Frédéric MENAN – CESI Brest

Fonctions de plusieurs variables

-

Cours et exercices corrigés

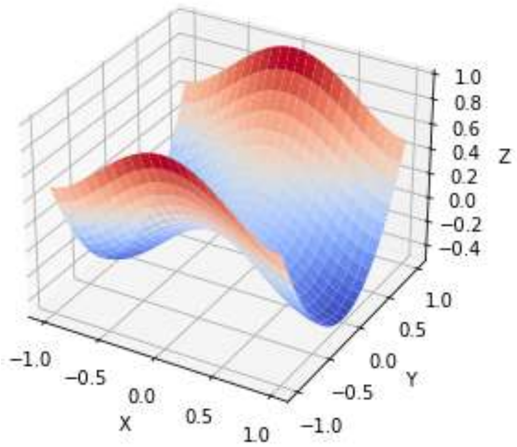


Table des matières

1 L'ESPACE $\mathbb{R}^2$ 3

1.1 BOULE OUVERTE – BOULE FERMEE 3
1.2 OUVERT DE $\mathbb{R}^2$ 3
1.3 PARTIE BORNEE DE $\mathbb{R}2$ 3

2 FONCTION CONTINUE DE $\mathbb{R}2 \to \mathbb{R}$ 4

2.1 DEFINITION 4
2.2 LIMITE 4
2.3 PROPRIETES 4
2.4 CONTINUITE 4
2.5 PROPOSITION 5
2.6 FONCTIONS DE CLASSE C^N 5

3 DERIVEES D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES 6

3.1 DERIVEE D'UNE FONCTION F EN A 6
3.2 FONCTION PARTIELLE – DERIVEE PARTIELLE 6
3.3 DEFINITION 6
3.4 DERIVEES PARTIELLES D'ORDRE 2 7
3.5 DIFFERENTIELLE D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES 7

4 ESTIMATION AU VOISINAGE D'UN POINT 8

4.1 THEOREME DE TAYLOR POUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES 8
4.2 DEVELOPPEMENT LIMITE D'ORDRE 1 9
4.3 DEVELOPPEMENT LIMITE D'ORDRE 2 10

5 EXTREMUMS D'UNE FONCTION DE DEUX VARIABLES 11

5.1 POINT CRITIQUE 11
5.2 MINIMUM ET MAXIMUM LOCAL 11
5.3 NOTATION DE MONGE 11
5.4 THEOREME 11
5.5 RECHERCHE DES EXTREMUMS 13

6 EXERCICES 14

6.1 EXERCICE : ETUDE D'UN POINT CRITIQUE 14
6.2 EXERCICE : ETUDE DES EXTREMUMS 14

7 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 16

1 L’espace $\mathbb{R}^2$

1.1 Boule ouverte – boule fermée

On appelle boule ouverte $(\mathcal{B}_0)$ de centre a de rayon r l’ensemble défini par

$$\mathcal{B}_0(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 | \|x-a\| < r\}$$

On appelle boule fermée $(\mathcal{B}_f)$ de centre a de rayon r l’ensemble défini par

$$\mathcal{B}_f(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 | \quad \|x-a\| \leq r\}$$

On définit deux types d’applications avec le même symbole : $\|\square\|$

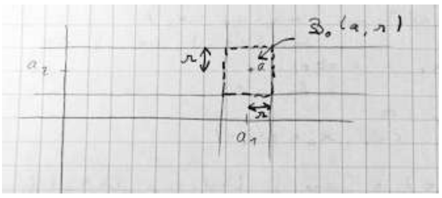
Soient les points $x = (x_1; x_2)$ et $a = (a_1; a_2)$

$$\|x-a\|_2 = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2}$$

$$\|x-a\|_\infty = sup\{|x_1-a_1|, |x_2-a_2|\}$$

L’ensemble des points tels que $\|x-a\|_2 < r$ définit un disque de centre a, de rayon r.

L’ensemble des points tels que $\|x-a\|_\infty < r$ définit un carré de côté 2r.



1.2 Ouvert de $\mathbb{R}^2$

Un ensemble A est ouvert dans $\mathbb{R}^2$ si pour tout a de A, il existe une boule ouverte incluse dans A. On écrit $\mathcal{B}_0(a,r) \subset A$.

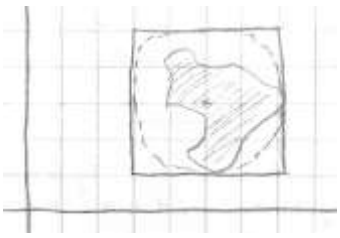
Sur la notion d’ouvert :

https://youtube.com/watch?v=C9g7KkyOsIA&feature=shared

1.3 Partie bornée de $\mathbb{R}^2$

Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est bornée s’il existe un réel $M \geq 0$ tel que

$$\forall x \in A, \|x\|_2 \leq M$$



2 Fonction continue de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

2.1 Définition

Une fonction de deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une application fd'un ouvert u de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f\begin{cases} u \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \rightarrow f(x,y) \end{cases}$$

Les points de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x;y;$f(x,y)$) décrivent une surface d'équation z=$f(x,y)$ (Figure 1).

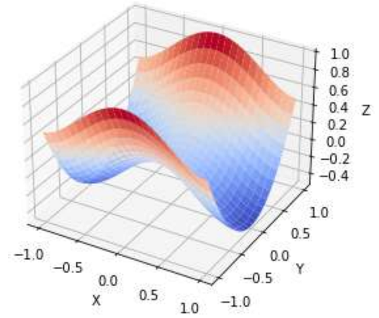


Figure 1. Tracé d'une fonction de deux variables

2.2 Limite

Soit f une fonction définie sur un ouvert u de $\mathbb{R}^2$ et a un point de u.

On dit que f admet pour limite en a le réel L si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \ \forall x \in u \ \|x - a\| \leq \eta \implies \|f(x) - L\| \leq \varepsilon}$$

Si f a pour limite L en a, cette limite est unique.

2.3 Propriétés

Soient f et g des fonctions définies sur un ouvert u de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, a un point de u et λ un réel, tels que

$$\lim_a f = L \ ; \ \lim_a g = L'$$

Alors

$$\lim_a \lambda.f = \lambda.L \ ; \ \lim_a f + g = L + L'; \ \lim_a f.g = L.L'; \ \lim_a \frac{f}{g} = \frac{L}{L'}$$

2.4 Continuité

Soit f fonction définie sur un ouvert u de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a un point de u.

La fonction f est continue en a si

$$\lim_a f = f(a)$$

Exemple : soit f telle que

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x.y}{x^2+y^2}\ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en (0,0)

Pour $y \neq 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$$

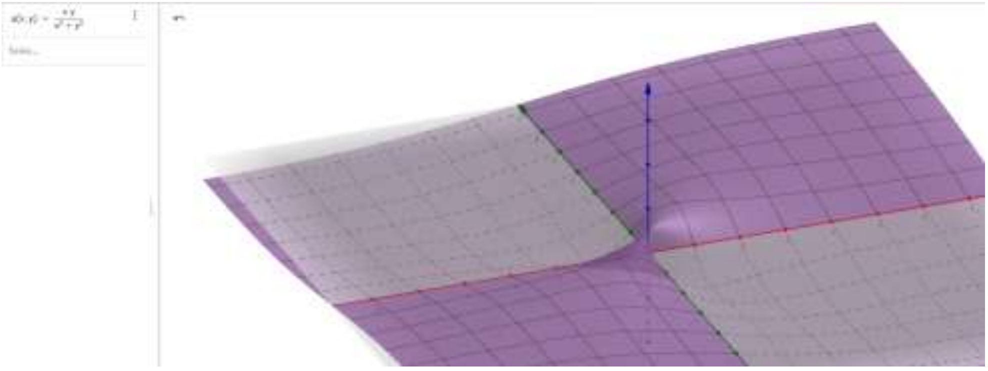
Pour $x \neq 0$

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0$$

Pour x=y,

$$f(x,y) = \frac{1}{2}$$

La fonction f n'est pas continue en 0.



2.5 Proposition

Soient f et g deux fonctions définies sur un ouvert u de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a un point de u.

On suppose que les fonctions f et g sont continues en a. Alors

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda.f$ est continue en a.
- $f+g$ est continue en a.
- $f.g$ est continue en a.
- $\frac{f}{g}$ est continue en a si $g(a) \neq 0$.

Soit f continue en a et g continue en f(a) alors la composée $g \circ f$ est continue en a.

Exemple

$$f(x,y) = x.\sin(xy)$$

La fonction g: $(x,y) \to \sin(xy)$ est la composée des fonctions $x \to \sin x$ et $(x,y) \to x.y$. La fonction $(x,y) \to x.y$ est le produit des fonctions $(x,y) \to x$ et $(x,y) \to y$. Toutes ces fonctions sont continues en tout point donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2.6 Fonctions de classe C^n

La fonction f est de classe C^n sur un intervalle I si elle est n fois dérivable sur I et si sa dérivée n-ième, $f^{(n)}$ est continue sur I.

3 Dérivées d'une fonction de plusieurs variables

3.1 Dérivée d'une fonction f en a

Soit une fonction f définie sur un ouvert u de $\mathbb{R}^2$ dont les dérivées partielles sont continues.

Alors f admet en tout point a de u une dérivée D_h suivant tout vecteur $h = (h_1; h_2)$, et on a :

$$D_h f(a) = h_1.\frac{\partial f}{\partial x} + h_2.\frac{\partial f}{\partial y}$$

Exemple

Si on reprend la fonction d'un exemple précédent,

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

Soit le point a(1,1). Soit le vecteur $h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

$$D_h f(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \times (-2) = 2\sqrt{2}$$

3.2 Fonction partielle – dérivée partielle

On appelle **fonction partielle** une fonction de plusieurs variables dont on a fixé toutes les variables sauf une. C'est donc **une fonction d'une variable**.

Exemple

Soit

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \frac{1}{\mathrm{x} - \mathrm{y}}$$

Alors

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_0) = \frac{1}{\mathrm{x} - \mathrm{y}_0}$$

est une fonction partielle en x.

On appelle **dérivées partielles de f**, les dérivées des fonctions partielles de f

Dérivée partielle de f par-rapport à x

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}$$

Dérivée partielle de f par-rapport à y

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}$$

Remarque : les dérivées partielles en x et en y sont donc les dérivées suivant $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

3.3 Définition

On dit que f est de classe C[1] si pour tout h, la fonction $x \to D_h f(x)$ est continue sur u.

3.4 Dérivées partielles d'ordre 2

On définit, de la même façon que pour les dérivées d'ordre 1, les dérivées partielles d'ordre 2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

3.4.1 Théorème de Schwarz

Si les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ sont continues en (x_0,y_0) alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_0, y_0)$$

3.5 Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

Soit f une fonction de deux variables réelles x et y, et admettant des dérivées partielles premières continues.

On appelle différentielle totale exacte de f l'application linéaire df, définie de l'ensemble de définition de f vers l'ensemble des réels, telle que

$$df = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

L'accroissement total Δf entre M(x,y,z) et M'(x+dx,y+dy,z+dz) est :

$$\Delta f = f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x,y,z)$$

La différentielle df d'une fonction permet d'estimer cet accroissement Δf si les deux points M et M' sont proches.

3.5.1 Plan tangent

Soit une surface S définie par la fonction $z = f(x,y)$. Soit M_0 un point de coordonnées (x_0, y_0). On suppose que f est dérivable en M_0. Par extension de la notion de tangente pour une fonction d'une seule variable, le plan tangent à f en M_0 est défini par l'équation

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).(y - y_0)$$

Le plan tangent contient les tangentes de toutes les courbes passant en M_0 et contenues dans la surface S.

4 Estimation au voisinage d'un point

4.1 Théorème de Taylor pour les fonctions de deux variables

Soit la fonction f des deux variables x et y.

On considère la fonction

$$f(x + h.t, y + k.t)$$

On considère cette fonction comme une fonction de t, $F(t)$, telle que

$$f(x + h.t, y + k.t) = F(t)$$

Le développement limité de $F(t)$ au voisinage de 0 est :

$$F(t) = F(0) + t.F'(0) + \frac{t^2}{2!}.F''(0) + \cdots$$

Exprimons les dérivées successives de $F(t)$ par-rapport à t en fonction des dérivées partielles de $F(t)$ par-rapport à x et y. Pour simplifier l'écriture on pose

$$\begin{cases} x + h.t = \alpha \\ y + k.t = \beta \end{cases}$$

On a

$$F'(t) = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \alpha}.\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \beta}.\frac{d\beta}{dt}$$

On a

$$\frac{d\alpha}{dt} = h$$
$$\frac{d\beta}{dt} = k$$

On peut aussi écrire que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \alpha}.\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \beta}.\frac{\partial \beta}{\partial y}$$

Or

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 1; \frac{\partial \beta}{\partial y} = 1$$

Donc

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \alpha}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \beta}$$

Finalement,

$$F'(t) = h.\frac{\partial F}{\partial x} + k.\frac{\partial F}{\partial y}$$

Calculons maintenant

$$F''(t) = h.\frac{\partial F'}{\partial x} + k.\frac{\partial F'}{\partial y} = h.\left(h.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + k.\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right) + k.\left(h.\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + k.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)$$

$$F''(t) = h^2.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + k^2.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2hk.\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

La dérivée troisième et les dérivées suivantes s'obtiendraient de la même manière. Par exemple

$$F'''(t) = h^3.\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + k^3.\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + 3h^2k.\frac{\partial^3 F}{\partial^2 x \partial y} + 3hk^2.\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial^2 y}$$

Pour t=0,

$$F(0) = f(x, y)$$

$$F'(0) = h.\frac{\partial f}{\partial x} + k.\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$F''(0) = h^2.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k^2.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2hk.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

On reporte ces expressions dans le développement limité de $F(t)$ au voisinage de 0 :

$$f(x + h.t, y + k.t) = f(x, y) + t.\left(h.\frac{\partial f}{\partial x} + k.\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{t^2}{2!}.\left(h^2.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k^2.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2hk.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + \cdots$$

Avec t=1

$$\boxed{f(x + h.t, y + k.t) = f(x, y) + \left(h.\frac{\partial f}{\partial x} + k.\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}.\left(h^2.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k^2.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2hk.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + \cdots}$$

Cette formule est la formule de Taylor appliquée à une fonction de deux variables indépendantes.

4.2 Développement limité d'ordre 1

Soit la fonction f dont les dérivées partielles sont continues, alors f admet un développement limité à l'ordre 1 et

$$\boxed{f(x_o + h; y_o + k) = f(x_0; y_0) + h.\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) + k.\frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) + \circ\, \varepsilon(x, y)}$$

Le terme $\circ\, \varepsilon(x, y)$ est un terme négligeable devant $h.\frac{\partial f}{\partial x}(x_0\,; y_0)$ et $k.\frac{\partial f}{\partial y}(x_0\,; y_0)$.

<u>Exemple</u>

$$f(x, y) = x^2.\ln(y) + y.\ln(x) + 2x^2y - 1$$

$$f(1,1) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 3$$

Donc le développement limité à l'ordre 1 de f en (1,1) a pour expression

$$f(1 + h; 1 + k) = 1 + 5h + 3k + \circ\, \varepsilon(x, y)$$

On peut utiliser le développement limité à l'ordre 1 pour estimer la valeur d'une fonction de deux variables en un point donné, à partir de la valeur en un autre point, plus facile à calculer.

Par exemple, pour la fonction ci-dessous, la valeur de f en $(1,1)$ est aisée à calculer :

$$f(1; 1) = 1$$

On souhaite estimer la valeur de f en $(1{,}01; 1{,}03)$, alors avec le développement limité à l'ordre 1 de f en $(1,1)$, on peut écrire

$$f(1{,}01;\,1{,}03) \approx 1 + 5 \times 0{,}01 + 3 \times 0{,}03 \approx 1{,}14$$

La valeur précise de $f(1{,}01;\,1{,}03)$ est $1{,}14181$.

4.3 Développement limité d'ordre 2

Si les dérivées partielles secondes de $f(x,y)$ sont continues au voisinage de (x_0, y_0) alors

$$\begin{aligned} f(x_o + h; y_o + k) &\\ = f(x_0;y_0) + h.\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0) + k.\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0) &\\ + \frac{1}{2}\left(h^2.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0;y_0) + k^2.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0;y_0) + 2hk.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)\right) +\circ\, \varepsilon(x,y) \end{aligned}$$

<u>Exemple</u>

$$f(x,y) = x^2.\ln(y) + y.\ln(x) + 2x^2y - 1$$

$$f(1{,}1) = 1; \frac{\partial f}{\partial x}(1{,}1) = 5; \frac{\partial f}{\partial y}(1{,}1) = 3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1{,}1) = 3; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1{,}1) = 3; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1{,}1) = -1$$

Avec ce développement limité à l’ordre 2, on peut de nouveau estimer la valeur de $f(1{,}01;\,1{,}03)$:

$$\begin{aligned} f(1{,}01;\,1{,}03) &\approx 1 + 5 \times 0{,}01 + 3 \times 0{,}03 + \frac{1}{2}.(3 \times 0{,}01^2 - 0{,}03^2 + 2 \times 0{,}01 \times 0{,}03 \times 7) +\circ\, \varepsilon(x,y) \\ &\approx 1{,}14180 \end{aligned}$$

La valeur estimée est plus précise qu’avec le développement à l’ordre 1.

5 Extremums d'une fonction de deux variables

5.1 Point critique

Un point (x_0,y_0) où les dérivées partielles d'ordre 1 de f sont nulles est appelé **point critique.**

5.2 Minimum et maximum local

La fonction f admet un **maximum local** en un point (x_0,y_0) s'il existe un voisinage V de (x_0,y_0) tel que pour tout point (x,y) de V, on a

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$$

De même, f admet un **minimum local** s'il existe un voisinage V de (x_0,y_0) tel que pour tout point (x,y) de V, on a

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$$

Remarque : si (x_0,y_0) est un minimum/maximum sur tout le domaine de définition de f, on parle de minimum/maximum **absolu**.

<u>Exemple</u>

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Pour tout couple de réels (x,y),

$$f(x,y) \geq 0$$

De plus, f(x,y))=0 ⇔ x=0 et y=0 donc f admet un minimum **absolu** en (0,0)

5.3 Notation de Monge

En un point donné (x_0,y_0), on note

$$p = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x}(x_0,y_0)$$

$$q = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$r = \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial x^2}(x_0,y_0)$$

$$s = \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}\,\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}\,\partial y}(x_0,y_0)$$

$$t = \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

5.4 Théorème

Soit f une fonction de classe C^2 sur un domaine ouvert U et soit (x_0,y_0) un point de U tel que

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases}$$

Si $s^2 - rt < 0$ alors f admet un extremum en ce point, un minimum si r > 0, un maximum si r < 0.

Si $s^2 - rt > 0$ alors il n'y a pas d'extremum en ce point.

Si $s^2 - rt = 0$ alors on ne peut pas conclure, il faut étudier le signe de $f(x,y) - f(x_0,y_0)$

Démonstration

Soit la fonction de 2 variables f(x,y). Soient h et k des petits accroissements respectivement de x et y. Soit la formule de Taylor-Mac Laurin à l'ordre 2 de la fonction f :

$$f(x+h;y+k) = f(x,y) + h.\frac{\partial f}{\partial x} + k.\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}.\left(h^2.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + \|(h,k)\|^2.\varepsilon(h,k)$$

Avec $\varepsilon(h,k) \to 0$ quand $(h,k) \to (0,0)$.

Soit (x_0, y_0) le point critique étudié. En ce point, les dérivées partielles premières sont nulles donc

$$f(x_0+h;y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}.\left(h^2.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + \|(h,k)\|^2.\varepsilon(h,k)$$

Avec la notation de Monge

$$f(x_0+h;y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}.(h^2.r + 2hk.s + k^2.t) + \|(h,k)\|^2.\varepsilon(h,k)$$

La question est de savoir si, pour tout accroissement h et k, on a

$$f(x_0+h;y_0+k) < f(x_0,y_0) \text{ ou } f(x_0+h;y_0+k) > f(x_0,y_0)$$

On a donc besoin d'étudier le signe de $h^2.r + 2hk.s + k^2.t$. Appellons cette grandeur $q(h,k)$.

- Pour $r \neq 0$

$$q(h,k) = h^2.r + 2hk.s + k^2.t = r.\left(h^2 + 2hk.\frac{s}{r} + k^2.\frac{t}{r}\right) = r.\left(\left(h + \frac{s}{r}.k\right)^2 - \frac{s^2 - rt}{r^2}.k^2\right)$$

Si $r > 0$ et $s^2 - rt < 0$ alors $q(h,k) > 0$ pour tout couple (h,k), et $f(x_0+h;y_0+k) > f(x_0,y_0)$. Le point (x_0,y_0) est un minimum local.

Si $r < 0$ et $s^2 - rt < 0$ alors $q(h,k) < 0$ pour tout couple (h,k), et $f(x_0+h;y_0+k) < f(x_0,y_0)$. Le point (x_0,y_0) est un maximum local.

Si $s^2 - rt > 0$ alors le signe de $q(h,k)$ dépend des valeurs relatives de h et k. Le point (x_0,y_0) ne sera ni un minimum local ni un maximum local. On parlera de point selle (Figure 2 en haut à droite).

Si $s^2 - rt = 0$ on ne peut conclure car il est alors possible que $q(h,k) = 0$.

- Pour $r = 0$ et $t \neq 0$

$$q(h,k) = t.\left(\left(k + \frac{s}{t}.h\right)^2 - \left(\frac{s^2}{t^2}.h^2\right)\right)$$

Le signe de $q(h,k)$ dépend des valeurs relatives de h et k. Le point (x_0,y_0) ne sera ni un minimum local ni un maximum local. On parlera de point selle (Figure 2 en haut à droite).

- Pour $r = t = 0$

$$q(h,k) = shk = \frac{s}{2}.((h+k)^2 - (h-k)^2)$$

Le signe de $q(h,k)$ dépend des valeurs relatives de h et k. Le point (x_0,y_0) ne sera ni un minimum local ni un maximum local. On parlera de point selle (Figure 2 en haut à droite).

Finalement,

Soit f une fonction de classe C^2 sur un domaine ouvert U et soit (x_0,y_0) un point de U tel que

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases}$$

Si $s^2 - rt < 0$ alors f admet un extremum en ce point, un minimum si r > 0, un maximum si r < 0.

Si $s^2 - rt > 0$ alors il n'y a pas d'extremum en ce point.

Si $s^2 - rt = 0$ alors on ne peut pas conclure, il faut étudier le signe de $f(x, y) - f(x_0, y_0)$

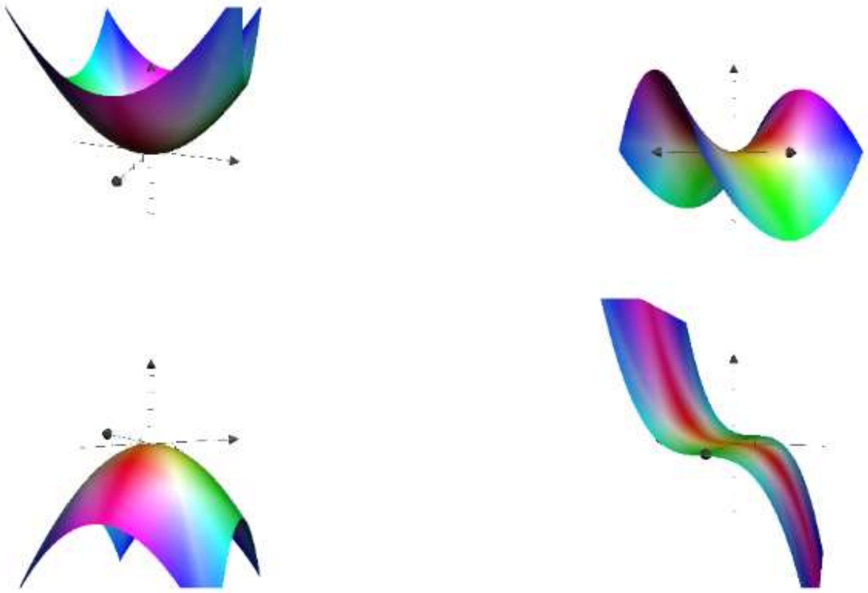


Figure 2. Types de points critiques https://www.math.univ-paris13.fr/~beguin/Enseignement_files/Cours-milieu.pdf

5.5 Recherche des extremums

1/ Chercher les points critiques : ils vérifient le système

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

2/ Pour chaque point critique, calculer $s^2 - r.t$ et conclure

6 Exercices

6.1 Exercice : étude d'un point critique

Soit la fonction f telle que

$$f(x, y) = x.y$$

Le point (0 ;0) est-il un extremum ?

Correction

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0; 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0; 0) = 0$$

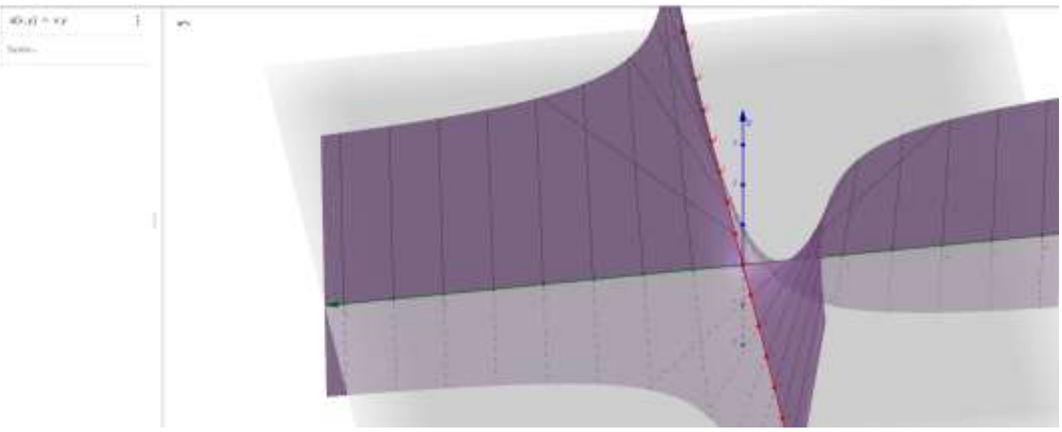
Le point (0 ;0) est un point critique.

Soit une boule (B) de centre (0,0) et de rayon r.

$$f\left(\frac{r}{2}; \frac{r}{2}\right) = \frac{r^2}{4} > 0$$

$$f\left(\frac{r}{2}; -\frac{r}{2}\right) = -\frac{r^2}{4} < 0$$

Donc le point (0,0) n'est pas un extremum.



6.2 Exercice : étude des extremums

Soit la fonction f telle que

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy$$

Etudier les points critiques de cette fonction sur $\mathbb{R}^2$.

Correction

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 9y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 9x$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (0; 0)\ ou\ (3; 3)$$

Il y a donc deux points critiques : (0 ;0) et (3 ;3)

En (0 ;0), $f(x, 0) = x^3$ donc $f(x, 0) > 0$ pour $x > 0$ et $f(x, 0) < 0$ pour $x < 0$ donc la fonction f n'a ni maximum ni minimum en ce point.

En (3 ;3), on peut calculer les dérivées secondes de f en ce point.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -9$$

Au point (3 ;3)

$$r = 18; s = -9; t = 18$$

$$r.t - s^2 = 243$$

Donc f admet un extremum. De plus, $r > 0$ donc c'est un minimum.

7 Références bibliographiques

(Serane, 1965; Quinet and Quinet, 1992, 1996; Belhaj and Ben Aïssa, 2013; Vélu, 2019, 2020)

Belhaj, S. and Ben Aïssa, A. (2013) *Mathématiques pour l'informatique: cours et exercices corrigés licence 1 & 2 informatique*. Paris: Vuibert.

Quinet, J. and Quinet, J. (1992) *Fonctions usuelles*. 6. éd. Paris: Dunod (Cours élémentaire de mathématiques supérieures / J. Quinet, T. 2).

Quinet, J. and Quinet, J. (1996) *Calcul intégral et séries*. 6. éd. Paris: Dunod (Cours élémentaire de mathématiques supérieures / J. Quinet, T. 3).

Serane, G. (1965) *Mathématiques de la physique appliquée à l'usage des candidats au certificat de T.M.P est élèves-ingénieurs et des ingénieurs*. Paris: DUNOD.

Vélu, J. (2019) *Méthodes mathématiques pour l'informatique: cours et exercices corrigés*. 5è ed. Malakoff: Dunod (Info Sup).

Vélu, J. (2020) *Mathématiques générales: cours et exercices corrigés*. Malakoff (Hauts-de-Seine): Dunod.

https://www.geogebra.org/graphing

https://www.math.univ-paris13.fr/~beguin/Enseignement_files/Cours-milieu.pdf