4 = 48\ 502 \text{ kg.}$$

$$T_2 = 47036^k$$

$$T_5 = 45570^k$$

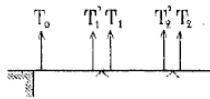


Figure 38. Tablier Marvejols. Réactions maximales sur les appuis (Eiffel, 1888, p. 74)

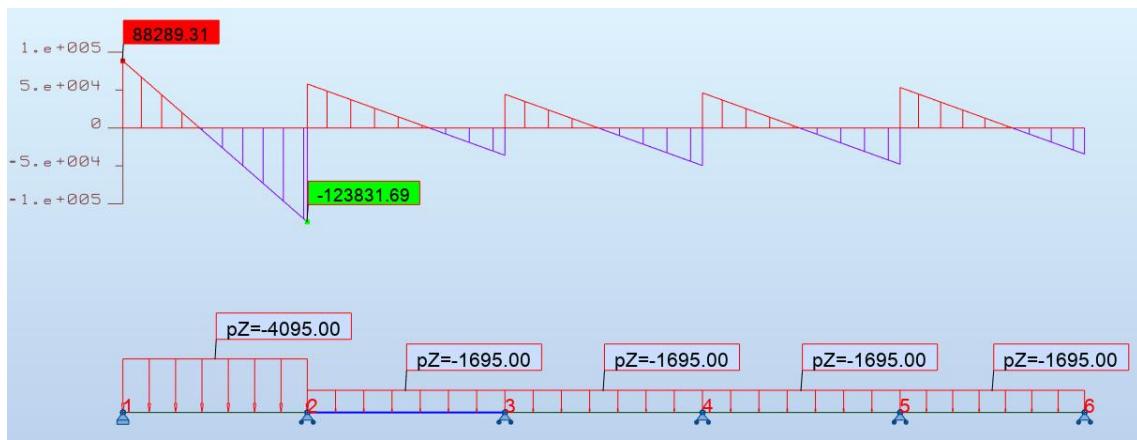


Figure 39. Tablier Marvejols. Effort tranchant dans chaque poutre. Cas 1

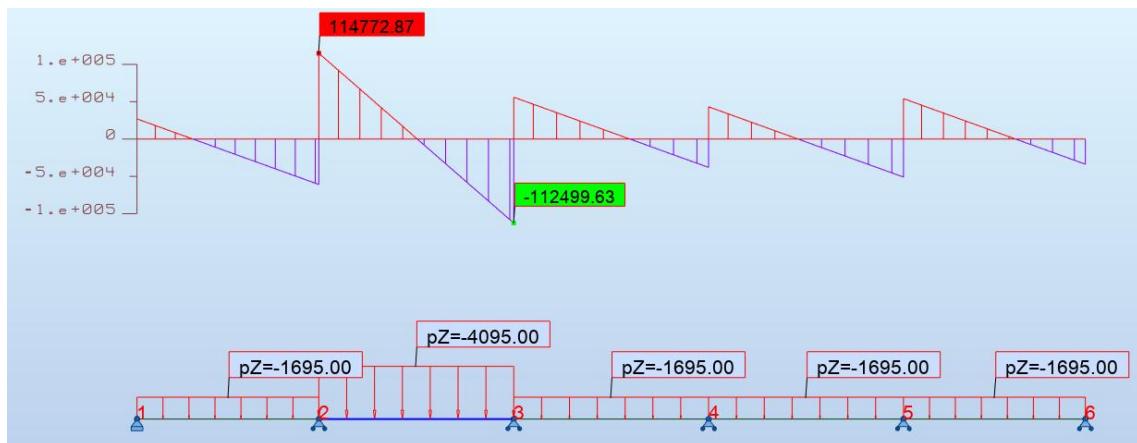


Figure 40. Tablier Marvejols. Effort tranchant dans chaque poutre. Cas 2

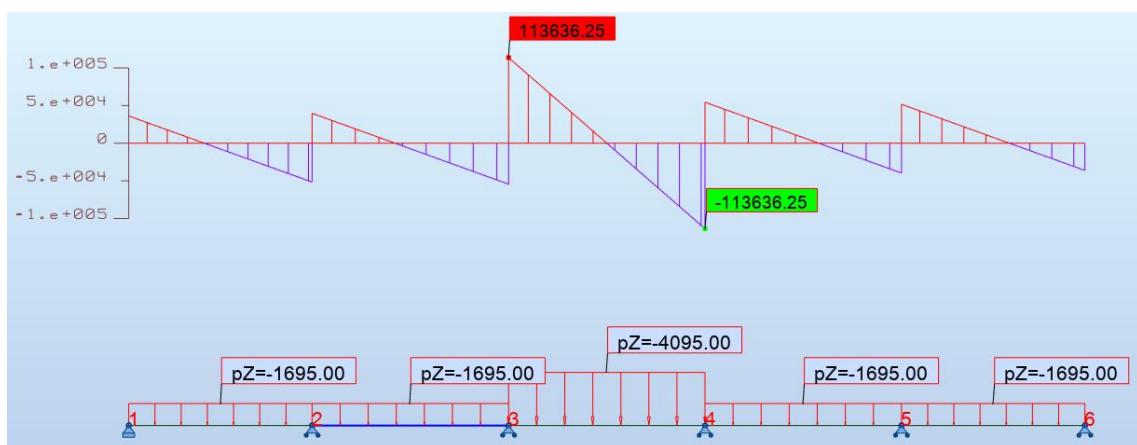


Figure 41. Tablier Marvejols. Effort tranchant dans chaque poutre. Cas 3

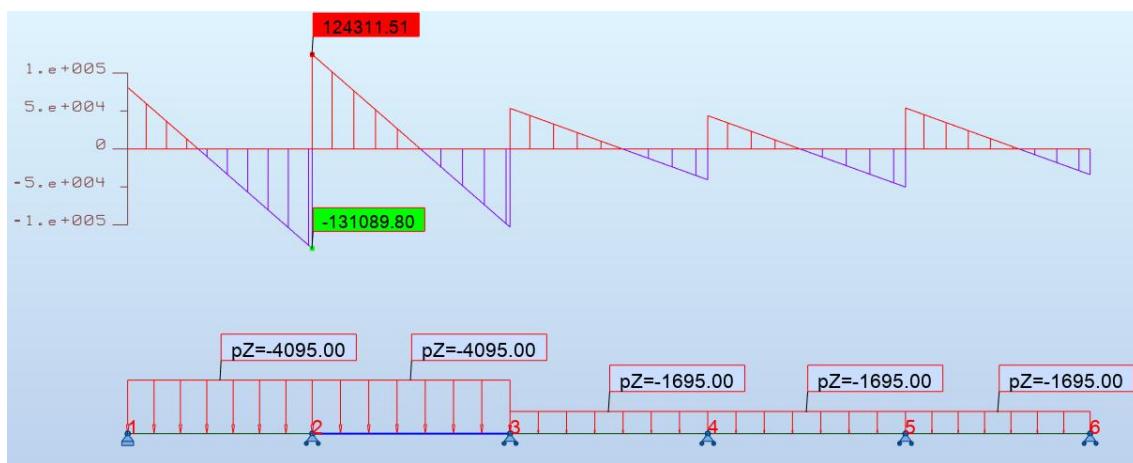


Figure 42. Tablier Marvejols. Effort tranchant dans chaque poutre. Cas 4

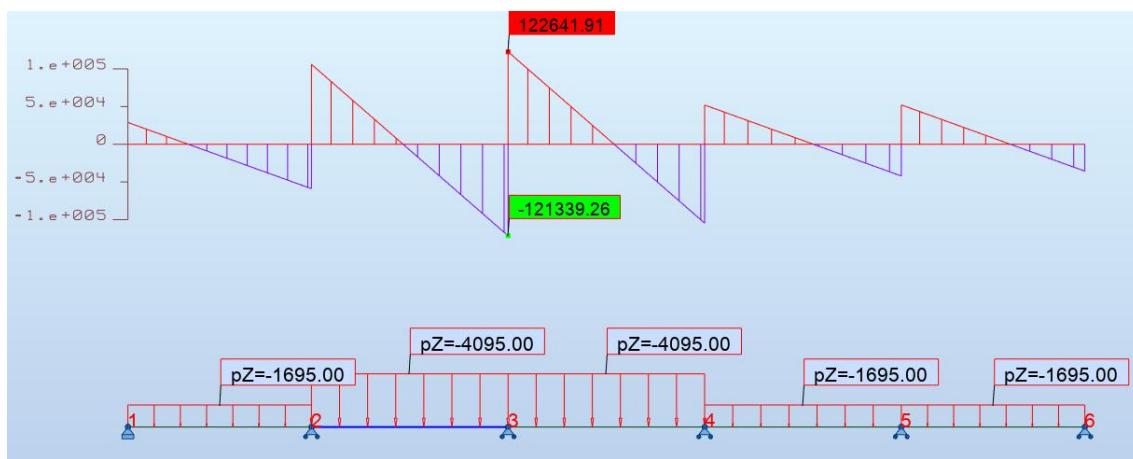


Figure 43. Tablier Marvejols. Effort tranchant dans chaque poutre. Cas 5

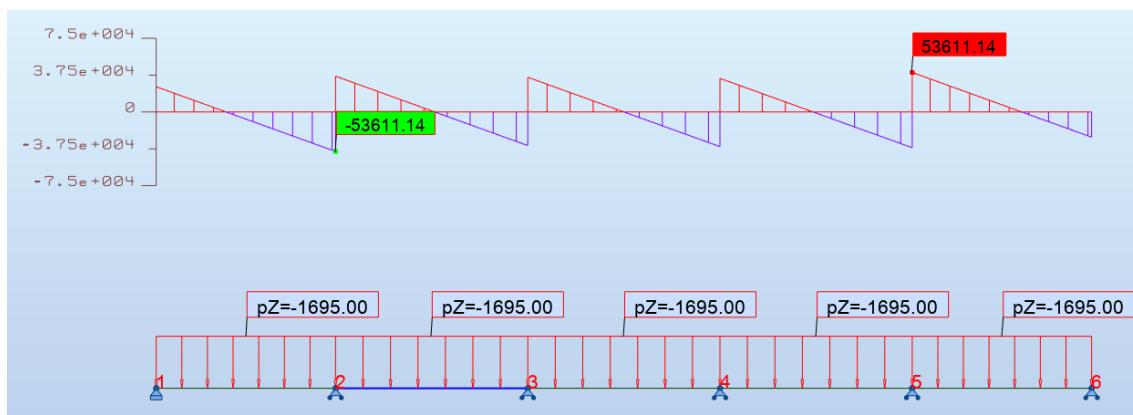


Figure 44. Tablier Marvejols. Effort tranchant dans chaque poutre. Cas 6

Pour les panneaux de la palée B, la contrainte maximale de compression est de

$$\frac{88\ 290}{22\ 354} = 3,90 \text{ kg/mm}^2$$

Pour les panneaux de la culée Marvejols, la contrainte maximale de compression est de

$$\frac{88\ 290}{39\ 448} = 2,24 \text{ kg/mm}^2$$

Ces deux contraintes de compressions sont inférieures à  $R = 6 \text{ kg/mm}^2$ .

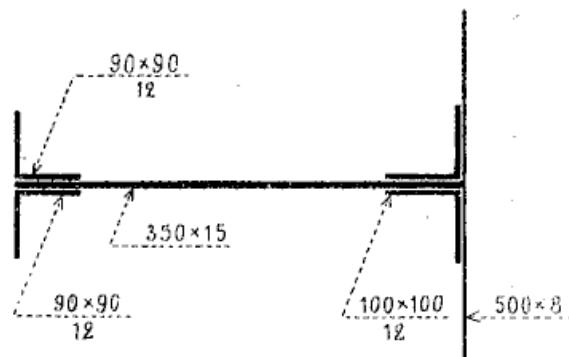


Figure 45. Tablier Marvejols. Panneaux de la palée B.  $S=22\ 354 \text{ mm}^2$  (Eiffel, 1888, p. 78)

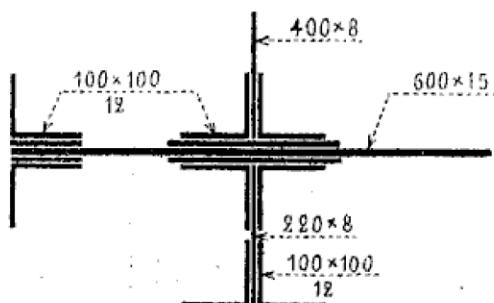


Figure 46. Tablier Marvejols. Panneaux de la culée Marvejols.  $S=39\ 448 \text{ mm}^2$  (Eiffel, 1888, p. 78)

## 4.2 Panneaux des piles

L'effort d'écrasement maximal supporté par un panneau de pile a pour valeur  $T_{1max} + T'_{1max} = 131\ 088 + 124\ 311 = 255\ 390 \text{ kg}$ . Pour une section de  $47\ 960 \text{ mm}^2$  on obtient bien une contrainte de compression  $5,32 \text{ kg/mm}^2$ .

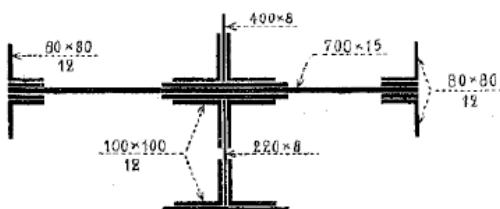


Figure 47. Tablier Marvejols. Panneaux des piles (Eiffel, 1888, p. 79)

## 5 Tablier Marvejols. Pièces de pont

Les pièces de pont sont des poutres, orientées suivant l'axe  $\vec{z}$  global du viaduc (axe orthogonal à la direction du train).

« Les pièces de pont étant soutenues en leur milieu et étant toujours symétriquement chargées doivent être calculées comme des pièces encastrées en leur milieu et dont les extrémités reposent librement sur deux appuis fixes ». (Eiffel, 1888, p. 79)

Données

- Espacement des pièces de pont  $3,700\text{ m}$
- Portée totale  $4,200\text{ m}$
- Poids propre  $80\text{ kg/m}$

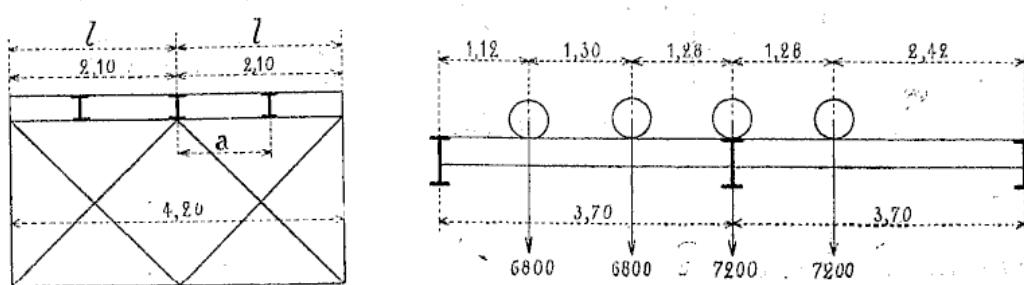
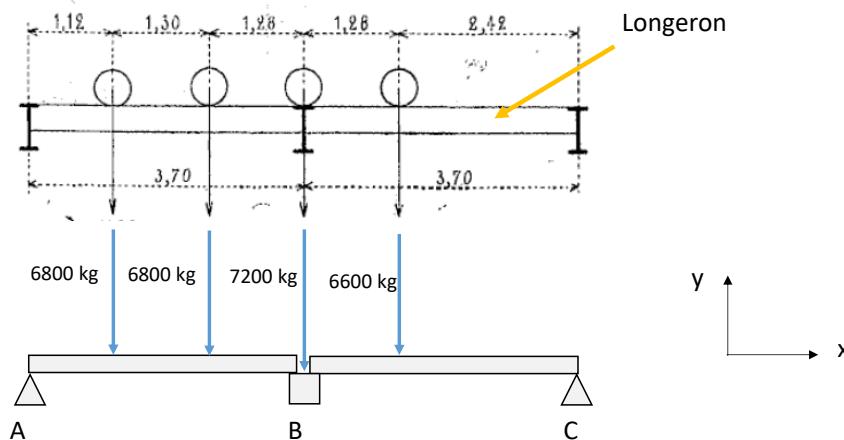


Figure 48. Tablier Marvejols. Calcul des pièces de pont (Eiffel, 1888, p. 79). Pour la charge à  $1,28\text{m}$  du centre, la valeur est  $6600$  (charge toute à droite)

« La réaction maximale au point d'attache d'un longeron est produite par la position figurée ci-contre des roues de la locomotive » (Figure 48) (Eiffel, 1888, p. 80).

Il nous faut étudier les réactions des longerons pour effectuer la descente de charges sur les pièces de pont. Les longerons soutiennent la surcharge du train et la transmettent aux pièces de pont. Dans la Figure 49 on schématisise le longeron pour calculer la réaction maximale au point d'attache des longerons.



*Figure 49. Tablier Marvejols. Calcul des pièces de pont : schéma RDM. Soit x l'axe longitudinal du tablier (direction de déplacement du train) et y l'axe vertical.*

Les étapes du calcul sont les suivantes :

1. Descente des charges des longerons vers les pièces de pont. On cherche la réaction totale P en B dans la Figure 49.
2. Efforts internes dans les pièces de pont : moment fléchissant
3. Moment d'inertie de la section
4. Contrainte maximale dans la pièce de pont

#### Réaction totale P sur l'appui B

$$P = P' + P''$$

Avec P' réaction due aux essieux du train (flèches bleues) et P'' réaction due au poids propre du longeron.

#### Réaction P' en B

La réaction d'appui P' sera due aux deux forces de 6800kg sur la poutre AB, à la force de 7200kg sur la pile et à la force de 6600kg sur la poutre BC.

- Poutre AB

Somme des moments en A :

$$-6800 \times 1,12 - 6800 \times (1,12 + 1,30) + P'_{AB} \cdot 3,70 = 0$$

$$P'_{AB} = \frac{1}{3,70} \cdot (6800 \times [1,12 + (1,30 + 1,12)])$$

- Poutre BC

Somme des moments en C

$$6600 \times (3,70 - 1,28) - P'_{BC} \cdot 3,70 = 0$$

$$P'_{BC} = \frac{1}{3,70} \cdot (6600 \times 2,42)$$

$$P' = 7200 + P'_{AB} + P'_{BC}$$

$$P' = 7200 + \frac{1}{3,70} \cdot (6600 \times 2,42 + 6800 \times [1,12 + (1,30 + 1,12)]) = 18\,022$$

Remarque : en p80 il faut lire :

$$P' = 7200 + \frac{1}{3,70} \cdot (6600 \times 2,42 + 6800 \times [1,12 + (1,30 + 1,12)])$$

#### Réaction P'' en B due au poids propre du longeron

Le poids linéique du longeron est de 275kg/m donc la réaction d'appui  $P''$  sur B vaut

$$P'' = 275 \times 3,70 = 1017 \text{ kg}$$

### Réaction totale P sur l'appui B

$$P = P' + P'' = 18\,022 + 1017 = 19\,039 \text{ kg}$$

On passe maintenant dans le plan des pièces de pont.

La réaction  $P=19039 kg est représentée dans le plan des pièces de pont.$

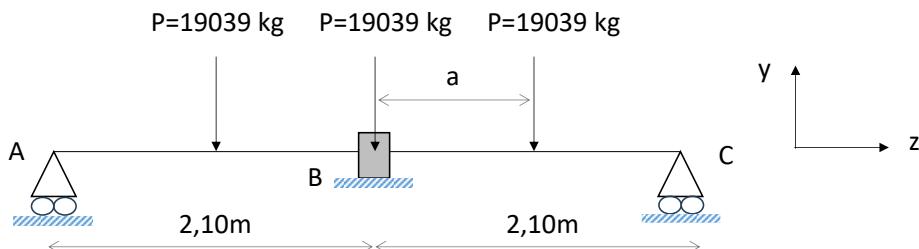


Figure 50. Schéma RDM des pièces de pont

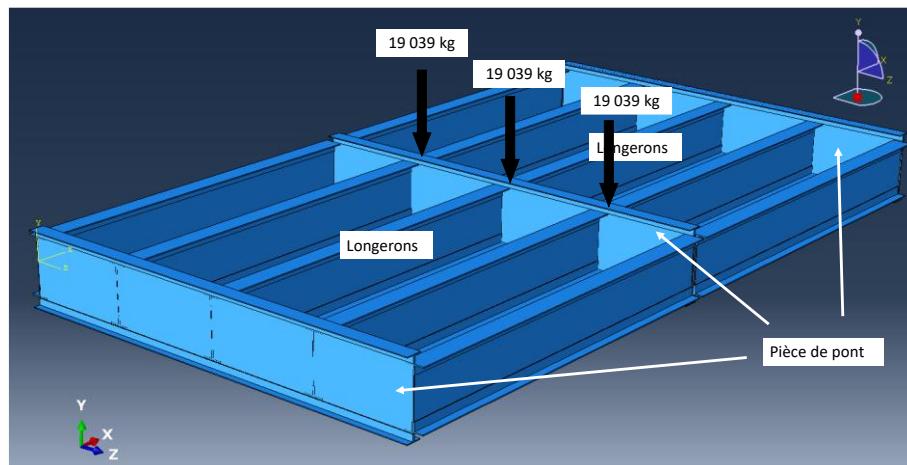


Figure 51. Tablier Marvejols. Schéma RDM des pièces de pont

La poutre est encastrée en B, appuyée en A et C (appui glissant). Cela revient à étudier deux poutres AB et BC de façon indépendante, longueur L (figure ci-dessous).

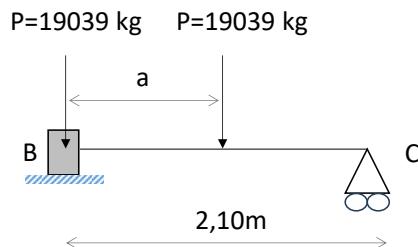


Figure 52. Tablier Marvejols. Schéma RDM des pièces de pont

#### Moment $M'$ dû à l'action P d'un longeron

Selon le mémoire, « Le moment dû à la réaction d'un longeron est donné par la formule :

$$M' = \frac{Pl}{2} (2n - 3n^2 + n^3)$$

dans laquelle  $n = \frac{a}{l} = \frac{1,10}{2,10} = 0,523$

$$M' = \frac{19039}{2} \times 2,10 \cdot (1,046 - 0,820 + 0,143)$$

$$M' = 7377 \text{ »}$$

On propose de démontrer la formule utilisée par Eiffel.

Par superposition, on montre que la réaction d'appui en C a pour expression

$$Y_C = \frac{Pa^2}{2L^3} \cdot (3L - a)$$

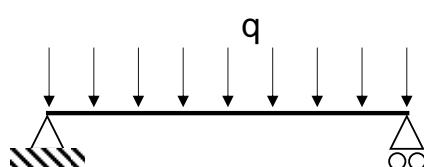
Le moment fléchissant en B a donc pour expression :

$$M' = Y_C \cdot L - P \cdot a = \frac{PL}{2} \cdot (-2n + 3n^2 - n^3)$$

On obtient bien la formule du mémoire (le signe est différente compte-tenu de notre choix différent de convention). On obtient avec  $P=19039 \text{ kg}$ ,  $L=2,10\text{m}$ ,  $a=1,10\text{m}$ , un moment  $M' = 7361 \text{ kg.m}$ , proche de la valeur du mémoire.

#### Moment fléchissant $M''$ dû au poids propre de la pièce de pont

Pour chaque partie (AB et BC), c'est le moment fléchissant d'une charge  $q = 80 \text{ kg/m}$ .



$$M''(x) = \frac{qL}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2}$$

$$M''_{max} = \frac{qL^2}{8} = \frac{80 \times 2,10^2}{8} = 44 \text{ kg.m}$$

Comme le montre la Figure 53, c'est bien en B que le moment est maximal.

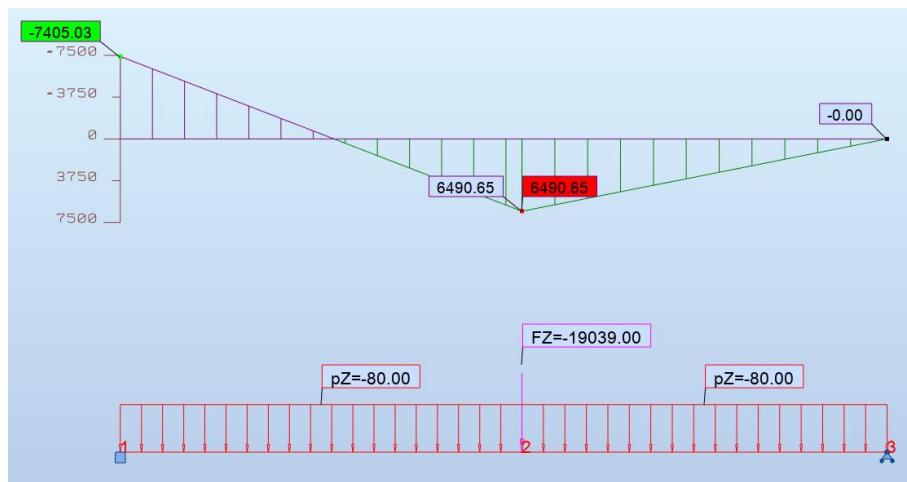


Figure 53. Tablier Marvejols. Pièces de pont. Calcul RSA

#### Moment total maximal

$$M = M' + M'' = 7377 + 44 = 7421 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

#### Moment quadratique nécessaire

Le critère de résistance des pièces de pont est une contrainte maximale  $R = 6 \text{ kg/mm}^2$  telle que

$$R = \frac{M_f \cdot v}{I_z}$$

La section doit donc être telle que

$$\frac{I}{v} = \frac{M_f}{R} = \frac{7421}{6 \cdot 10^6} = 1,24 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

La section choisie par Eiffel est donnée ci-dessous.

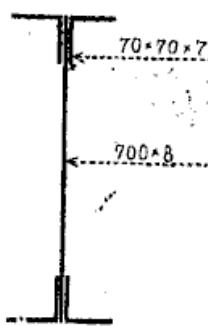


Figure 54. Tablier Marvejols. Section des pièces de pont

Pour cette section,

$$\frac{I}{v} = 0,001817 \text{ m}^3$$

Donc la contrainte maximale dans la section des pièces de pont des tabliers a pour valeur

$$\sigma = \frac{7421}{1817} = 4,08 \text{ kg/mm}^2$$

## 6 Tablier Marvejols. Longerons

Les données d'entrée sont résumées ci-dessous.

- Écartement des longerons : 1,10 m
- Portée des longerons : 3,70 m
- Poids propre 275 kg/m (fers : 100 kg/m ; bois et rails : 75 kg/m ; platelage : 100 kg/m)

Le schéma d'un longeron et des essieux est donné en Figure 55. C'est selon Eiffel la position des essieux donnant le moment fléchissant maximal dans le longeron.

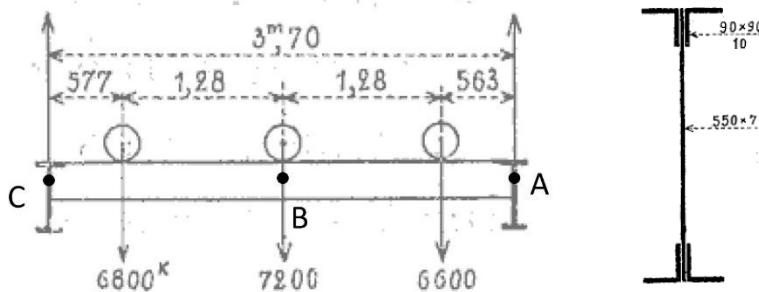


Figure 55. Tablier Marvejols, longerons (Eiffel, 1888, p. 81)

« La surcharge maximal se produit quand les roues de la locomotive occupent les positions figurées ci-contre. Moment dû à la charge permanente :

$$M' = \frac{pl^2}{8} = \frac{275 \times 3,70^2}{8} = 470$$

Réaction au point A :

$$R = \frac{1}{3,70} (6800 \times 0,577 + 7200 \times 1,857 + 6600 \times 3,137)$$

$$R = 10270$$

Moment dû à la surcharge :  $M'' = 10270 \times 1,843 - 6600 \times 1,28 = 10480$

Moment total :  $M = M' + M'' = 470 + 10480 = 10950$  »

L'ensemble ne pose pas de difficulté particulière. Eiffel opère par superposition ; il additionne le moment fléchissant dû au poids propre et le moment fléchissant dû aux charges ponctuelles des essieux.

La section choisie est illustrée ci-dessous. Pour le moment quadratique I, Eiffel calcule le moment d'inertie d'un rectangle plein de largeur 187 mm et hauteur 550 mm, d'expression  $\frac{0,187 \times 0,550^3}{12}$ , puis retire le moment d'inertie des parties « vides » de ce rectangle.

La contrainte maximale de flexion dans le longeron a pour valeur

$$\sigma = \frac{M_{max} \cdot v}{I_z} = \frac{10950 \times \frac{0,55}{2}}{0,000523} = 5,76 \text{ kg/mm}^2$$

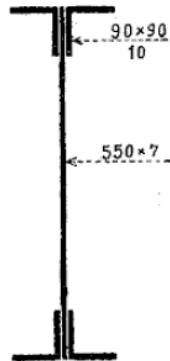


Figure 56. Tablier Marvejols. Section des longerons

#### Remarque

La réaction en A est obtenue en écrivant l'équilibre des moments sur l'appui gauche que nous appellerons C :

$$3,70 \cdot Y_A - 0,577 \times 6800 - 1,857 \times 7200 - 3,137 \times 6600 = 0$$

Le moment fléchissant maximal est au droit du point d'application de l'effort de 7200 kg, que nous appellerons B. En B,

$$M'' = Y_A \times 1,843 - 1,28 \times 600$$

En B, le moment fléchissant maximal est la somme du moment fléchissant  $M'$  dû au poids propre du longeron et du moment fléchissant  $M''$  dû aux essieux du train. En toute rigueur, le moment maximal dû au poids propre est au milieu du longeron, ce qui n'est pas exactement le point B. L'hypothèse simplifie les calculs, au coût d'un très léger manque de précision.

## 7 Tablier Marvejols. Contrefiches

*Contrefiches.* — La réaction supportée par les contrefiches se compose de la réaction due au poids permanent :

$$T = 2 \times \frac{5}{8} pl = \frac{10}{8} \times 80 \times 2,40 = 210$$

et de la réaction provenant du poids P :

$$T' = P (2 - 3 n^2 + n^3)$$

$$T' = 19039 (2 - 0,820 + 0,443) = 25190$$

soit  $T = 210 + 25190 = 25400$ .

La composante de cette réaction suivant la direction des contrefiches est :

$$17\,960 \text{ kg.}$$

Composition d'une contrefiche = 2 cornières de  $\frac{80 \times 80}{10}$ .

Section d'une contrefiche =  $3\,000 \text{ mm}^2$ .

Effort maximum par millimètre carré :

$$R = \frac{17960}{3000} = 5,98 \text{ k}$$



Figure 57. Tablier Marvejols. Contrefiches (Eiffel, 1888, p. 81)

Les contrefiches fournissent un appui central aux pièces de pont (voir Figure 58, point B du schéma RDM).

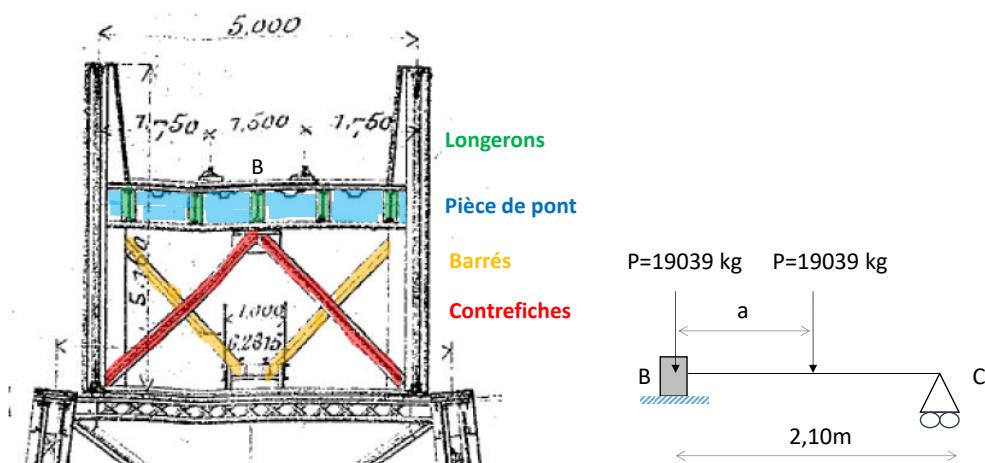


Figure 58. Plan des contrefiches et schéma RDM de la pièce de pont. La réaction en B est la force verticale imposée sur les contrefiches

Il semble que l'article néglige le poids propre des contrefiches.

### Réaction T' en B due aux poids permanents de la pièce de pont

On montre que pour une poutre de longueur L encastrée à gauche, appuyée à droite, soumise à une charge linéaire q (dans notre cas, le poids propre de la pièce de pont), alors la réaction d'appui verticale au niveau de l'enca斯特rement est de  $\frac{5}{8} pl$ , avec p charge linéique sur la poutre.

Le point B subit la réaction des deux pièces, placées de chaque côté donc

$$T' = 2 \times \frac{5pL}{8} = \frac{10}{8} \times 80 \times 2,10 = 210 \text{ kg}$$

#### Réaction T" en B due aux efforts des essieux du train (19 039 kg)

Pour les trois efforts de 19 039 kg provenant du train (Figure 59), on obtient

$$T'' = 12571 + 12571 + 19039 = 44 182 \text{ kg}$$

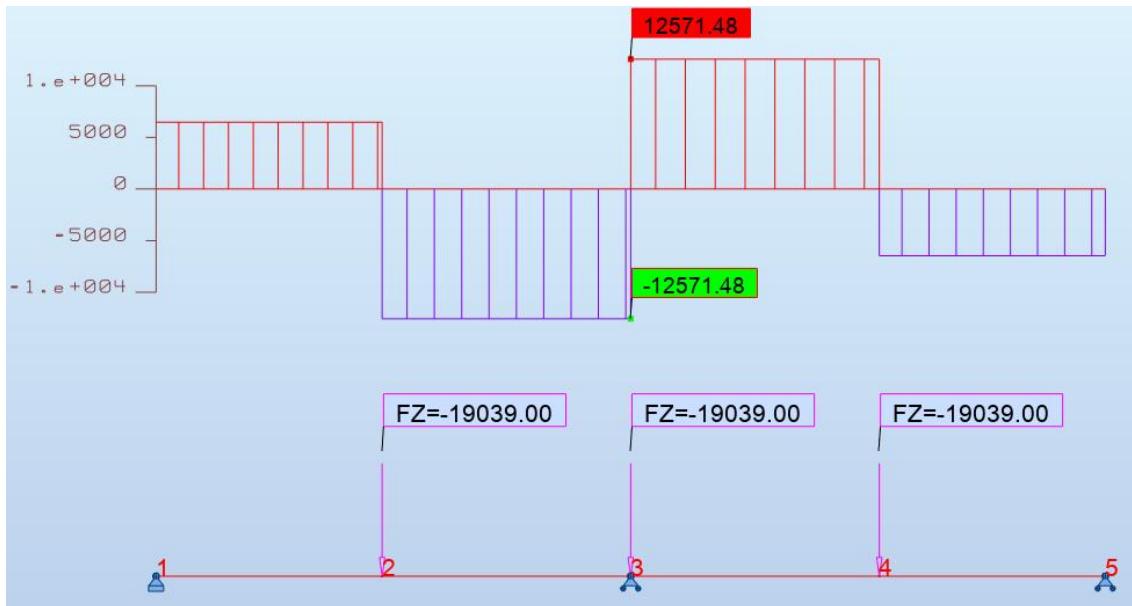


Figure 59. Tablier Marvejols. Contrefiches. Modélisation des pièces de pont pour  $P=19039 \text{ kg}$  sur Robot Structural Analysis 2023. Réaction d'appui au centre 44 182 kg

#### Réaction totale sur les deux contrefiches

$$T = T' + T'' = 210 + 44182 = 44392 \text{ kg}$$

Chaque contrefiche reprend la moitié de T, soit 22 196 kg. Article : 25 418 kg. On n'explique pas la différence avec l'article.

Les contrefiches sont considérées comme des barres de treillis, ne reprenant que des efforts de traction / compression. Il faut donc projeter la force T dans l'axe de chaque barre (on peut aussi faire l'équilibre du nœud B comme sur un treillis). La géométrie est rappelée ci-dessous. On peut penser que les contrefiches forment un angle de  $45^\circ$  avec le plan horizontal. De plus,

$$\frac{17960}{25418} = 0,707 = \sin 45^\circ$$

On retiendra cet angle pour l'angle des contrefiches avec le plan horizontal. Par conséquent, l'effort de compression N dans les contrefiches est de  $N = T \cdot \sin 45^\circ = 15 695 \text{ kg}$ . L'article propose 17 960 kg.

#### Section des contrefiches

La contrainte dans les contrefiches est

$$\frac{15695}{3000} = 5,23 \text{ kg/mm}^2$$

## Références

Buchetti, J. (1888). *Manuel des constructions métalliques et mécaniques*.

<http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb301722737>

Eiffel, G. (1888). Mémoire présenté à l'appui du projet définitif du viaduc de Garabit.

*Mémoires de la Société des ingénieurs civils*.

<http://cnum.cnam.fr/redir?ECCMC6.49>, 50, 55-184.

<http://cnum.cnam.fr/redir?ECCMC6.49>

Koechlin, M. (1898). *Applications de la statique graphique* (2<sup>e</sup> éd.). gallica.bnf.fr

Tissandier, G. (1883). Le viaduc de Garabit, en France, et le viaduc de Kinzua, aux Etats-

Unis. *La Nature, Onzième année, premier semestre(508)*, 193.

<https://cnum.cnam.fr/redir?4KY28.20>

*Viaduc de Garabit.* (s. d.). Consulté 29 décembre 2024, à l'adresse

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Viaduc\\_de\\_Garabit](https://fr.wikipedia.org/wiki/Viaduc_de_Garabit)

### Webographie

<https://www.garabit-viaduc-eiffel.com/> (Copyright © 2024 Syndicat Mixte Garabit Grandval)

<https://passerelles.essentiels.bnf.fr/fr/chronologie/construction/44259ad3-6fa5-4b74-8bd8-f9a025239ead-viaduc-garabit>