

# Résistance des Matériaux

---

## Cours et exercices corrigés



F. Menan

<https://lesdocsduprof.com/>

[fmenan@cesi.fr](mailto:fmenan@cesi.fr)

## Table des matières

<b>1 GENERALITES.....</b>	<b>4</b>
<b>2 ESTIMATION DES EFFORTS ET MOMENTS.....</b>	<b>7</b>
2.1 NOTION DE TORSEUR.....	7
2.2 PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE.....	8
2.3 SCHEMATISATION DES LIAISONS PAR LES TORSEURS.....	9
2.4 CAS PARTICULIER D'UNE CHARGE LINEIQUE .....	10
<b>3 DEGRE D'HYPERSTATICITE D'UN SYSTEME .....</b>	<b>11</b>
3.1 DEFINITIONS.....	11
3.2 EXEMPLES .....	11
3.3 DEGRE D'HYPERSTATICITE INTERNE.....	13
3.4 DEGRE D'HYPERSTATICITE EXTERNE .....	13
3.5 AUTRES FORMULES POUR LE DEGRE GLOBAL.....	14
<b>4 RESOLUTION D'UN PROBLEME DE RDM .....</b>	<b>15</b>
4.1 DEMARCHE .....	15
4.2 EXEMPLE .....	15
<b>5 ETUDE DES POUTRES.....</b>	<b>17</b>
5.1 NOTION DE POUTRE .....	17
5.2 LES HYPOTHESES DE LA RESISTANCE DES MATERIAUX.....	17
5.3 EFFORTS DANS UNE POUTRE : TORSEUR DE COHESION .....	18
<b>6 CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS .....</b>	<b>22</b>
6.1 CENTRE DE GRAVITE .....	22
6.2 MOMENT STATIQUE.....	23
6.3 MOMENT QUADRATIQUE .....	24
6.4 MOMENT QUADRATIQUE POLAIRE .....	26
6.5 MOMENTS QUADRATIQUES ET MOMENT QUADRATIQUE POLAIRE DE SECTIONS USUELLES .....	27
<b>7 ESTIMATION DES CONTRAINTE.....</b>	<b>29</b>
7.1 TRACTION – COMPRESSION .....	29
7.2 CISAILLEMENT.....	31
7.3 TORSION.....	34
7.4 FLEXION PURE.....	34
7.5 PRINCIPE DE SUPERPOSITION.....	36
7.6 CONCENTRATION DE CONTRAINTE .....	38
7.7 CRITERES DE RUPTURE / DIMENSIONNEMENT .....	39
<b>8 LOI DE COMPORTEMENT D'UNE POUTRE EN FLEXION.....</b>	<b>41</b>
8.1 DEFORMEE D'UNE POUTRE EN FLEXION .....	41
<b>9 SYSTEMES HYPERSTATIQUES.....</b>	<b>45</b>
9.1 RESOLUTION D'UN PROBLEME HYPERSTATIQUE.....	45
9.2 METHODE DES DEPLACEMENTS .....	47
<b>10 POUTRES CONTINUES.....</b>	<b>57</b>
10.1 THEOREME DES TROIS MOMENTS.....	57
10.2 MOMENT FLECHISSANT.....	59
10.3 EFFORT TRANCHANT.....	61
10.4 FORMULAIRE .....	62

10.5	POUTRES CONTINUES PAR STATIQUE GRAPHIQUE .....	62
<b>11</b>	<b>METHODES ENERGETIQUES.....</b>	<b>64</b>
11.1	ENERGIE DE DEFORMATION .....	64
11.2	THEOREME DE RECIPROCITE DE MAXWELL-BETTI .....	68
11.3	THEOREME DE CASTIGLIANO .....	70
11.4	THEOREME DE MENABREA .....	73
11.5	THEOREME DE LA CHARGE UNITAIRE .....	73
<b>12</b>	<b>FLAMBEMENT .....</b>	<b>79</b>
12.1	INTRODUCTION .....	79
12.2	MODELISATION DU PHENOMENE .....	80
<b>13</b>	<b>FICHES METHODES .....</b>	<b>84</b>
13.1	POUR NE PLUS VOUS TROMPER DANS LES BRAS DE LEVIER ET LES SIGNES DES MOMENTS.....	84
<b>14</b>	<b>EXERCICES .....</b>	<b>86</b>
14.1	CARACTERISTIQUES DES SECTIONS .....	86
14.2	ESTIMATION DES EFFORTS ET MOMENTS.....	92
14.3	POUTRES ISOSTATIQUES EN FLEXION .....	101
14.4	ESTIMATION DES CONTRAINTES .....	117
14.5	SYSTEMES HYPERSTATIQUES.....	126
14.6	POUTRES CONTINUES .....	129
14.7	METHODES ENERGETIQUES.....	137
14.8	ETUDE DES PORTIQUES .....	138
14.9	TREILLIS ISOSTATIQUES .....	140
14.10	EXERCICES DE SYNTHESE .....	142
<b>15</b>	<b>RAPPELS : PROPRIETES MECANIQUES DES MATERIAUX .....</b>	<b>145</b>
15.1	MATERIAU HOMOGENE / HETEROGENE ET MATERIAU ISOTROPE / ANISOTROPE .....	145
15.2	DEFORMATION .....	145
15.3	COMPORTEMENT EN TRACTION .....	145
<b>16</b>	<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....</b>	<b>150</b>

Photo de couverture

Charpente d'un laboratoire d'essai industriel. « Annales des mines. Revue mensuelle des industries extractives », nov. 1971, [En ligne]. Disponible sur: Source gallica.bnf.fr / MINES ParisTech [1]

# 1 Généralités

La Résistance des Matériaux « a pour objet l'étude des conditions d'équilibre élastique des corps » [2].

La Figure 1 présente une démarche classique de dimensionnement d'une structure, partant d'une conception donnée au départ, de conditions de service imposées par le cahier des charges et d'un matériau donné.

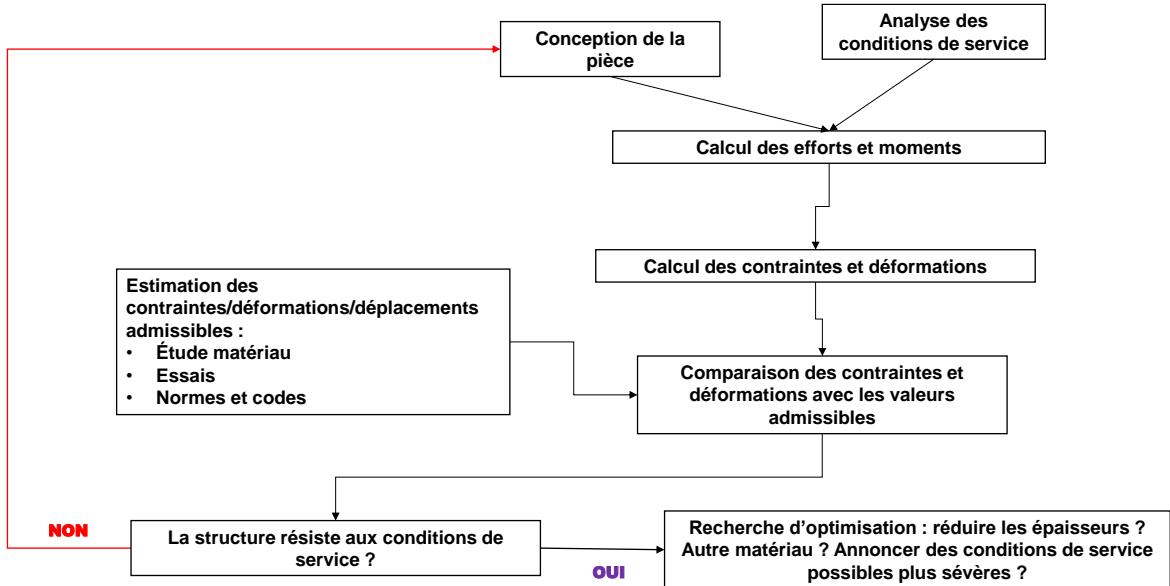


Figure 1. Exemple de conception et analyse d'une structure

On parlera plutôt de dimensionnement lorsque, partant des efforts de service et du matériau, il faudra estimer les dimensions de la pièce pour qu'elle résiste aux conditions de service.

On parlera plutôt de justification lorsque, partant des dimensions, des efforts de service, du matériau, on vérifiera par le calcul que la pièce résiste aux conditions de service.

On peut distinguer 4 méthodes d'analyse d'une structure :

- Analytique : théorie classique de la Résistance Des Matériaux issue de la Mécanique des milieux continus. C'est l'objet de ce document.
- Normes & Codes : théorie classique + quelques paramètres, diagrammes, résultats issus de l'expérience ou d'essais + quelques coefficients de sécurité spécifiques, conditions de chargement « métier »....etc.
- Simulation numérique (Figure 3 et Figure 4)
- Essais (Figure 2)

Les méthodes analytiques ne sont pas à délaisser : elles permettent rapidement et à moindre coût de dimensionner/justifier une structure, ou de vérifier le résultat d'une simulation, d'un essai. Dans certains secteurs elles restent la première méthode d'analyse des structures.

Les normes et codes proviennent d'organismes extérieurs à l'entreprise (AFNOR, réglementation, Eurocodes, CODAP...) ou sont mis en œuvre par l'entreprise elle-même afin de respecter une réglementation générale (cas de l'aéronautique).

La simulation numérique est aujourd'hui **peu couteuse** et relativement simple d'usage mais un logiciel peut fournir des **résultats aberrants**, donc cette méthode demande du recul et de l'esprit critique....

Les essais sont **couteux** et parfois **fastidieux** mais restent un **moyen fiable de valider une conception**. En R&D ils fournissent de nouvelles connaissances, valident les modèles...etc. Certains secteurs d'activité sont obligés, par réglementation, de fournir des résultats d'essais de validation.

La meilleure approche est en fait de **comparer entre elles toutes ces méthodes** afin de se faire sa meilleure idée sur la résistance finale de la structure.

	Principe	Avantages	Inconvénients
Théorie analytique	Calcul "feuille blanche" à partir de la théorie analytique standard	Rapide Bon marché	Inutilisable pour géométries, chargements, comportements matériaux complexes
Normes & Codes	Calculs analytiques basés sur des modèles souvent issus d'observations expérimentales	Rapide Bon marché	Difficile pour géométries, chargements, comportements matériaux complexes Trop conservatif parfois
Simulation numérique	Logiciels du commerce standards (ABAQUS, NASTRAN, ANSYS, MSC, CATIA, SOLIDWORKS.....) Méthodes numériques éléments finis,.....etc	Utilisable pour des géométries et comportements complexes	Coût plus élevé que les méthodes analytiques (10k€-30k€ une licence logiciel) Expertise et esprit critique nécessaires Puissance de calcul nécessaire
Essais	Essai mécanique "échelle 1" ou sur modèles réduits en laboratoire d'essais	Validation idéale de la tenue d'une structure Utilisable pour des géométries et	Valide seulement pour le cas de charge étudié Si besoin de modification géométrique

		comportements très complexes	ou matériau, procédure longue Cher
--	--	------------------------------	---------------------------------------

Tableau 1. Comparaison des différentes méthodes de dimensionnement

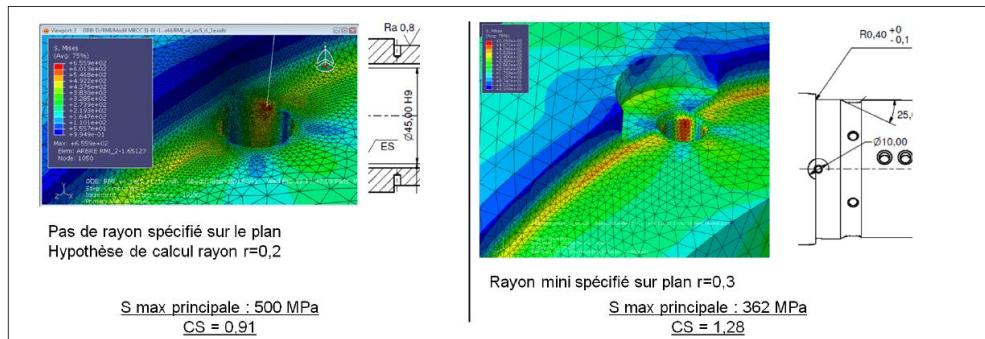
Figure 2. Essai de fatigue sur le COMET ([http://jn.passieux.free.fr/html/Comet\\_1.php](http://jn.passieux.free.fr/html/Comet_1.php))

Fig. 8 : Exemple d'optimisation en fatigue de la conception du RMI. A gauche : conception originale. A droite : conception optimisée. CS : Coefficient de Sécurité

Figure 3. Exemple de calcul par éléments finis sur Abaqus [3]

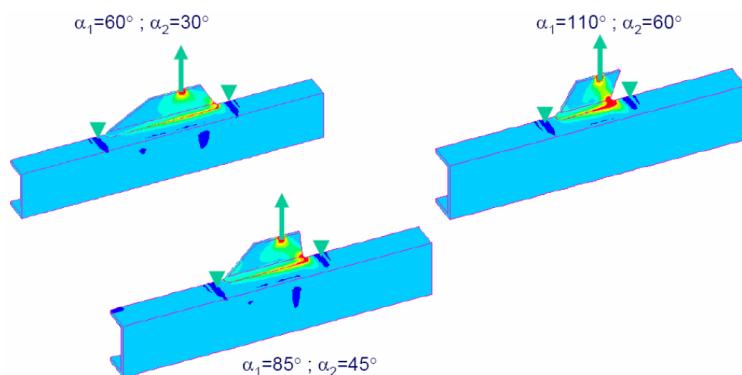


Figure 21. 3 different attachment geometries analysed by FEA

Figure 4. CLASSIFICATION OF SEVERAL WELDED JOINTS FOR LOAD CARRYING ATTACHMENTS ACCORDING TO THEIR FATIGUE STRENGTH [4]

## 2 Estimation des efforts et moments

### 2.1 Notion de torseur

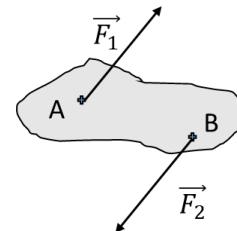
#### Constatation 1

En mécanique du point, l'équilibre du système se traduit par une somme des forces extérieures nulles :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

En mécanique des solides, cette condition est-elle suffisante ?

Soit un solide soumis à l'action de deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  telles que  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ .

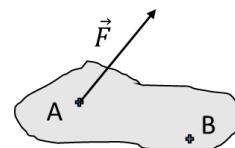


On a bien  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$  et pourtant on voit bien que le solide n'est pas à l'équilibre. Le solide n'est pas à l'équilibre car la somme des moments n'est pas nulle.

#### Constatation 2

La force  $F$  ci-dessous, appliquée en  $A$ , exerce un moment en  $B$ . Si l'on souhaite exprimer au point  $B$  l'action qu'a cette force, on doit exprimer à la fois la force  $F$  et le moment du à cette force.

Ces constatations montrent que l'on a besoin d'un outil mathématique nouveau : le torseur. Il contient à la fois l'information sur la force et l'information sur le moment appliqué.



Définition

Un torseur statique d'action mécanique est un système constitué de deux grandeurs :

- Une force appelée « résultante »  $\vec{R}$
- Un moment résultant  $\vec{M}$

L'action en  $A$ , exercée par un solide 1 sur un solide 2, dans le repère  $(X, Y, Z)$  est exprimée comme ci-dessous :

$$[Action\ 1 \rightarrow 2]_A = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})}$$

$X_{12}, Y_{12}$  et  $Z_{12}$  sont les composantes dans le repère (X,Y,Z) de la force (résultante) appliquée par le solide 1 sur le solide 2 en A.

$L_{12}, M_{12}$  et  $N_{12}$  sont les composantes dans le repère (X,Y,Z) du moment appliqué par le solide 1 sur le solide 2 en A.

De nombreuses notations existent. L'essentiel est d'en utiliser une suffisamment explicite pour le lecteur.

On appliquera alors le Principe Fondamental de la Statique (PFS) exprimé avec les torseurs d'actions mécaniques, ce qui nous permettra d'exprimer l'équilibre des forces en tout point du solide mais aussi l'équilibre des moments en tout point du solide.

Déplacement d'un torseur

Le torseur en B d'une action mécanique appliquée au point A a pour expression :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R} \\ \vec{R} \end{array} \right\}} = \boxed{\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}}$$

Torseur pour un problème plan

Dans le plan un solide est soumis à deux forces et un moment. Par exemple dans le plan ( $\vec{x}, \vec{y}$ ), les forces ont pour seules composantes X et Y et les moments sont seulement suivant  $\vec{z}$ . Le torseur d'action mécanique sera :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} X \\ Y \\ / \\ / \\ N \end{array} \right\}}$$

## 2.2 Principe fondamental de la statique

Enoncé : un solide S est en équilibre sous l'action de n torseurs d'actions mécaniques si la somme des n torseurs, tous écrits au même point A, est égale au torseur nul.

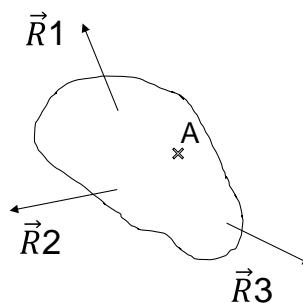


Figure 5. Solide soumis à trois actions mécaniques

Pour l'exemple de la Figure 5 le PFS s'écrira :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1 \end{array} \right\}} + \boxed{\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2 \end{array} \right\}} + \boxed{\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_3 \\ \vec{M}_3 \end{array} \right\}} = \boxed{\left\{ \begin{array}{l} \Sigma \vec{R}_l \\ \Sigma \vec{M}_l \end{array} \right\}} = \boxed{\left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$$

## 2.3 Schématisation des liaisons par les torseurs

Une liaison technologique usuelle peut être schématisée sous forme d'un torseur.

Voir colonne actions transmissibles de la figure ci-dessous.

Symbole des liaisons mécaniques NFE 04-015 ISO 3952					
Nom de la liaison	Représentation plane	Représentation en perspective	Exemple	Torseur cinématique	Actions transmissibles
Encastrement ou liaison fixe				$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{bmatrix}$
Pivot d'axe (0,Z)				$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \omega_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{bmatrix}$
Glissière d'axe (0,X)				$\begin{bmatrix} V_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{bmatrix}$
Hélicoïdale d'axe (0,Z)				$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ V_z & \omega_z \end{bmatrix}$ $V_z = \frac{p}{2\pi} \omega_z$	$\begin{bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{bmatrix}$
Pivot glissant d'axe (0,Z)				$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ V_z & \omega_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} X & L \\ Y & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Rotule à doigt de centre 0, axe doigt (0,Z)				$\begin{bmatrix} 0 & \omega_x \\ 0 & 0 \\ 0 & \omega_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & 0 \end{bmatrix}$

Les liaisons les plus rencontrées dans les poutres sont présentées ci-dessous.

Liaison	Schéma usuel	Torseur associé
Appui		$\begin{bmatrix} X & / \\ Y & / \\ / & 0 \end{bmatrix}_A$
Appui glissant		$\begin{bmatrix} 0 & / \\ Y & / \\ / & 0 \end{bmatrix}_A$
Encastrement		$\begin{bmatrix} X & / \\ Y & / \\ / & N \end{bmatrix}_A$

Figure 6. Schématisation des liaisons par les torseurs

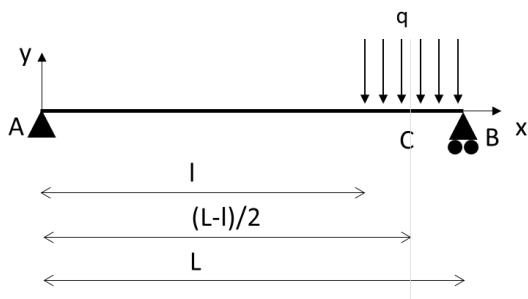
## 2.4 Cas particulier d'une charge linéique

Une charge linéique est une charge appliquée le long d'un élément 1D. C'est une charge par unité de longueur exprimée en N/m.

On peut représenter une charge linéique par une force ponctuelle appliquée au milieu de la ligne d'application de cette charge.

La charge linéique ci-dessous, appliquée entre l et L, peut donc être représentée par le torseur en C :

$$\{T\} = \underset{C}{\left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ -q \cdot (L-l) & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}}_{(x,y,z)}$$



On peut déplacer ce torseur en A

$$\vec{M}_A = \vec{M}_C + \overrightarrow{AC} \wedge (-q \cdot (L-l) \cdot \vec{y}) = \left( \begin{matrix} \frac{L-l}{2} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right) \wedge \left( \begin{matrix} 0 \\ -q \cdot (L-l) \\ 0 \end{matrix} \right) = \left( \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -q \cdot \frac{(L-l)^2}{2} \end{matrix} \right)$$

$$\{T\} = \underset{C}{\left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ -q \cdot (L-l) & 0 \\ 0 & -q \cdot \frac{(L-l)^2}{2} \end{matrix} \right\}}_{(x,y,z)}$$

## 3 Degré d'hyperstaticité d'un système

### 3.1 Définitions

On définit :

- $d_{Global}$  degré d'hyperstaticité global du système.  $d_{Global}$  correspond au nombre d'équations nécessaires, en plus des équations d'équilibre, pour calculer les réactions d'appui.
- $d_{externe}$  degré d'hyperstaticité externe
- $d_{interne}$  degré d'hyperstaticité interne

Dans le plan

$$d_{externe} = r - 3$$

$$d_{interne} = l_i - (3b - 3)$$

$$d_{Global} = d_{externe} + d_{interne}$$

Avec

- r : nombre de réactions d'appui
- $l_i$  nombre d'inconnues dues aux liaisons internes
- b nombre d'éléments composant la structure

Remarque : dans l'espace, on a :

$$d_{externe} = r - 6$$
$$d_{interne} = l_i - (6b - 6)$$

### 3.2 Exemples

Les structures de la Figure 7 illustrent les trois degrés d'hyperstaticité et leur relation.

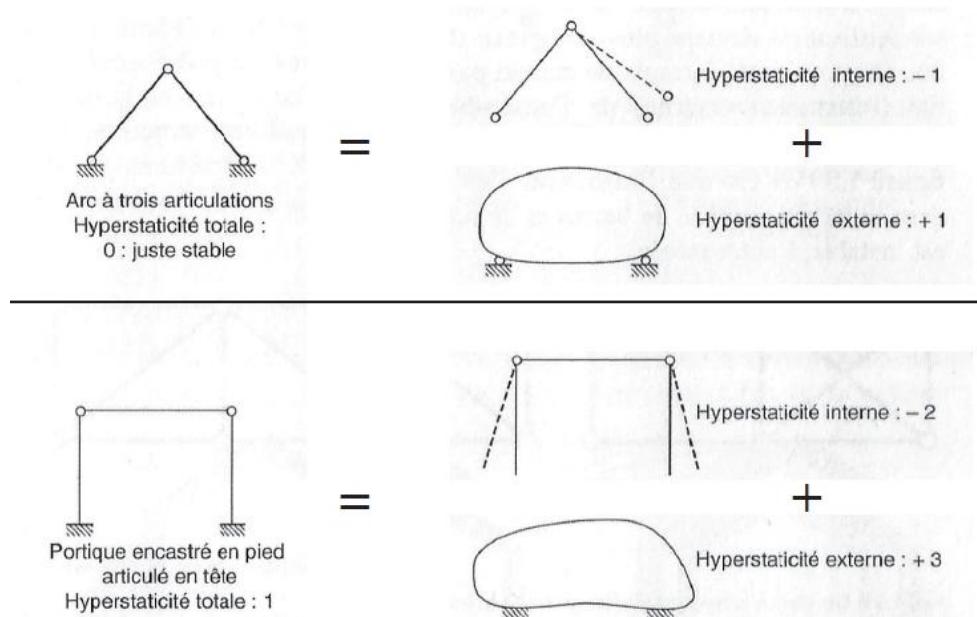


Figure 7. Exemples de degré d'hyperstaticité (EPSAA - construction A3 Guillaume NICOLAS - 2019-2020)

	Isostatique
	Hyperstatique
	Isostatique
	Hyperstatique
	Hyperstatique

Figure 8. Systèmes isostatiques / hyperstatiques

Image : ECAM Lyon - RdM - Serge VIALA

Cas	1	2	3
Paramètres	$r=5$ $l_i=2$ $b=2$	$r=4$ $l_i=2$ $b=2$	$r=3$ $l_i=2$ $b=2$
Externe	$5-3=2$	$4-3=1$	$3-3=0$
Interne	$2-(3*2-3)=-1$	$2-(3*2-3)=-1$	$2-(3*2-3)=-1$
Global	1	0	-1

Figure 9. Exemples de structures isostatiques / hyperstatiques

### 3.3 Degré d'hyperstaticité interne

On parle de stabilité interne quand deux points de la structure ne peuvent pas se déplacer l'un par rapport à l'autre sans qu'il y ait déformation des éléments de la structure. Autrement dit, on a stabilité interne s'il est nécessaire que les éléments de la structure se déforment pour que deux points aient un déplacement relatif non nul.

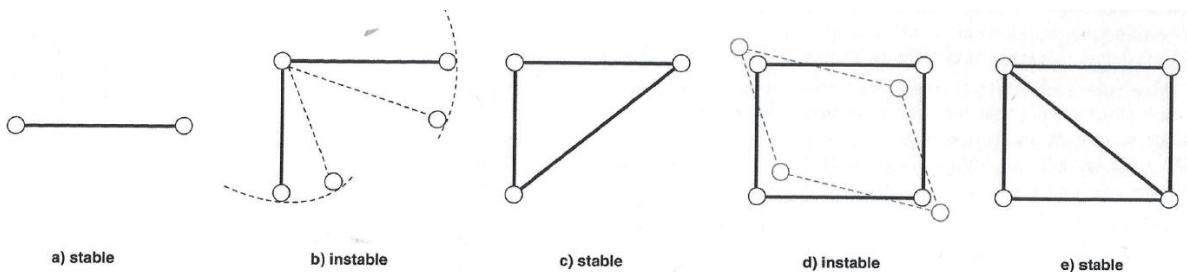


Figure 10. EPSAA - construction A3 Guillaume NICOLAS - 2019-2020

### 3.4 Degré d'hyperstaticité externe

Pour le degré d'hyperstaticité externe, on considère la structure comme indéformable et on compare le nombre d'inconnues de liaison au nombre d'équations apportées par les équations d'équilibre.

Pour des structures simples (poutres,...), le degré d'hyperstaticité interne étant nul, on confond souvent le degré d'hyperstaticité externe et le degré d'hyperstaticité global.

### 3.5 Autres formules pour le degré global

Il existe de nombreuses autres formules pour calculer les différents degrés d'hyperstaticité.

Formule 1

$$d_G = p - ddl$$

- $ddl$  nombre total de degrés de liberté avant assemblage de la structure (3 par élément dans le plan et 6 dans l'espace)
- $p$  nombre total de degrés de liberté bloqués par les liaisons

Articulation		$p=2(n-1)$ degrés de liberté bloqués par les liaisons N : nombre d'éléments reliés entre eux
Encastrement		$p=3(n-1)$ degrés de liberté bloqués par les liaisons N : nombre d'éléments reliés entre eux

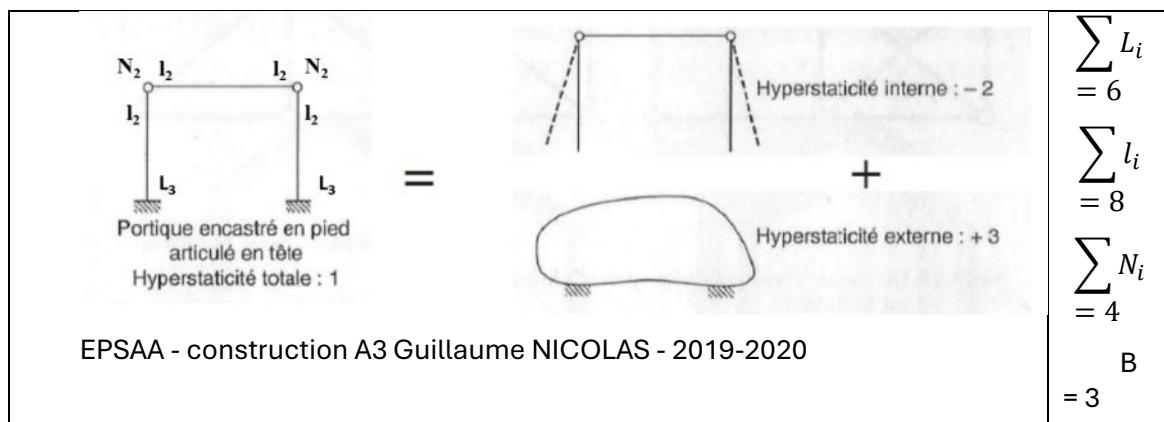
Formule 2

$$d_{global} = \sum L_i + \sum l_i - \sum N_i - 3b$$

- $\sum L_i$  liaisons externes (nombre de réactions aux appuis)
- $\sum l_i$  liaisons dans chaque barre
- $\sum N_i$  nombre de ddl bloqués aux nœuds de la structure
- $b$  nombre d'éléments composant la structure

Exemple

$$d_{global} = 2L_3 + 4l_2 - 2N_2 - 3 = 6 + 8 - 4 - 3 = 1$$

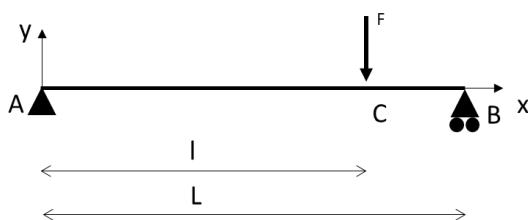


## 4 Résolution d'un problème de RDM

### 4.1 Démarche

1. Schématiser les liaisons par des torseurs
2. Isoler une pièce de la structure
3. Faire le bilan des forces sur cette pièce
4. Calculer le degré d'hyperstatiticité du problème (si problème hyperstatique, voir chapitres suivants)
5. Si problème isostatique, appliquer le PFS en X, Y, Z
6. Résoudre le système d'équations

### 4.2 Exemple



Etape 1 : définir les torseurs

Exprimer le torseur d'action mécanique de chaque action ou liaison extérieure.

Appui en A

$$\{T1\} = \begin{Bmatrix} R_{xA} & 0 \\ R_{yA} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Appui glissant en B

$$\{T2\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ R_{yB} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Effort en C

$$\{T3\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

$$\vec{R}_A = R_{xA} \cdot \vec{x} + R_{yA} \cdot \vec{y}$$

$$\vec{R}_B = R_{yB} \cdot \vec{y}$$

$$\vec{F}_C = -F \cdot \vec{y}$$

$$\vec{M}_A = \vec{0}$$

$$\vec{M}_B = \vec{0}$$

$$\vec{M}_C = \vec{0}$$

Etape 2 : déplacer les torseurs en un même point

On choisit le point A.

Appui en A

$$\{T1\} = \begin{Bmatrix} R_{xA} & 0 \\ R_{yA} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

Appui glissant en B

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_B = \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R_{By} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L \cdot R_{Bx} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\{T2\} = \boxed{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ R_{yB} & 0 \\ 0 & L.R_{Bx} \end{Bmatrix}}_{(x,y,z)}$$

Effort en C

$$\vec{M}_A = \vec{M}_C + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F.l \end{pmatrix}$$

Donc

$$\{T3\} = \boxed{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F.l \end{Bmatrix}}_{(x,y,z)}$$

## Etape 3 : Principe fondamental de la statique

Pour un système en équilibre, la somme des torseurs est égale au torseur nul, en tout point du système. Il vient que la somme des résultantes et la somme des moments sont nulles.

$$\boxed{\begin{Bmatrix} R_{xA} & 0 \\ R_{yA} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}}_{(x,y,z)} + \boxed{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ R_{yB} & 0 \\ 0 & L.R_{Bx} \end{Bmatrix}}_{(x,y,z)} + \boxed{\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F.l \end{Bmatrix}}_{(x,y,z)} = \{0\}$$

$$R_{xA} = 0$$

$$R_{yA} + R_{yB} - F = 0$$

$$L.R_{Bx} - F.l = 0$$

## 5 Etude des poutres

### 5.1 Notion de poutre

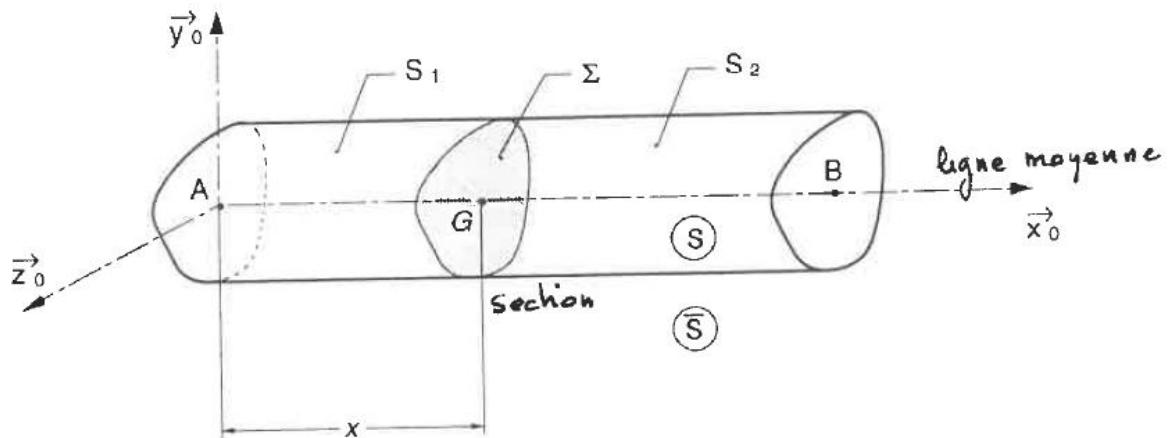


Figure 11. Notion de poutre

Une poutre est un solide dont une dimension, la longueur, est grande devant les grandeurs caractéristiques de la section (diamètre, côté, largeur, hauteur.....). C'est un solide généré par une section ayant translaté le long d'une abscisse (droite ou curviligne).

Les charges supportées doivent être contenues dans le plan de symétrie.

### 5.2 Les hypothèses de la Résistance des Matériaux

Le matériau sera supposé homogène et isotrope.

Les déformations seront supposées faibles par rapport aux dimensions de la poutre.

Analyse élastique : le matériau reste dans le domaine élastique.

Principe de St Venant : loin des points d'application des charges, l'état de contraintes ne dépend que du torseur associé à l'effet de ces charges.

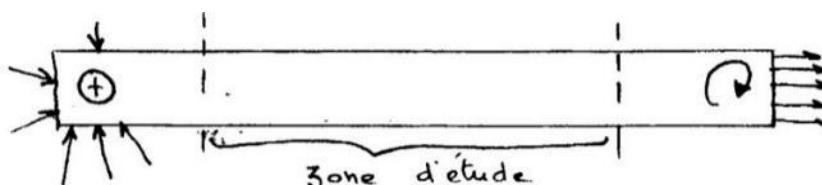


Figure 12. Principe de St Venant

Hypothèse de Navier Bernoulli : toute section droite avant déformation reste, après déformation, une section droite.

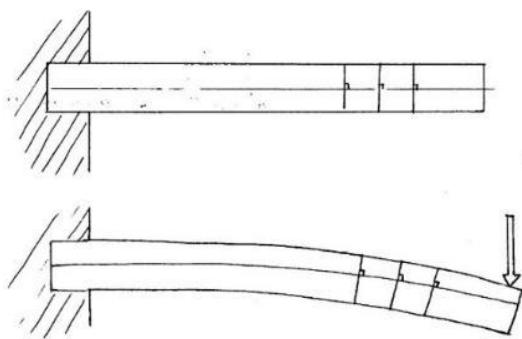


Figure 13. Hypothèse de Navier Bernoulli

## 5.3 Efforts dans une poutre : torseur de cohésion

### 5.3.1 Définition

Par définition, le torseur des actions de la partie II sur la partie I, écrit [Actions II → I], est le torseur de cohésion (ou torseur des efforts intérieurs).

$$[\text{Actions II} \rightarrow \text{I}]_G = \begin{pmatrix} N_x & M_x \\ T_y & M_y \\ T_z & M_z \end{pmatrix}$$

N<sub>x</sub> : effort normal

T<sub>y</sub> et T<sub>z</sub> : efforts tranchants

M<sub>x</sub> : moment de torsion

M<sub>y</sub> et M<sub>z</sub> : moments fléchissant (flexion)

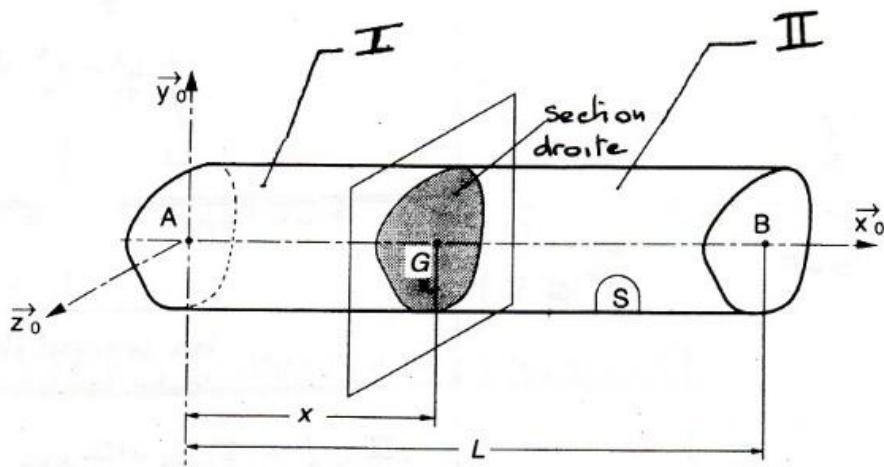


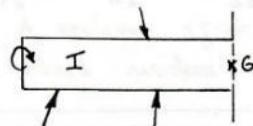
Figure 14. Méthode de la coupure dans une poutre

### 5.3.2 Calcul du torseur de cohésion

Le principe fondamental de la statique ne traite que des efforts extérieurs à la poutre. Comment alors déterminer les efforts internes en G ? On utilise la méthode de la coupure : on coupe la poutre en deux parties I et II, suivant la section passant par G.

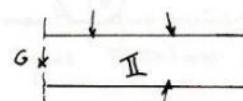
En isolant la partie I ou la partie II, le torseur de cohésion devient un effort extérieur et peut être déterminé par le PFD.

Isolons la partie I et appliquons le PFS



$$[\text{Actions ext} \rightarrow I]_G + [\text{Actions II} \rightarrow I]_G = [0]_G$$

Isolons la partie II et appliquons le PFS



$$[\text{Actions ext} \rightarrow II]_{G_2} + [\text{Actions I} \rightarrow II]_{G_2} = [0]_{G_2}$$

Pour déterminer le torseur de cohésion (efforts internes), on pourra utiliser :

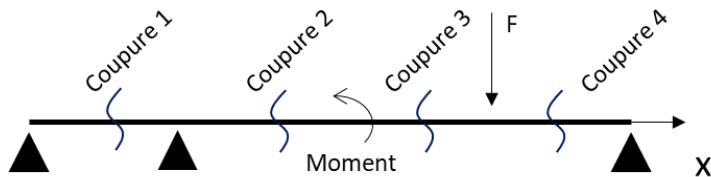
$$[\text{Actions II} \rightarrow I] = -[\text{Actions extérieures} \rightarrow I]$$

Ou

$$[\text{Actions II} \rightarrow I] = [\text{Actions extérieures} \rightarrow II]$$

### 5.3.3 Diagrammes des efforts et des moments

En partant de la gauche de la poutre, on coupe la poutre en deux parties dans une section d'abscisse  $x$  puis il suffit d'identifier les actions extérieures sur la partie de gauche ou de droite.



A chaque passage d'une liaison, d'un effort ou moment extérieur, une nouvelle coupure est nécessaire car le torseur de cohésion change d'expression.

Ci-dessous des exemples de diagrammes d'efforts et moments.

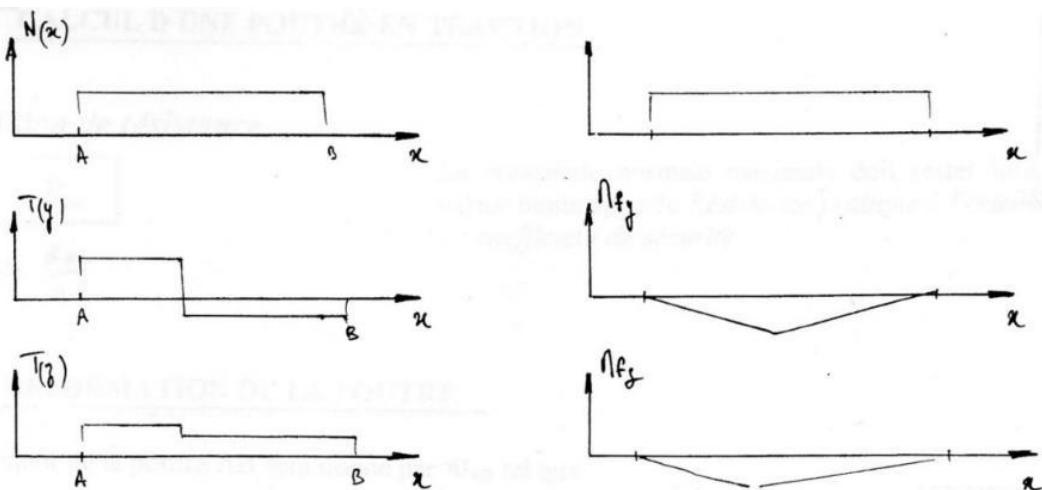


Figure 15. Diagrammes des efforts et des moments

#### 5.3.3.1 Correspondance entre les diagrammes

L'équilibre de toute section de la poutre nous donne :

$$\frac{dM_f}{dx} + T = 0$$

$$\frac{dM_t}{dx} = 0$$

### 5.3.3.2 Torseurs de cohésion usuels

$$G \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Traction  
ou  
compression pure

$$G \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

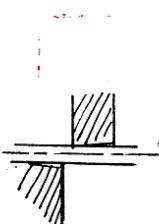
Cisaillement pur  
suivant  $y$ .  
 $T_y$  ou  $T_z$

$$G \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$$

Flexion pure  
suivant  $z$

$$G \begin{Bmatrix} 0 & M_f \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Torsion pure  
entre  $A$  et  $B$



$$G \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$$

Flexion simple  
suivant  $z$

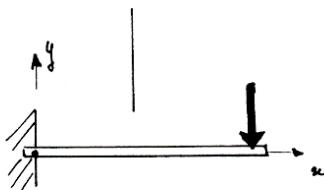


Figure 16. Torseurs de cohésion pour diverses sollicitations dans une section droite [5]

# 6 Caractéristiques géométriques des sections

On connaît maintenant les “efforts intérieurs” dans la structure (torseur de cohésion).

On va déterminer les contraintes induites par ces efforts.

Pour déterminer les contraintes dans la poutre, il nous faut d’abord déterminer les caractéristiques géométriques des sections. C’est l’objet de ce chapitre.

## 6.1 Centre de gravité

### 6.1.1 Pour un solide

Le centre de gravité  $G$  d’un solide est le barycentre des masses. Pour tout point  $O$  on a

$$m \cdot \overrightarrow{OG} = \int_{M \in \text{solide}} \overrightarrow{OM} \cdot dm$$

### 6.1.2 Cas d’une poutre

Soit un élément de poutre de section  $S$  et de longueur  $dx$ , alors

$$\begin{aligned} m &= \int_V dm = \int_V \rho dV \\ dm &= \rho dV = \rho \cdot dx \cdot dS \end{aligned}$$

Si la masse volumique est la même en tout point,  $\rho(M) = \rho$  et la définition de  $G$  pour le solide devient

$$\rho \cdot dx \cdot S \cdot \overrightarrow{OG} = \rho \cdot dx \cdot \iint_{M \in S} \overrightarrow{OM} \cdot dS$$

On obtient alors

$$S \cdot \overrightarrow{OG} = \iint_{M \in S} \overrightarrow{OM} \cdot dS$$

Le **centre de gravité** est alors le **centre géométrique** de la section  $S$  étudiée.

### 6.1.3 Pour un ensemble de points matériels ou de solides

$$m \cdot \overrightarrow{OG} = \sum m_i \cdot \overrightarrow{OG_i}$$

## 6.2 Moment statique

Le moment statique  $S_\Delta$  d'une section  $S$  par rapport à l'axe  $\Delta$  est défini par

$$S_\Delta = \iint_S \alpha \cdot dS$$

La distance  $r$  est la distance entre la surface  $dS$  et l'axe  $\Delta$ .

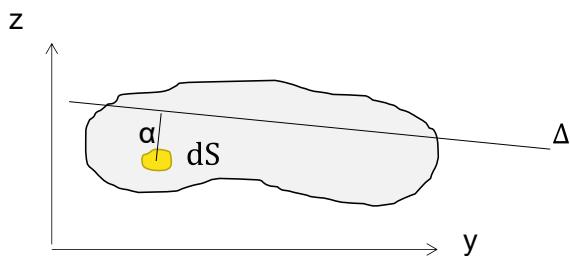


Figure 17

En particulier, les moments statiques par rapport aux axes  $(Oy)$  et  $(Oz)$  ont pour expression

$$S_{Oy} = \iint_{\Sigma} z \cdot dy dz$$

$$S_{Oz} = \iint_{\Sigma} y \cdot dy dz$$

### 6.2.1 Relation entre le moment statique et le centre de gravité

On voit que, lorsque la masse volumique de la section est uniforme :

$$S \cdot y_G = S_{Oz}$$

$$S \cdot z_G = S_{Oy}$$

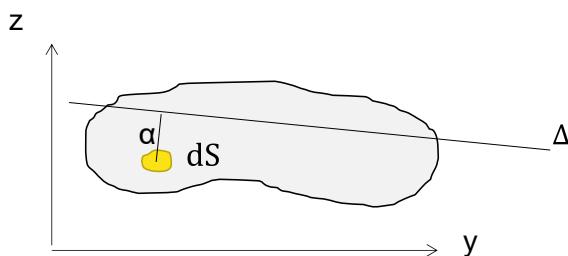
## 6.3 Moment quadratique

### 6.3.1 Définition

Par définition, le moment quadratique d'une section S par-rapport à l'axe  $\Delta$  est défini par :

$$I_{\Delta} = \iint_S a^2 \cdot dS$$

La distance  $a$  est la distance entre la surface  $dS$  et l'axe  $\Delta$ .



### 6.3.2 Moment quadratique pour un axe quelconque : théorème de Huyguens

Soit le solide ci-dessous de surface S et de centre de gravité G.

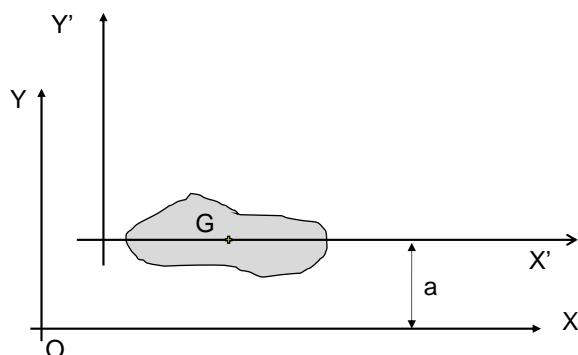


Figure 18. Moment quadratique pour un axe quelconque : théorème de Huyghens

L'axe  $X'$  passant par G est parallèle à l'axe  $X$  et situé à une distance  $a$ .

Par définition, le moment d'inertie de la section S par-rapport à l'axe GX et le moment d'inertie de la section S par-rapport à l'axe GX' ont pour expression

$$I_X = \iint_S y^2 dS$$

$$I_{GX'} = \iint_S y'^2 dS$$

Or, pour tout point M de la section S, la coordonnée y du point M dans le repère (X,Y) est

$$y = a + y'$$

$$I_X = \iint_S (a + y')^2 dS = \iint_S a^2 + 2ay' + y'^2 dS = \iint_S a^2 dS + \iint_S 2ay' dS + \iint_S y'^2 dS$$

L'intégrale  $\iint_S 2ay' dS$  est nulle car l'axe X' passe par le centre de gravité et par définition.

De plus

$$\iint_S a^2 dS = a^2 \cdot S$$

La dernier terme n'est autre que  $I_{GX}$ .

On peut finalement écrire le théorème de Huygens : « le moment d'inertie  $I_X$  par rapport à un axe quelconque X est égal au moment d'inertie  $I_{GX}$ , de cette surface par rapport l'axe X' parallèle au premier et mené par son centre de gravité, augmenté du produit de la surface S par le carré de la distance a entre ces deux axes. »

$$I_{OX} = I_{GX} + a^2 \cdot S$$

### 6.3.3 Calcul de moments quadratiques pour des sections usuelles

L'utilisation de l'intégrale peut mener à des calculs fastidieux.

Dans la pratique, on pourra presque toujours calculer le moment quadratique d'une section en la décomposant en surfaces élémentaires dont le moment quadratique est connu et en opérant par addition ou soustraction (Figure 19), et en utilisant le théorème de Huygens si nécessaire.

Citons à titre d'exemple le profil doublement symétrique ci-joint, que l'on a souvent occasion d'employer.

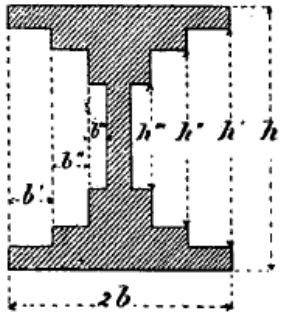


Fig. 28.

La surface est égale à celle du rectangle extérieur de dimensions  $2b$  et  $h$ , dont on retrancherait six rectangles partiels, symétriques deux à deux et ayant pour dimensions respectives  $h'$  et  $b'$ ,  $h''$  et  $b''$ ,  $h'''$  et  $b'''$ .

La valeur du moment d'inertie relatif à l'axe de symétrie horizontal s'obtiendra aisément en utilisant cette décomposition.

Il est égal à :

$$\frac{bh^3 - b'h'^3 - b''h''^3 - b'''h'''^3}{6}$$

Figure 19. Jean Résal - 1892 [6]

## 6.4 Moment quadratique polaire

Le moment quadratique polaire par-rapport au point O ci-dessous est donné par :

$$I_O = \iint_S r^2 dS$$

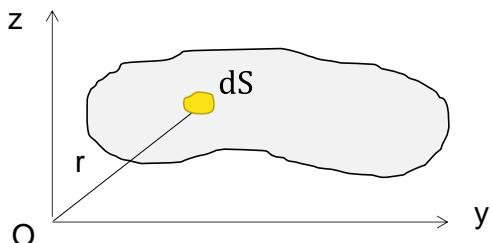


Figure 20

Remarque : en Figure 20 on a, par le théorème de Pythagore

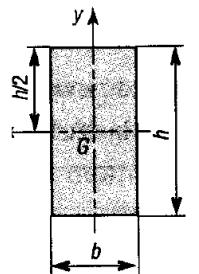
$$I_O = \iint_S r^2 dS = \iint_S y^2 + z^2 dS$$

Donc

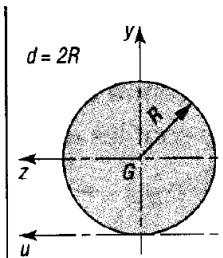
$$I_O = I_{Oz} + I_{Oy}$$

Avec  $I_{Oz}$  et  $I_{Oy}$  moments quadratique de la section S par-rapport à z et y.

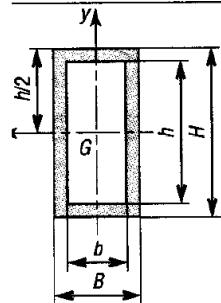
## 6.5 Moments quadratiques et moment quadratique polaire de sections usuelles



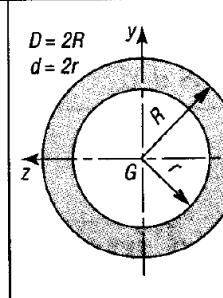
$$\begin{aligned} S &= b \cdot h \\ I_z &= \frac{b \cdot h^3}{12} \\ I_y &= \frac{h \cdot b^3}{12} \\ I_G &= \frac{b \cdot h}{12} (h^2 + b^2) = I_y + I_z \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} S &= \pi \cdot R^2 \\ I_y = I_z &= \frac{\pi \cdot R^4}{4} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \\ I_u &= \frac{5 \pi \cdot R^4}{4} = \frac{5 \pi \cdot d^4}{64} \\ I_G &= \frac{\pi \cdot R^4}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = I_y + I_z \end{aligned}$$

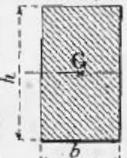
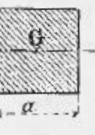
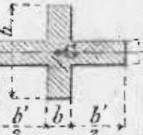
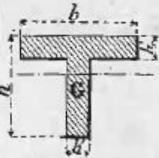
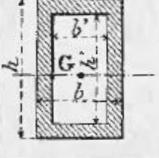
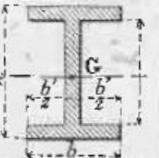
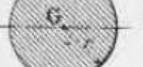


$$\begin{aligned} S &= BH - bh \\ I_y &= \frac{HB^3 - hb^3}{12} \\ I_z &= \frac{BH^3 - bh^3}{12} = I_y + I_w \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} S &= \pi (R^2 - r^2) \\ I_y = I_z &= \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) \\ &= \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) \\ I_G &= \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4) \\ &= \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = I_y + I_w \end{aligned}$$

Figure 21. Source : [7]

<b>Forme</b>	<i>Rectangulaire pleine</i>	<i>Carré</i>	<i>Cruciforme</i>	<i>Équerre</i>
<b>Surface</b>	$S = b \times h$	$S = a^2$	$S = h b + b' h'$	$S = b h' + b' (h - h')$
<b>Module</b>	$M_s = \frac{b \times h^3}{6}$	$M_s = \frac{a^3}{6}$	$M_s = \frac{b h^3 + b' h'^3}{6 h}$	"
<b>Croquis</b>				
<b>Forme</b>	<i>Simple té</i>	<i>Rectangulaire creuse</i>	<i>Double té</i>	<i>en U</i>
<b>Surface</b>	$S = b h - b' h'$	$S = b h - b' h'$	$S = b h - b' h'$	$S = b h - b' h'$
<b>Module</b>	$M_s = \frac{b h^3 - b' h'^3}{6 h}$	$M_s = \frac{b h^3 - b' h'^3}{6 h}$	$M_s = \frac{b h^3 - b' h'^3}{6 h}$	$M_s = \frac{b h^3 - b' h'^3}{6 h}$
<b>Croquis</b>				
<b>Forme</b>	<i>Circulaire pleine</i>	<i>Circulaire creuse</i>	<i>Elliptique pleine</i>	<i>Elliptique creuse</i>
<b>Surface</b>	$S = \pi r^2$	$S = \pi (r^2 - r'^2)$	$S = \pi a b$	$S = \pi (a b - a' b')$
<b>Module</b>	$M_s = \frac{\pi r^4}{4}$	$M_s = \frac{\pi (r^4 - r'^4)}{4}$	$M_s = \frac{\pi a^2 b}{4}$	$M_s = \frac{\pi (b a^2 - b' a'^2)}{4 a}$
<b>Croquis</b>				

[8]

## 7 Estimation des contraintes

### 7.1 Traction – Compression

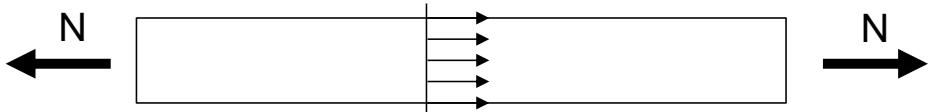


Figure 22. Traction. Profil des contraintes

En supposant un champ de contraintes uniforme sur la section, alors en tout point de S,

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{S}$$

#### 7.1.1 Charge excentrée : notion de noyau central

Soit une section de surface S soumise à un effort normal N.

L'effort N n'est pas appliqué au centre de la section (Figure 23), mais en un point A différent de G.

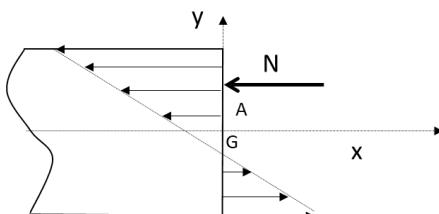


Figure 23. Allure des contraintes générées par un effort normal excentré appliquée en A

On voit que l'effort normal va induire un profil linéaire de contraintes tel que ci-dessous.

En effet, l'effort N appliqué en A est équivalent à un effort N appliquée en G + un moment fléchissant Mf en G. Le moment fléchissant Mf a pour expression :

$$\vec{M}_G(\vec{N}) = \vec{M}_A(\vec{N}) + \vec{GA} \wedge \vec{N} = \vec{GA} \wedge \vec{N} = AG \cdot N \cdot \vec{z}$$

$$M_{fz} = AG \cdot N$$

L'état de contraintes induit par l'effort N en A est donc identique à l'état de contraintes obtenu en appliquant N et Mf en G :

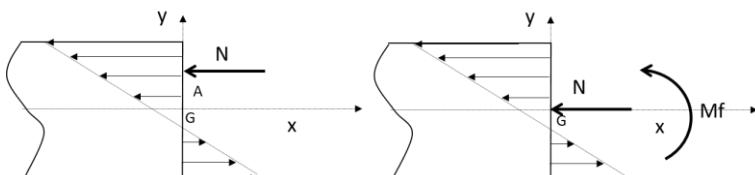


Figure 24. Allure des contraintes générées par un effort normal excentré appliqué en A. Les contraintes sont identiques à celles générées par un effort et un moment en G

On peut alors se poser la question :

Dans quelle zone de la section l'effort doit-il rester pour que les contraintes induites soient seulement de compression (si  $N < 0$ ) ou de traction (si  $N > 0$ ) ?

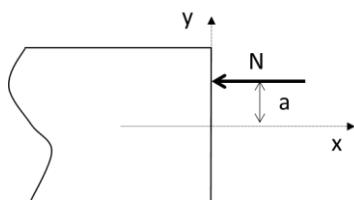
C'est une question pertinente par exemple pour un poteau fait d'un matériau montrant une faible résistance en traction (béton). On souhaiterait en effet que l'ensemble de la section reste en compression.

Le point d'application de la charge doit rester dans une partie de la section appelée **noyau central**.

Le noyau central est une partie de la section S. En tout point du noyau central, un effort normal appliqué en ce point induit des contraintes normales de signe constant sur l'ensemble de la section.

Exemple : calcul de noyau central pour une surface circulaire

Soit une surface circulaire de rayon R soumise à un effort N excentré à la distance a de l'axe neutre (centre géométrique de la section).



Les contraintes normales ont pour expression, en tout pointe d'ordonnée y

$$\sigma = \frac{N}{S} - \frac{M_f \cdot y}{I_z}$$

Avec

$$M_f = a \cdot N$$

La contrainte maximale doit rester nulle pour que l'ensemble de la section soit en compression donc la valeur de a qui définit la limite du noyau central vérifie :

$$\frac{N}{S} - \frac{a \cdot N \cdot y}{I_z} = 0$$

$$\frac{1}{\pi R^2} - \frac{a \cdot R}{\frac{\pi R^4}{4}} = 0$$

Donc

$$a = \frac{R}{4}$$

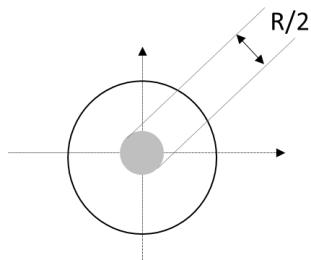


Figure 25. Noyau central d'une section circulaire

On montre ci-dessous des exemples de noyau central (surface grisée) pour diverses sections.

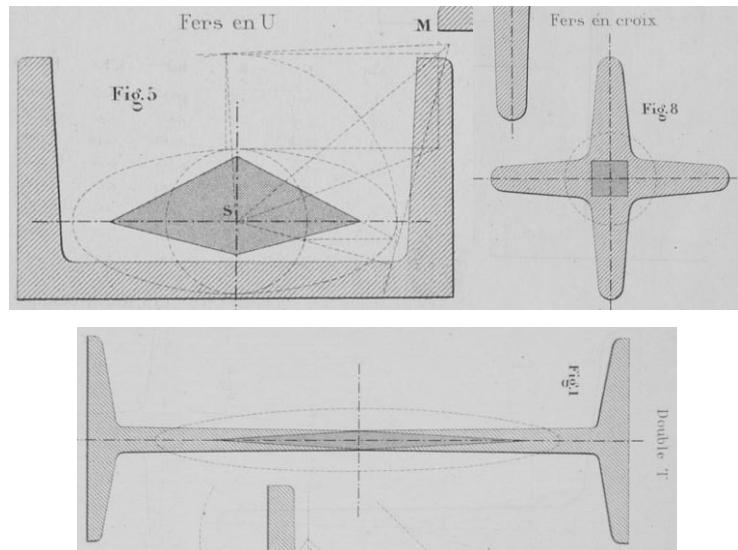


Figure 26. Ellipses centrales et noyaux de divers profils [9]

## 7.2 Cisaillement

### 7.2.1 Contrainte de cisaillement

#### 7.2.1.1 Formule simplifiée

Soit la section  $S$  soumise à l'effort tranchant  $T$  suivant l'axe  $y$ . En supposant un champ de contraintes uniforme sur la section (Figure 27), alors en tout point de  $S$ ,

$$\tau_{xy} = \frac{T}{S}$$

$$\tau_{xz} = 0$$

$\tau_{xy}$  est la contrainte de cisaillement dans la section  $S$ , suivant la direction  $y$ .

$\tau_{xz}$  est la contrainte de cisaillement dans la section S, suivant la direction z.

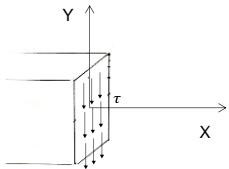


Figure 27. Hypothèse d'un champ de contrainte de cisaillement uniforme sur la section

Le champ de contraintes de cisaillement n'est pas réellement uniforme. On peut prendre cela en compte par la notion de section réduite :

$$\tau_{xy} = \frac{T}{S(1 + \eta)}$$

Section rectangulaire :  $\eta=-1/6$  ; Section circulaire :  $\eta=-1/10$

#### 7.2.1.2 Autre approche

En un point de la surface de la poutre, la contrainte de cisaillement doit être tangente au contour de la section. Soit la courbe BC de longueur  $L(y)$  et située à la distance y de l'axe neutre Gx (Figure 28). Supposons que la contrainte de cisaillement est normale à la courbe BC et de valeur constante.

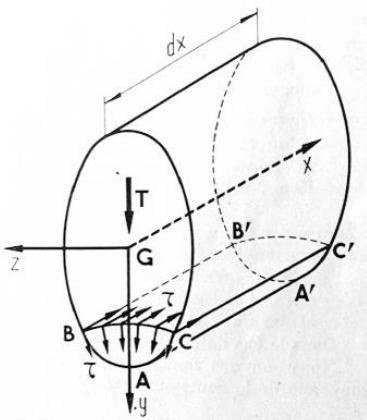


Figure 28. Cisaillement dans une section [10]

Dans la section ABC, l'effort normal est nul.

Dans la section A'B'C', on trouve des contraintes normales dues au moment fléchissant créé par l'effort tranchant T appliqué sur la section ABC. Ce moment noté  $dM$  a pour expression

$$dM = -T \cdot dx$$

Dans la section A'B'C', la résultante des contraintes normales donne :

$$\int_S \sigma dS = \int_S -\frac{T}{I_z} \cdot dx \cdot y \cdot dS = -\frac{T}{I_z} \cdot dx \cdot \int_S y dS = -\frac{T}{I_z} \cdot S_{Gz} \cdot dx$$

Avec  $S_{Gz}$  moment statique de la section ABC **par-rapport à l'axe Gz**.

Le signe – indique que quand  $T>0$ , la face  $A'B'C'$  est en compression et l'effort normal résultant est négatif.

Par ailleurs, l'équilibre de la section jaune ci-dessous implique qu'en tout point de la face  $BCC'B'$ , on trouve une contrainte tangentielle égale à  $\tau$  et parallèle à  $\vec{x}$ .

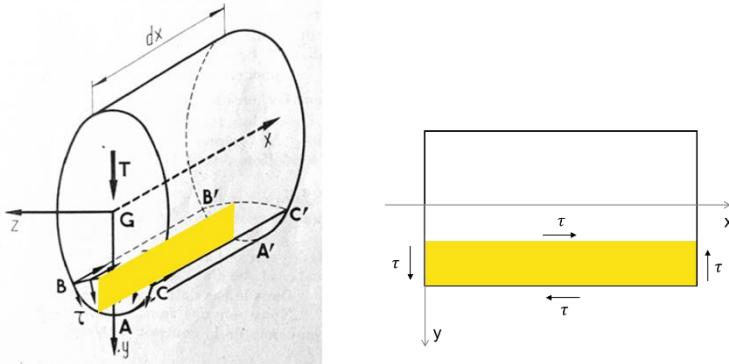


Figure 29

Finalement, le principe fondamental de la statique sur le prisme de section ABC et de longueur  $dx$ , projeté sur l'axe  $\vec{x}$ , énonce :

$$\tau \cdot dx \cdot L(y) - \frac{T}{I_z} \cdot S_{Gz} \cdot dx = 0$$

$$\tau = \frac{T \cdot S_{Gz}}{I_z \cdot L(y)}$$

Remarque :

Dans le cas où l'axe y est vers le haut, on prend le moment statique de la section située **au-dessus** du point considéré. Pour un exemple, voir

<https://metaletech.com/2021/02/01/calcul-des-contraintes-de-cisaillement-dans-une-section/>

## 7.2.2 Déformation angulaire

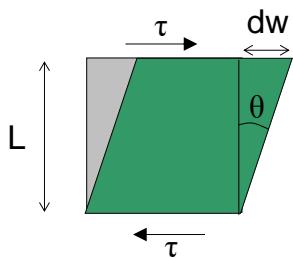


Figure 30. Déformation de cisaillement

Glissement

$$\gamma = \frac{dw}{L} = \tan \theta$$

(Faible déformation :  $\gamma \approx \theta$ )

Loi de comportement :

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$G$  : module de cisaillement

Pour un matériau isotrope :

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \vartheta)}$$

## 7.3 Torsion

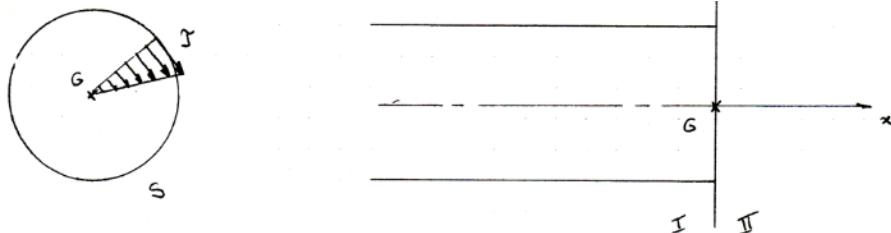


Figure 31. Torsion

Soit une section soumise à  $M_{tx}$  moment de torsion. Ce moment est porté par l'axe x de la poutre.

Contrainte de cisaillement :

$$\tau = \frac{M_{tx} \cdot r}{I_G}$$

Contrainte de cisaillement maximale au sein de la section :

$$\tau_{maxi} = \frac{M_{tx} \cdot r_{maxi}}{I_G}$$

$I_G$  : moment quadratique polaire ( $\text{mm}^4$ )

## 7.4 Flexion pure

### 7.4.1 Torseur de cohésion

Au centre de gravité de la section

$$\left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{matrix} \right\}_G$$

$M_{fz}$  est appelé moment fléchissant par rapport à l'axe  $G\vec{z}$ .

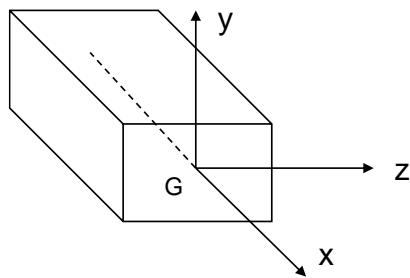


Figure 32

### 7.4.2 Constraintes de flexion pure

Par des considérations sur la cinématique de la poutre (voir chapitre loi de comportement en flexion) et en se plaçant en élasticité linéaire (loi de Hooke), on montre que la flexion pure fait apparaître un profil linéaire des contraintes, comme sur la figure ci-dessous.

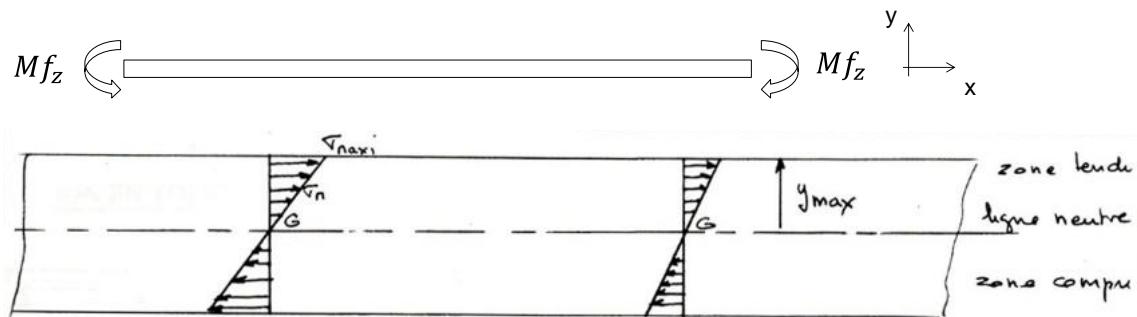


Figure 33. Répartition des contraintes en flexion pure

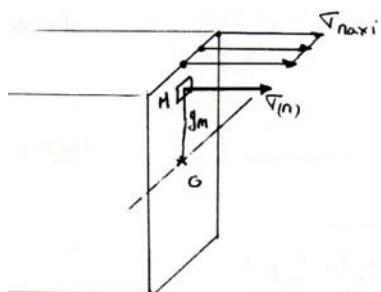


Figure 34. Flexion pure

### 7.4.3 Ligne neutre

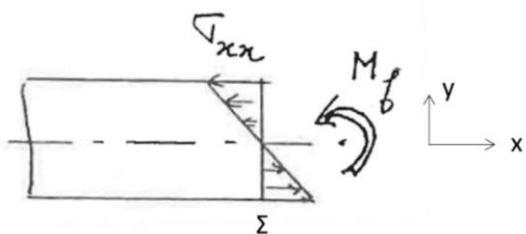
En un point de la section, les contraintes sont nulles (Figure 34). Le lieu des points de la poutre où les contraintes sont nulles est appelé ligne neutre.

On montre ci-dessous que la ligne neutre passe par le centre de gravité de la section [11]:

On a :  $N = \int n \cdot d\Omega = 0$ , c'est-à-dire avec  $n = \frac{Mv}{I}$  (formule 61) :  
 $\int v \cdot d\Omega = 0$ .

L'axe neutre se confond donc avec l'axe de flexion simple perpendiculaire à l'axe de symétrie; il passe par le centre de gravité de la section, et les moments statiques par rapport à cet axe neutre des deux parties comprimée et tendue de la surface, sont donc égaux.

#### 7.4.4 Constraintes de flexion



L'équilibre de la section  $\Sigma$  donne

$$M_{fz} = - \iint_{\Sigma} y \cdot \sigma_{xx} \cdot dS$$

Si on suppose une répartition linéaire des contraintes en fonction de  $y$  telle que

$$\sigma_{xx} = A \cdot y$$

On a alors

$$M_{fz} = -A \iint_{\Sigma} y^2 \cdot dS$$

$$A = -\frac{M_{fz}}{\iint_{\Sigma} y^2 \cdot dS} = -\frac{M_{fz}}{I_{Gz}}$$

$$\sigma_{xx}(M) = -\frac{M_{fz} \cdot y_{(M)}}{I_{Gz}}$$

$I_{Gz}$  : moment quadratique de la section par-rapport à l'axe Gz

### 7.5 Principe de superposition

Tant que le matériau reste dans son domaine élastique, et que les déformations restent petites devant les dimensions de la structure, les conséquences (déplacements, contraintes....) de l'action de plusieurs forces peuvent être considérées comme la somme des conséquences de ces actions.

Exemple : flexion simple = cisaillement + flexion pure

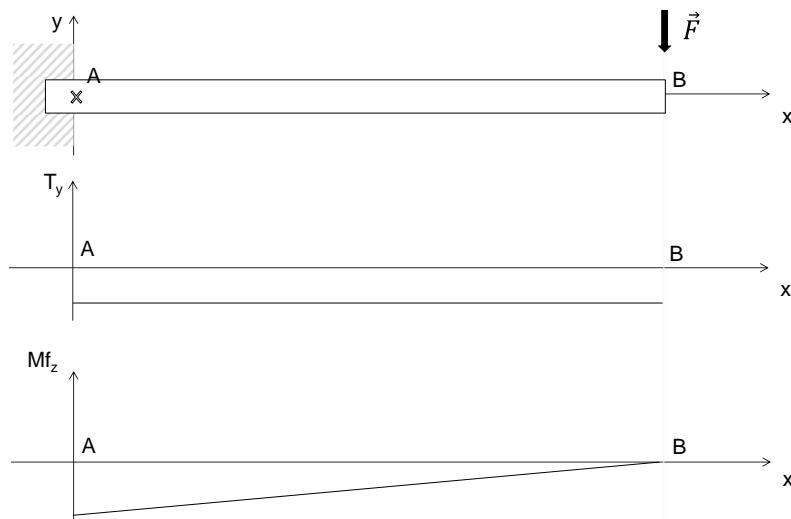


Figure 35. flexion simple = cisaillement + flexion pure

### 7.5.1 Exemple

Soit une section de surface  $S$ , moment d'inertie  $I_z$  suivant l'axe  $z$ , soumise à un moment fléchissant  $M_f$  et à un effort normal  $N$ .

L'effort normal  $N$  crée des contraintes normales de traction ( $>0$ ) ou de compression ( $<0$ ) d'expression

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

Le moment fléchissant crée des contraintes normales de traction et de compression (profil linéaire de la Figure 34) d'expression :

$$\sigma = -M_f \cdot \frac{y}{I_z}$$

Par superposition, la contrainte totale en un point d'ordonnée  $y$  de la section a pour expression

$$\sigma = \frac{N}{S} - M_f \cdot \frac{y}{I_z}$$

Le profil des contraintes est fournie ci-dessous.

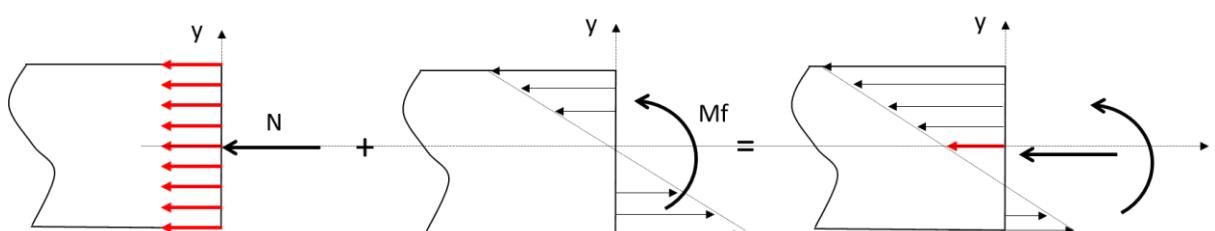


Figure 36. Exemple de profil des contraintes lors d'une superposition d'un effort normal et d'un moment fléchissant

## 7.6 Concentration de contraintes

Une pièce comportant un accident de forme (trou, changement de section,...) montrera une concentration de contraintes proche de cet accident, càd une augmentation locale de la contrainte.

Dans la pratique on définit un facteur de concentration de contraintes  $K_t$  tel que :

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nominale}}$$

$K_t$  peut être estimé expérimentalement ou par la simulation numérique. Dans de nombreux cas, des abaques issus de travaux expérimentaux fournissent des valeurs de  $K_t$  pour des géométries « standards ».

Remarque : ne pas confondre  $K_t$  avec le Facteur d'Intensité de Contraintes  $K$  en pointe d'une fissure (voir discipline appelée mécanique de la rupture)...

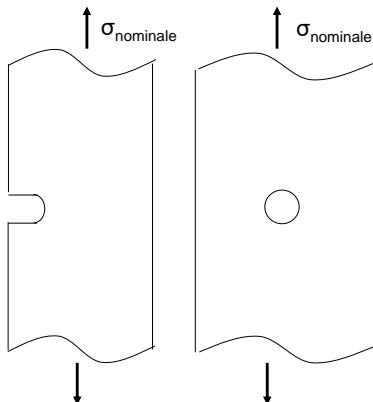


Figure 37. Concentration de contraintes autour d'une entaille (gauche) et d'un trou (droite)

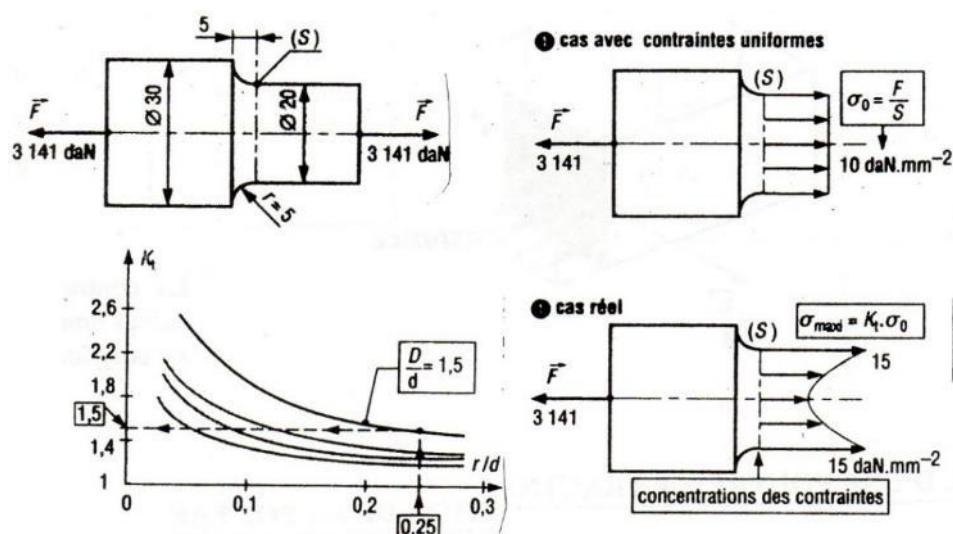


Figure 38. Concentrations de contraintes en traction [7]

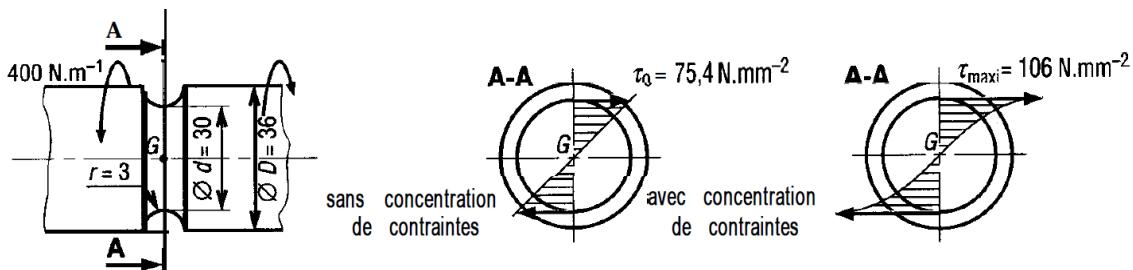


Figure 39. Concentrations de contraintes en torsion [7]

## 7.7 Critères de rupture / dimensionnement

### 7.7.1 Critères de limite élastique

#### 7.7.1.1 Critère de Rankine (ou de la plus grande contrainte principale)

La plus grande contrainte principale doit rester inférieure à la limite d'élasticité  $R_e$ .

$$\sigma_1 < R_e$$

#### 7.7.1.2 Critère de Von Mises

Soient  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  les contraintes principales. Soit la contrainte équivalente de Von Mises définie par :

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Enoncé du critère : en tout point du domaine  $\sigma_{eq}$  doit rester inférieure à la limite d'élasticité en traction pure  $R_e$  :

$$\sigma_{eq} < R_e$$

Détails

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_s + \bar{\sigma}_d$$

$$\text{Partie sphérique : } \bar{\sigma}_s = \sigma_s \cdot \bar{I} \text{ avec } \sigma_s = \frac{tr\bar{\sigma}}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

Densité volumique d'énergie de déformation

$$W = \frac{1}{2} \cdot \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_s \cdot \bar{I} + \bar{\sigma}_d) : \bar{\varepsilon}$$

On s'intéresse à la partie déviatrice de W

$$W_d = \frac{1}{2} \cdot \bar{\sigma}_d : \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot (\bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} - \bar{\sigma}_s : \bar{\varepsilon})$$

En introduisant la loi de comportement du solide élastique linéaire isotrope :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1 + \nu}{E} \cdot \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} \cdot tr\bar{\sigma} \cdot \bar{I}$$

On obtient

$$W_d = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{1}{3} \cdot ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2)$$

Ce critère suppose que le matériau reste dans le domaine élastique tant que la densité volumique de l'énergie déviatorique reste inférieure à la valeur  $W_{de}$  qu'elle prend à l'apparition de la plasticité lors d'un essai de traction pure

$$W_{de} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \sigma_e^2$$

Le critère de Von Mises s'écrit alors :

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot R_e$$

Autre écriture :

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

$$\sigma_{eq} \leq R_e$$

#### 7.7.1.3 Critère de Tresca (ou de la contrainte de cisaillement maximale)

La contrainte de cisaillement maximale ( $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ ) doit rester en tout point inférieure à la valeur  $\tau_e = R_e/2$  qu'elle prend lors d'un essai de traction pure :

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_{max} \leq \frac{R_e}{2}$$

#### 7.7.1.4 Synthèse

Le critère de Rankine est plutôt utilisé dans le cas des matériaux fragiles (verre, béton, fonte...).

Si, pour les matériaux ductiles, Von Mises est un peu plus précis que Tresca, de nombreuses vérifications expérimentales ont donné des résultats situés sur la frontière entre les deux critères. Tresca, plus simple et souvent utilisé, est plus conservatif : il laisse une marge de sécurité légèrement plus grande. Cependant, beaucoup de logiciels de simulation numérique proposent seulement Von Mises donc ce critère est le plus répandu.

#### 7.7.2 Critère sur la flèche maximale

On apporte souvent un critère de flèche maximale aux éléments sollicités en flexion (par exemple la flèche maxi ne doit pas dépasser 1/500<sup>ème</sup> de la portée de la poutre).

# 8 Loi de comportement d'une poutre en flexion

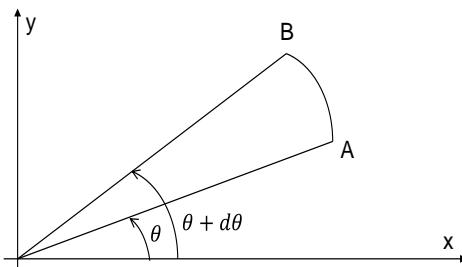
## 8.1 Déformée d'une poutre en flexion

### 8.1.1 Notions préliminaires : où l'on retourne à la source

Soit un point de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  situé en A.

Quand l'angle  $\theta$  varie de  $d\theta$ , le point se déplace de la distance  $ds$ . Que vaut  $ds$  ?

Soit A le point de départ et B le point d'arrivée du déplacement du point.



En assimilant l'arc  $ds$  à un segment de droite,

$$ds = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$ds = \sqrt{(r \cdot \cos(\theta + d\theta) - r \cdot \cos \theta)^2 + (r \cdot \sin(\theta + d\theta) - r \cdot \sin \theta)^2}$$

$$ds = \sqrt{\left(r \cdot \frac{\cos(\theta + d\theta) - \cos \theta}{d\theta} \cdot d\theta\right)^2 + \left(r \cdot \frac{\sin(\theta + d\theta) - \sin \theta}{d\theta} \cdot d\theta\right)^2}$$

$$ds = \sqrt{(r \cdot (-\sin \theta) \cdot d\theta)^2 + (r \cdot (\cos \theta) \cdot d\theta)^2}$$

$$ds = r \cdot d\theta$$

Soit maintenant la fonction  $y(x)$ .

La longueur  $ds$  de la Figure 40 a pour expression  $ds = \rho(x) \cdot d\alpha$  avec  $\rho(x)$  rayon de courbure de la courbe en x. De plus,

$$\tan \alpha = y'(x)$$

$$\alpha = \arctan y'(x)$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = y''(x) \cdot \frac{1}{1 + y'(x)^2}$$

$$d\alpha = \frac{y''(x)}{1 + y'(x)^2} \cdot dx$$

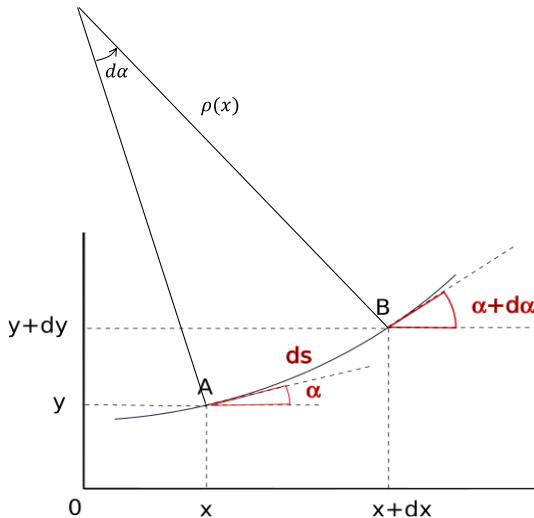


Figure 40. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Courbure\\_d%27un\\_arc#Formulaire](https://fr.wikipedia.org/wiki/Courbure_d%27un_arc#Formulaire)

De plus,

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{y'(x)^2 \cdot dx^2 + dx^2} = dx \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2} \\ dx \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2} &= \rho(x) \cdot d\alpha = \rho(x) \cdot \frac{y''(x)}{1 + y'(x)^2} \cdot dx \\ \sqrt{1 + y'(x)^2} &= \rho(x) \cdot \frac{y''(x)}{1 + y'(x)^2} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\rho(x) = \frac{(1 + y'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}{y''(x)}$$

Si  $y'(x)$  est très petit devant 1 (pente de la courbe faible), alors

$$y''(x) = \frac{1}{\rho(x)}$$

### 8.1.2 Déformée d'une poutre en flexion

Soit une poutre d'axe  $\vec{x}$  sollicitée par une force  $\vec{F}$  créant un moment de flexion  $M_{fz}(x)$  suivant l'axe z. Soit un élément de poutre, d'abscisse x et de longueur x (Figure 41).

Dans cet élément de poutre on considère la fibre AB située à la distance  $y(x)$  de la fibre neutre. Dans la configuration non déformée, AB a la même longueur que la fibre neutre donc  $AB=dx$ .

La déformation  $\varepsilon_{xx}(x)$  de la fibre AB est donnée par

$$\varepsilon_{xx}(x) = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{(\rho(x) - y(x)) \cdot d\theta(x) - dx}{dx}$$

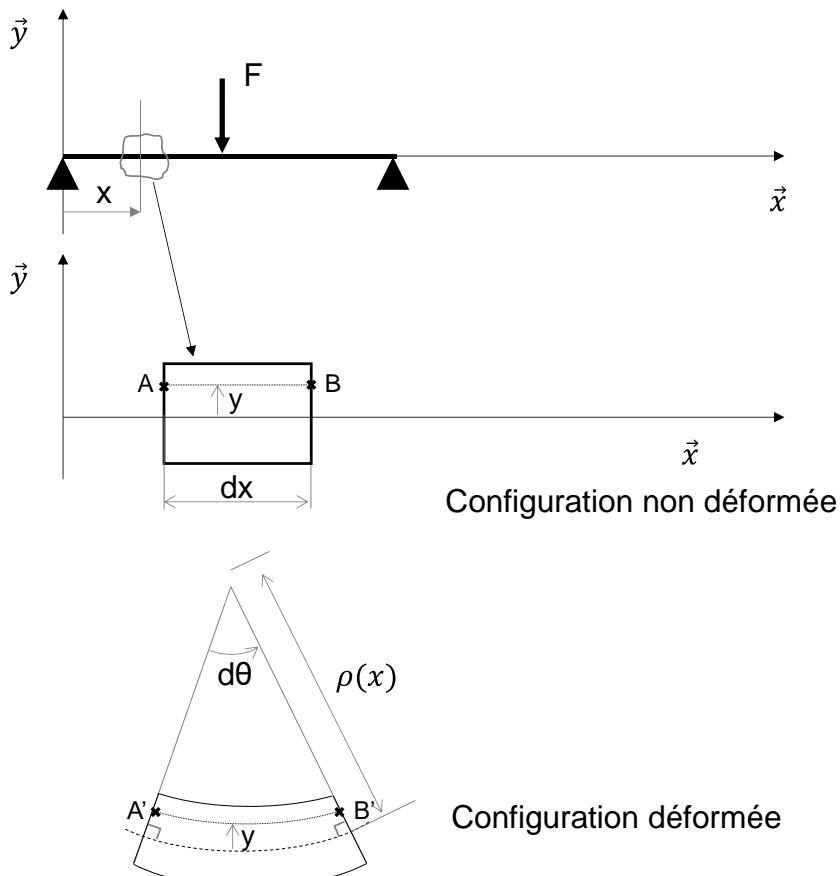


Figure 41. Loi de comportement d'une poutre en flexion

Or par définition la fibre neutre ne subit pas de déformation donc  $dx = \rho(x) \cdot d\theta(x)$  et

$$\varepsilon_{xx}(x) = \frac{(\rho(x) - y(x)) \cdot d\theta(x) - \rho(x) \cdot d\theta(x)}{\rho(x) \cdot d\theta(x)} = -\frac{y(x)}{\rho(x)}$$

La loi de Hooke en traction uniaxiale indique :

$$\sigma_{xx}(x) = E \cdot \varepsilon_{xx}(x)$$

Donc

$$\sigma_{xx}(x) = -E \cdot \frac{y(x)}{\rho(x)}$$

Par ailleurs l'équilibre de la section nous indique que

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_{fz} \cdot y}{I_z}$$

Donc

$$E \cdot \frac{y(x)}{\rho(x)} = \frac{M_{fz} \cdot y}{I_z}$$

Donc

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M_{fz}}{E \cdot I_z}$$

Or, on a vu que

$$y''(x) = \frac{1}{\rho(x)}$$

Donc

$$y''(x) = \frac{M_{fz}}{E \cdot I_z}$$

Finalement

$$M_{fz}(x) = E \cdot I_z \cdot y''(x)$$

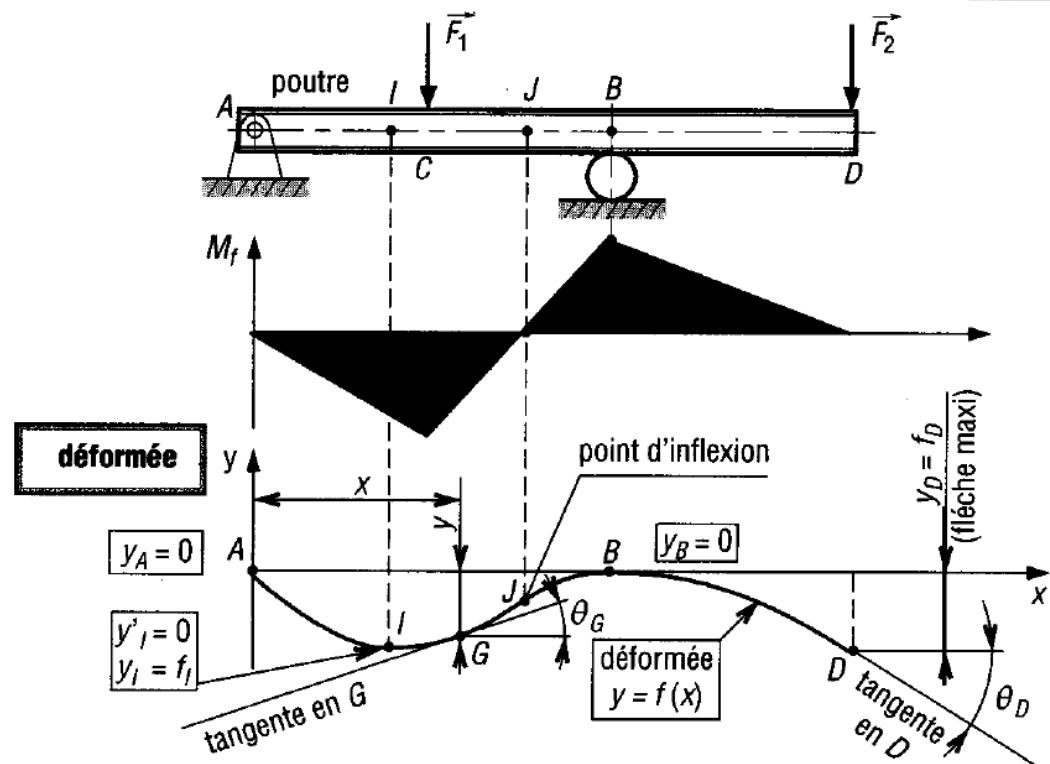


Figure 42. Déformée d'une poutre [7]

# 9 Systèmes hyperstatiques

## 9.1 Résolution d'un problème hyperstatique

Dans un système hyperstatique, les équations issues du PFS ne suffisent pas pour calculer les efforts et moments appliqués.

Pour résoudre un problème hyperstatique, il convient donc de déterminer des équations supplémentaires. Ces équations seront apportées par l'étude des déplacements et des rotations de la structure.

Un point de départ courant est le principe de superposition. Il permet de ramener le problème hyperstatique à une somme de problèmes isostatiques qui chacun peuvent se résoudre avec le PFS.

### 9.1.1 Exemple 1

Soit une poutre sur 3 appuis (A : pivot, C : ponctuelle, B : ponctuelle), soumise à une charge répartie de densité linéique  $q$ .

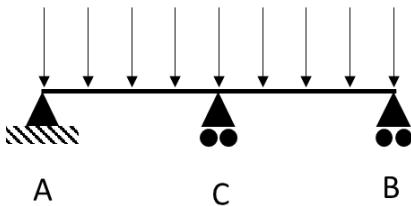
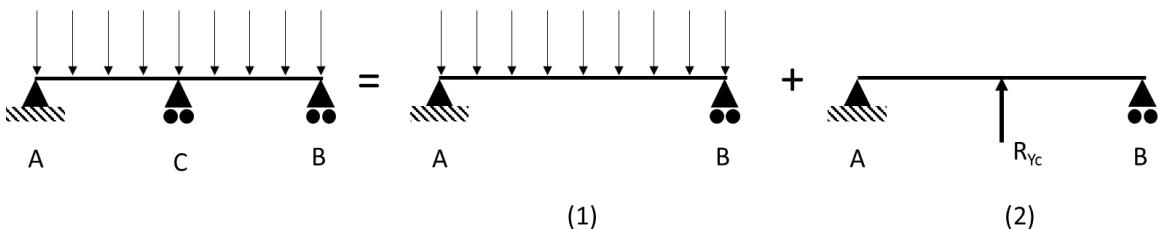


Figure 43. Poutre sur 3 appuis et charge répartie

Ce système est hyperstatique d'ordre 1.

Par superposition on peut écrire :



Soient

$y_{1c}$  : flèche de la poutre dans le cas 1

$y_{2c}$  : flèche de la poutre dans le cas 2

$y_c$  sur le cas réel (cas hyperstatique). On sait que  $y_c = 0$ .

Or par superposition,

$$y_c = y_{1c} + y_{2c} = -\frac{5 \cdot q \cdot L^4}{384 \cdot E \cdot I_z} + \frac{R_{Yc} \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I_z}$$

Donc on obtient une équation supplémentaire, liée à une hypothèse sur la déformation de la poutre.

Après résolution,

$$R_c = \frac{5 \cdot q \cdot L}{8}$$

Et par le principe fondamental de la statique :

$$A + B + C = qL$$

En remarquant que la réaction en A est égale à la réaction en B par symétrie, alors

$$R_{YA} = R_{YB} = \frac{3 \cdot q \cdot L}{16}$$

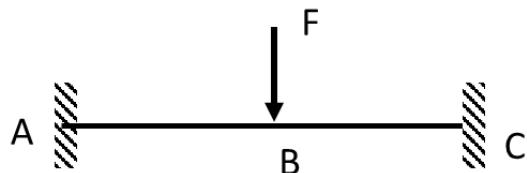
### 9.1.2 Exemple 2

A l'aide des conditions aux limites sur les appuis, on peut obtenir des équations supplémentaires.

Soit une poutre en flexion, alors la déformée est donnée par

$$M_{fz} = E \cdot I_z \cdot y''$$

Soit une poutre de longueur L, module d'Young E, moment quadratique Iz, encastrée à chaque extrémité.



Les inconnues sont au nombre de 6 :  $X_A Y_A M_A X_C Y_C M_C$

Par symétrie,  $Y_A = Y_C = F/2$  et  $M_A = M_C$ .

Le système est hyperstatique d'ordre 1.

Le moment fléchissant entre A et B est donné par (méthode de la coupure) :

$$M_{fz} = -M_A + F \cdot \frac{x}{2}$$

$$E \cdot I_z \cdot y'' = -M_A + F \cdot \frac{x}{2}$$

$$E \cdot I_z \cdot y' = -M_A \cdot x + \frac{F}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + K_1$$

Conditions aux limites :  $y'(0) = 0$  donc  $K_1 = 0$ .

Or par symétrie, on a aussi  $y'\left(\frac{L}{2}\right) = 0$  donc

$$-M_A \cdot \frac{L}{2} + \frac{F}{4} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = 0$$

Donc

$$M_A = \frac{F \cdot L}{8}$$

## 9.2 Méthode des déplacements

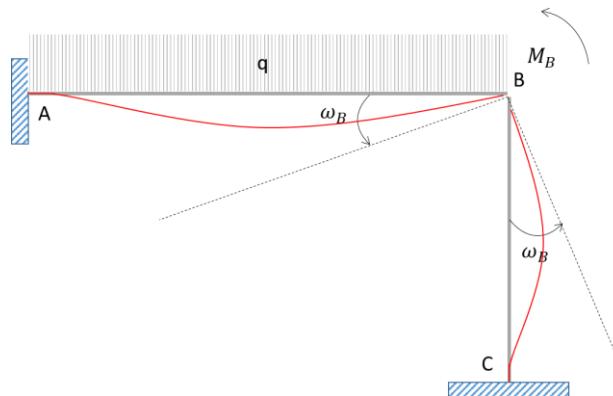
Les inconnues sont les déplacements au niveau des nœuds. Les efforts sont donc déduits une fois les déplacements déterminés.

Lorsque le degré d'hyperstatique augmente, la méthode des déplacements se montre pertinente car elle fournit rapidement un nombre d'équations important. Sa mise en œuvre est cependant plus délicate.

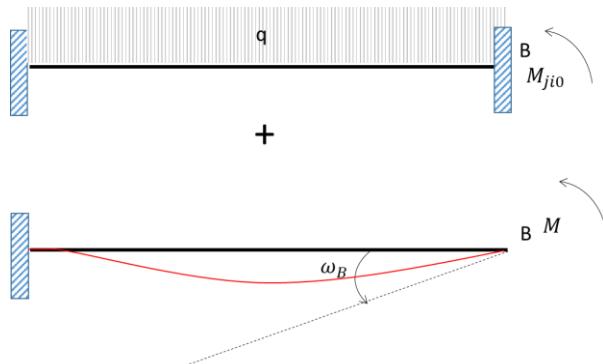
### 9.2.1 Mise en évidence

Soit la structure hyperstatique ci-dessous soumise à une charge linéique  $q$ .

On suppose que le point B ne se déplace pas (longueurs de poutres invariantes), mais on considère sa rotation. Par continuité de l'encastrement, elle est identique côté barre AB et barre BC.



On peut considérer l'état de la barre AB comme la superposition de deux états :



$M_{ji0}$  est le moment en B dû aux actions extérieures (ici la charge linéique).

$M$  est le moment qui crée la rotation en B observée sur la structure réelle. C'est l'originalité de la méthode des déplacements : les efforts/moment sont la conséquence des déplacements/rotations qu'on a imposés à la structure.

Soit  $M_{B\_AB}$  le moment en B au bout de la barre AB sur la structure réelle, alors par superposition

$$M_{B\_AB} = M_{ji0} + M$$

Calcul des moments  $M_{ji0}$  et  $M$

- Moment  $M_{ji0}$

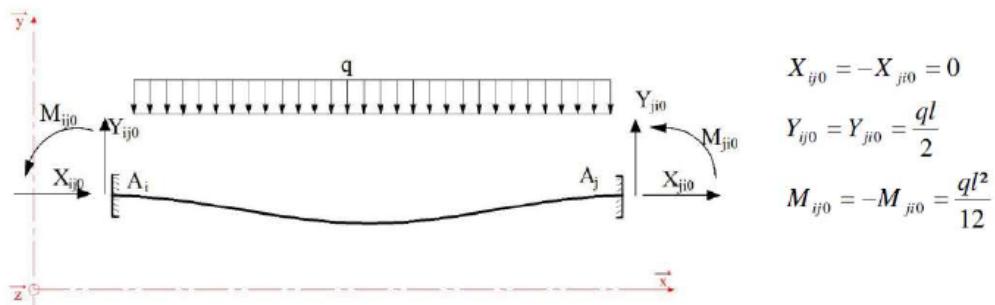


Figure 44. Charge uniformément répartie

Encastrement :  $\omega_{Ai} = 0$  donc par superposition et avec le formulaire Figure 45 on a

$$\frac{M_{ji0}L}{3EI} - \frac{M_{ji0}L}{6EI} - \frac{q \cdot L^3}{24EI} = 0$$

Géométrie et chargement	$\Omega_A$	$\Omega_B$	flèche en $x=L/2$
	$-\frac{M_A L}{3EI}$	$\frac{M_A L}{6EI}$	$-\frac{M_A L^2}{16EI}$
	$-\frac{M_B L}{6EI}$	$\frac{M_B L}{3EI}$	$-\frac{M_B L^2}{16EI}$
	$-\frac{qL^3}{24EI}$	$\frac{qL^3}{24EI}$	$-\frac{5qL^4}{384EI}$

14

Figure 45. Formulaires 3 moments

Avec  $M_{ji0} = -M_{ji0}$  on obtient

$$\frac{M_{ji0}L}{3EI} + \frac{M_{ji0}L}{6EI} - \frac{q \cdot L^3}{24EI} = 0$$

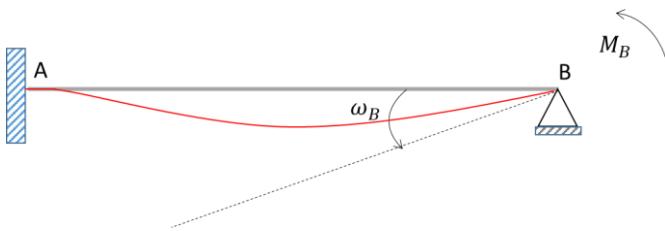
$$\frac{M_{ij0}}{3} + \frac{M_{ij0}}{6} = \frac{q \cdot L^2}{24}$$

$$\frac{2M_{ij0}}{3} + \frac{M_{ij0}}{3} = \frac{q \cdot L^2}{12}$$

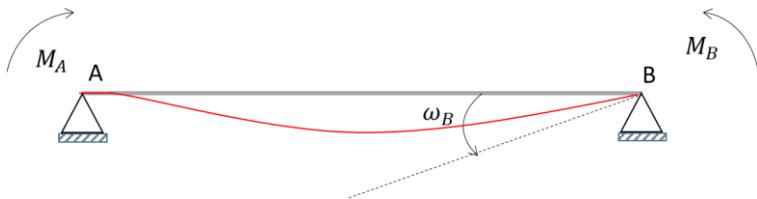
$$M_{ij0} = -\frac{q \cdot L^2}{12} = -M_{ji0}$$

- Moment M

Soit la poutre ci-dessous :



On représente cette poutre par :



Pour déterminer les inconnues de liaison on va considérer la rotation en A :

$$\omega_A = -\frac{M_A L}{3EI} - \frac{ML}{6EI}$$

(voir tableau Figure 45).

Or du fait de l'encastrement,

$$\omega_A = 0$$

Donc

$$M_A = -\frac{M}{2}$$

Somme des moments en A :

$$-M_A + M + Y_B \cdot L = 0$$

Donc

$$Y_B = -\frac{3M}{2L}$$

Moment fléchissant dans la section d'abscisse x :

$$M_f = EIy'' = M + Y_B \cdot (L - x) = M - \frac{3M}{2L}(L - x)$$

La rotation  $\omega(x)$  est obtenue par intégration de  $y''$ .

$$EIy'(x) = EI\omega(x) = Mx - \frac{3M}{2L} \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) + K$$

La rotation en A est nul donc  $K=0$ .

Au point B :

$$\omega_B = \omega(L) = \frac{1}{EI} \cdot \left( ML - \frac{3M}{2L} \cdot \left( L^2 - \frac{L^2}{2} \right) \right) = \frac{ML}{4EI}$$

On a donc

$$M = \frac{4EI}{L} \omega_B$$

Finalement on a :

$$M_{B\_AB} = M + M_{ij0} = \frac{4EI}{L} \omega_B + \frac{q \cdot L^2}{12}$$

En opérant le **même raisonnement sur la barre BC** de hauteur H on obtient :

$$M_{B\_BC} = \frac{4EI}{H} \omega_B$$

Or par l'équilibre du noeud B :

$$-M_{B\_AB} - M_{B\_BC} = 0$$

Donc

$$\frac{4EI}{L} \omega_B - \frac{q \cdot L^2}{12} = -\frac{4EI}{H} \omega_B$$

On peut en déduire  $\omega_B$ .

Connaissant  $\omega_B$  on peut maintenant calculer le moment  $M_B$  en B.

## 9.2.2 Généralisation

Pour l'ensemble des déplacements et rotations en A et B et pour l'ensemble des réactions ( $X_A, Y_A, M_A, X_B, Y_B, M_B$ ), on obtient la relation ci-dessous :

$$Q = k \cdot d + P$$

Avec  $k$  : matrice de rigidité de la poutre

$$k = \begin{pmatrix} \frac{EA_1}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA_1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_1}{L^3} & \frac{6EI_1}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_1}{L^3} & \frac{6EI_1}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_1}{L^2} & \frac{4EI_1}{L} & 0 & -\frac{6EI_1}{L^2} & \frac{2EI_1}{L} \\ -\frac{EA_1}{L} & 0 & 0 & \frac{EA_1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_1}{L^3} & -\frac{6EI_1}{L^2} & 0 & \frac{12EI_1}{L^3} & -\frac{6EI_1}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_1}{L^2} & \frac{2EI_1}{L} & 0 & -\frac{6EI_1}{L^2} & \frac{4EI_1}{L} \end{pmatrix}$$

$d$  : déplacements et rotations aux extrémités de la poutre

$$d = \begin{pmatrix} Ux_{ij} \\ Uy_{ij} \\ w_{ij} \\ Ux_{ji} \\ Uy_{ji} \\ w_{ji} \end{pmatrix}$$

$Q$  : efforts de liaison

$$Q = \begin{pmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ M_{ij} \\ X_{ji} \\ Y_{ji} \\ M_{ji} \end{pmatrix}$$

$P$  : efforts extérieurs appliqués

$$P = \begin{pmatrix} X_{ijo} \\ Y_{ijo} \\ M_{ijo} \\ X_{jio} \\ Y_{jio} \\ M_{jio} \end{pmatrix}$$

Finalement on déterminera les réactions de liaisons avec le système suivant :

$$\begin{pmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ M_{ij} \\ X_{ji} \\ Y_{ji} \\ M_{ji} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & \frac{EA}{L^2} & \frac{L}{L} & 0 & -\frac{EA}{L^2} & \frac{L}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ux_{ij} \\ Uy_{ij} \\ w_{ij} \\ Ux_{ji} \\ Uy_{ji} \\ w_{ji} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{ijo} \\ Y_{ijo} \\ M_{ijo} \\ X_{jio} \\ Y_{jio} \\ M_{jio} \end{pmatrix}$$

A : section de la poutre ; E : module d'élasticité de la poutre ; I : moment quadratique ; L : longueur de la poutre

### 9.2.3 Termes de la Matrice de raideur

Quelques termes sont démontrés ci-dessous

Terme  $k_{11} (\frac{EA}{L})$

Soit une poutre de longueur L, section A, module E, soumise à un effort X, montrant l'allongement u. Loi de Hooke :

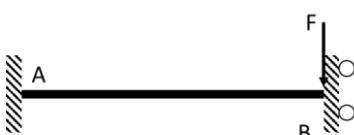
$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{X}{A} = E \cdot \frac{u}{L}$$

$$X = E \cdot \frac{A}{L} \cdot u$$

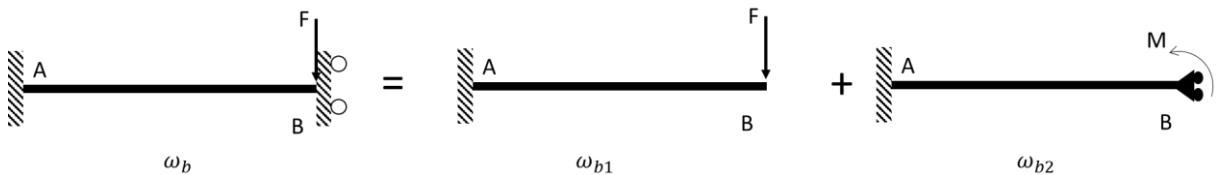
Terme  $k_{22} (\frac{12EI}{L^3})$

Soit la poutre ci-dessous.

Elle est encastrée en A. En B, elle subit un moment d'encastrement et une réaction en X. Elle est libre en y au point B. Cette poutre est soumise à une force F, en B, suivant -y.



Par superposition on peut écrire :



Or  $\omega_b = 0$  du fait de l'encastrement donc

$$\omega_{b1} + \omega_{b2} = 0$$

Calculons ces deux rotations.

- Calcul de  $\omega_{b1}$

Pour une poutre console soumise à une force  $F$  au bout la flèche  $y(x)$  a pour expression :

$$y(x) = \frac{F}{6EI} \cdot x^2 \cdot (3L - x)$$

Donc

$$y'(x) = \frac{F}{6EI} \cdot 2x \cdot (3L - x) - \frac{F}{6EI} \cdot x^2$$

Donc

$$y'(L) = \frac{FL^2}{2EI}$$

- Calcul de  $\omega_{b2}$

Moment fléchissant :

$$M_f = M$$

Donc

$$y''(x) = \frac{M}{EI}$$

Donc

$$y'(x) = \frac{M}{EI}x + Cste$$

La rotation en A est nulle donc  $Cste=0$  donc

$$y'(L) = \frac{M}{EI}L$$

On reprend :

$$\omega_{b1} + \omega_{b2} = 0$$

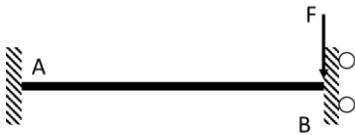
On a alors

$$\frac{FL^2}{2EI} + \frac{ML}{EI} = 0$$

Donc

$$M = \frac{FL}{2}$$

On peut maintenant écrire le moment fléchissant dans la structure ci-dessous :



$$M_f = -F(L-x) + M = -F(L-x) + \frac{FL}{2} = F\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

Par intégration on obtient :

$$y(x) = -\frac{F}{EI} \cdot \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 L}{4} \right)$$

Ainsi

$$y(L) = \frac{FL^3}{12EI}$$

On peut écrire cette relation comme ci-dessous :

$$F = \frac{12EI}{L^3} y(L)$$

On retrouve le terme  $\frac{12EI}{L^3}$  de la matrice de rigidité.

## 9.2.4 Termes du vecteur P

### 9.2.4.1 Charge linéique

Voir section « Mise en évidence ».

### 9.2.4.2 Charge ponctuelle appliquée dans la section à mi-travée

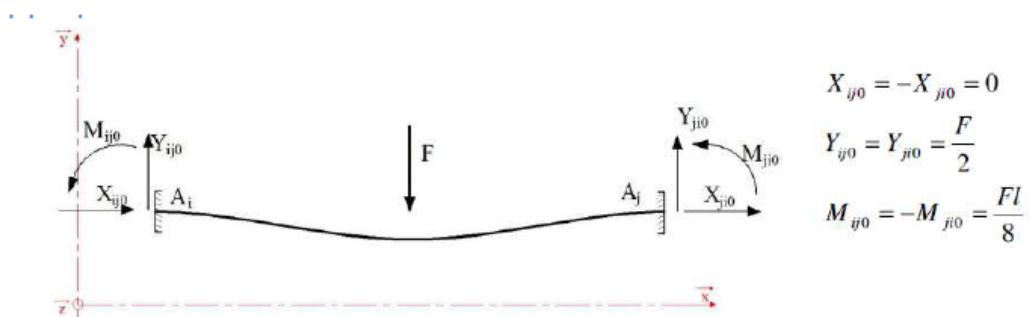


Figure 46. Charge ponctuelle appliquée dans la section à mi-travée

Absence de rotation en  $A_i$  :

$$-\frac{-M_{ij_0}L}{3EI} - \frac{-M_{ij_0}L}{6EI} - \frac{F \cdot L^2}{16EI} = 0$$

Donc

$$M_{ij_0} = \frac{FL}{8}$$

Géométrie et chargement	$\Omega_A$	$\Omega_B$	flèche en $x=L/2$
	$-\frac{M_A L}{3EI}$	$\frac{M_A L}{6EI}$	$-\frac{M_A L^2}{16EI}$
	$-\frac{M_B L}{6EI}$	$\frac{M_B L}{3EI}$	$-\frac{M_B L^2}{16EI}$
	$-\frac{PL^2}{16EI}$	$\frac{PL^2}{16EI}$	$-\frac{PL^3}{48EI}$

Figure 47. Formulaires 3 moments

### 9.2.5 Démarche

#### 1/ Définir les degrés de liberté de la structure

- Si un point est encastré, pas de ddl en ce point.
- Avec l'hypothèse des longueurs de poutres invariantes, certains déplacements sont nuls.

#### 2/ Pour chaque barre :

Ecrire la loi de comportement de la barre ci-dessous en calculant  $P$  et le vecteur  $u$  en fonction du problème.

$$\begin{pmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ M_{ij} \\ X_{ji} \\ Y_{ji} \\ M_{ji} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ux_{ij} \\ Uy_{ij} \\ w_{ij} \\ Ux_{ji} \\ Uy_{ji} \\ w_{ji} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{ijo} \\ Y_{ijo} \\ M_{ijo} \\ X_{jio} \\ Y_{jio} \\ M_{jio} \end{pmatrix}$$

#### 3/ Ecrire l'équilibre des noeuds pour calculer les ddl (déplacements, rotations)

4/ Reprendre la loi de comportement de chaque poutre, avec les ddl connus, pour calculer les inconnues de liaison

5/ Le système hyperstatique est résolu (inconnues de liaison toutes déterminées). On peut passer aux efforts internes et aux contraintes, flèches, flambement.....

# 10 Poutres continues

## 10.1 Théorème des trois moments

Les poutres continues sont des poutres reposant sur plus de deux appuis. Elles sont donc hyperstatiques.

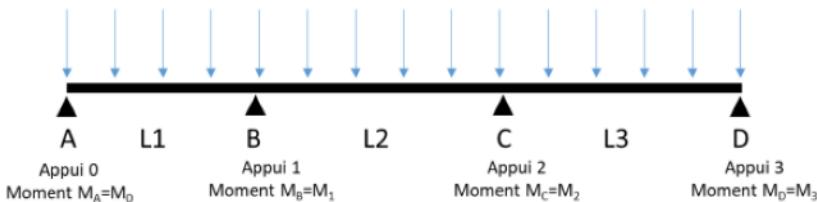
Une méthode courante pour la résolution des poutres continues est le théorème des trois moments :

$$M_{i-1} \cdot \frac{L_i}{6EI_i} + 2M_i \left( \frac{L_i}{6EI_i} + \frac{L_{i+1}}{6EI_{i+1}} \right) + M_{i+1} \cdot \frac{L_{i+1}}{6EI_{i+1}} = \Omega_{i,d}^0 - \Omega_{i,g}^0$$

Le théorème des trois moments fournit les moments fléchissant au droit de chaque appui.

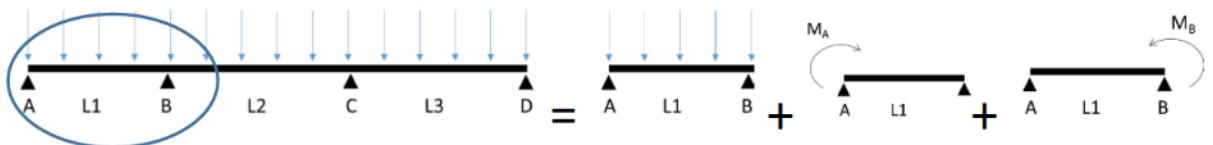
### 10.1.1 Démonstration

Soit la poutre continue ci-dessous.



Ce problème est hyperstatique, il ne peut être résolu avec seulement le principe fondamental de la statique. Des équations supplémentaires sont nécessaires. Ces équations supplémentaires seront apportées par l'étude des rotations en B et C et permettront de calculer les moments  $M_B$  et  $M_C$  dans la poutre aux appuis B et C.

Appliquons le principe de superposition pour décomposer la travée  $L_1$  en plusieurs cas isostatiques :



La travée  $L_1$  est ainsi « remplacée » par un moment  $M_B$  appliqué sur l'appui B.

On a placé un moment  $M_A$  en A pour démontrer la formule (dans le cas d'un appui,  $M_A=0$ ).

Soient les rotations :

Cas				
Rotation	$\omega_{B-L1}$	$\Omega_g^0$	$\omega_{B*}$	$\omega_{B**}$

Par superposition

$$\omega_{B-L1} = \Omega_g^0 + \omega_{B*} + \omega_{B**}$$

L'avantage de cette méthode est que  $\Omega_g^0$ ,  $\omega_{B*}$  et  $\omega_{B**}$  sont bien connus et accessibles dans des formulaires :

Géométrie et chargement	$\Omega_A$	$\Omega_s$	flèche en $x=L/2$
	$-\frac{M_A L}{3EI}$	$\frac{M_A L}{6EI}$	$-\frac{M_A L^2}{16EI}$
	$-\frac{M_B L}{6EI}$	$\frac{M_B L}{3EI}$	$-\frac{M_B L^2}{16EI}$
	$-\frac{Pab(L+b)}{6EIL}$	$\frac{Pab(L+a)}{6EIL}$	
	$-\frac{PL^2}{16 EI}$	$\frac{PL^2}{16 EI}$	$-\frac{PL^3}{48EI}$
	$-\frac{qL^3}{24 EI}$	$\frac{qL^3}{24 EI}$	$-\frac{5qL^4}{384EI}$
	$-\frac{qa^2(2L-a)^2}{24EIL}$	$\frac{qa^2(2L^2-a^2)}{24EIL}$	

Ainsi

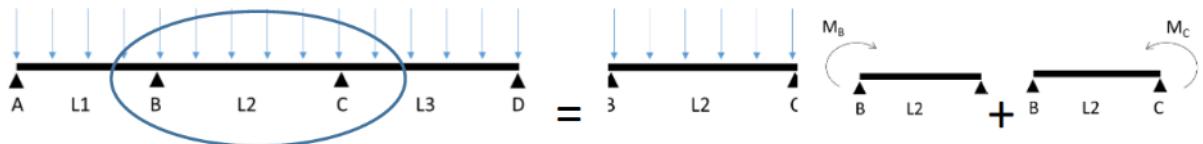
$$\omega_{B*} = \frac{M_A L_1}{6EI_1}$$

$$\omega_{B**} = \frac{M_B L_1}{3EI_1}$$

Finalement,

$$\omega_{B-L1} = \Omega_g^0 + \frac{M_A L_1}{6EI_1} + \frac{M_B L_1}{3EI_1}$$

Appliquons maintenant le même raisonnement pour la travée L<sub>2</sub>:

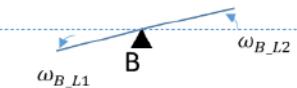


Les travées  $L_1$  et  $L_3$  sont « remplacées » par les moments  $M_B$  et  $M_C$ .

$$\omega_{B_{L_2}} = \Omega_d^0 - \frac{M_B L_2}{3EI_2} - \frac{M_C L_2}{6EI_2}$$

Or en B la rotation côté  $L_1$  et la rotation côté  $L_2$  sont les mêmes pour assurer la continuité géométrique de la poutre :

$$\omega_{B_{L_1}} = \omega_{B_{L_2}}$$



Donc

$$\Omega_g^0 + \frac{M_A L_1}{6EI_1} + \frac{M_B L_1}{3EI_1} = \Omega_d^0 - \frac{M_B L_2}{3EI_2} - \frac{M_C L_2}{6EI_2}$$

Soit encore

$$\frac{M_A L_1}{6EI_1} + \frac{M_B L_1}{3EI_1} + \frac{M_B L_2}{3EI_2} + \frac{M_C L_2}{6EI_2} = \Omega_d^0 - \Omega_g^0$$

$$M_A \frac{L_1}{6EI_1} + 2M_B \left( \frac{L_1}{6EI_1} + \frac{L_2}{6EI_2} \right) + M_C \frac{L_2}{6EI_2} = \Omega_d^0 - \Omega_g^0$$

On retrouve, appliquée à l'appui 1 (appui B) la formule :

$$M_{i-1} \frac{L_i}{6EI_i} + 2M_i \left( \frac{L_i}{6EI_i} + \frac{L_{i+1}}{6EI_{i+1}} \right) + M_{i+1} \frac{L_{i+1}}{6EI_{i+1}} = \Omega_{i,d}^0 - \Omega_{i,g}^0$$

### 10.1.2 Correction complète de la travée étudiée

En poursuivant l'exemple,  $M_A=0$ . Puis on peut écrire la formule des 3 moments en C pour obtenir une nouvelle équation avec  $M_B$  et  $M_C$  et créer un système de 2 équations à 2 inconnues,  $M_B$  et  $M_C$ .

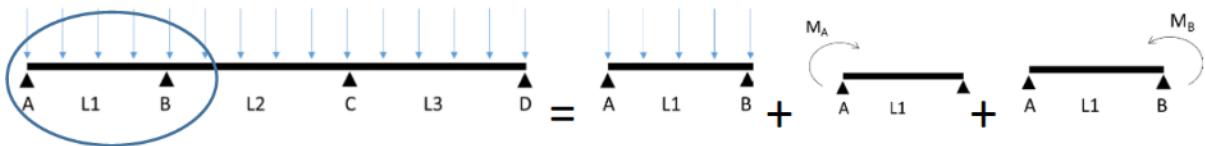
## 10.2 Moment fléchissant

Soit la formule donnant le moment fléchissant dans la travée i :

$$M(x) = M_0(x) + M_{i-1} \cdot \left( 1 - \frac{x}{L_i} \right) + M_i \cdot \left( \frac{x}{L_i} \right)$$

### 10.2.1 Démonstration

Reprendons la travée  $L_1$  de l'exemple précédent.



Le moment fléchissant dans la travée  $L_1$  est par superposition la somme des moments fléchissant dans chaque cas de la figure ci-dessus.

Pour chaque cas, le moment fléchissant est donné ci-dessous

Cas	Moment fléchissant
	$M(x)$
	$M_0(x)$
	<p>PFS :</p> $Y_A + Y_B = 0$ $-M_A + Y_B \cdot L_1 = 0$ <p>Donc</p> $Y_B = \frac{M_A}{L_1}$ <p>Donc le moment fléchissant en <math>x</math> a pour expression :</p> $Y_B \cdot (L_1 - x) = M_A \cdot \left(1 - \frac{x}{L_1}\right)$
	<p>PFS :</p> $Y_B = -\frac{M_B}{L}$ <p>Donc le moment fléchissant en <math>x</math> a pour expression :</p> $M_B + Y_B \cdot (L_1 - x) = M_B \cdot \frac{x}{L_1}$

Par principe de superposition on obtient,

$$M(x) = M_0(x) + M_A \cdot \left(1 - \frac{x}{L_1}\right) + M_B \cdot \frac{x}{L_1}$$

On retrouve la formule à démontrer appliquée à la travée  $L_1$ .

## 10.3 Effort tranchant

Soit la formule de l'effort tranchant dans la travée  $i$  :

$$V(x) = V_0(x) + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_i}$$

### Démonstration

On sait que

$$V(x) = -\frac{dM(x)}{dx}$$

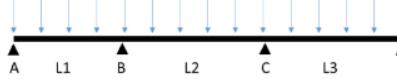
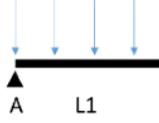
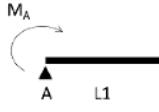
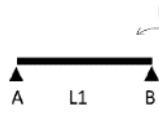
Donc par dérivation de la formule

$$M(x) = M_0(x) + M_{i-1} \cdot \left(1 - \frac{x}{L_i}\right) + M_i \cdot \frac{x}{L_i}$$

On a bien

$$V(x) = V_0(x) + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_i}$$

Remarque : on retrouve aussi l'effort tranchant par superposition. Ainsi sur l'exemple de la fiche :

Cas	$V(x)$
	$V(x)$
	$V_0(x)$
	$V(x) = Y_B = \frac{M_A}{L_1}$
	$V(x) = Y_B = -\frac{M_B}{L_1}$

Donc

$$V(x) = V_0(x) + \frac{M_A}{L_1} - \frac{M_B}{L_1} = V_0(x) + \frac{M_A - M_B}{L_1}$$

## 10.4 Formulaire

Géométrie et chargement	$\Omega_A$	$\Omega_B$	flèche en $x=L/2$
	$-\frac{M_A L}{3EI}$	$\frac{M_A L}{6EI}$	$-\frac{M_A L^2}{16EI}$
	$-\frac{M_B L}{6EI}$	$\frac{M_B L}{3EI}$	$-\frac{M_B L^2}{16EI}$
	$-\frac{Pab(L+b)}{6EIL}$	$\frac{Pab(L+a)}{6EIL}$	
	$-\frac{PL^2}{16 EI}$	$\frac{PL^2}{16 EI}$	$-\frac{PL^3}{48EI}$
	$-\frac{qL^3}{24 EI}$	$\frac{qL^3}{24 EI}$	$-\frac{5qL^4}{384EI}$
	$-\frac{qa^2(2L-a)^2}{24EIL}$	$\frac{qa^2(2L^2-a^2)}{24EIL}$	

## 10.5 Poutres continues par statique graphique

Les poutres continues furent également traitées à une époque par statique graphique [12].

La méthode graphique n'apporte dans ce cas pas de simplification par-rapport au théorème des trois moments et on ne développera pas ce point dans ce document.

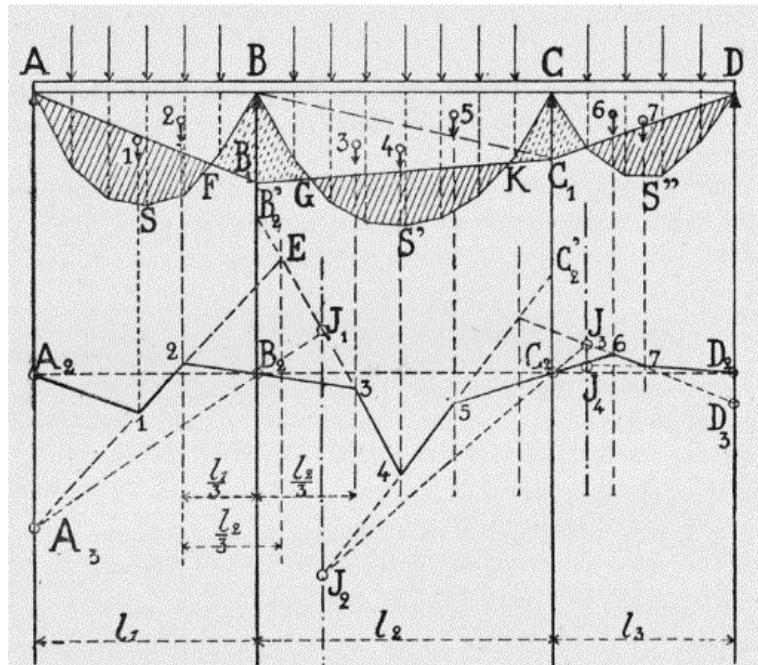


Figure 48. Poutre continue, moment fléchissant. Source BNF. [12, p. 422]

# 11 Méthodes énergétiques

## 11.1 Energie de déformation

### 11.1.1 Travail d'une force

Soit une force  $\vec{F}$  appliquée à un système. Pour un déplacement fini s'effectuant entre deux positions  $M_1$  et  $M_2$ , le travail  $W$  de la force  $\vec{F}$  a pour expression

$$W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}$$

Si la force  $\vec{F}$  est constante lors du déplacement, on peut écrire

$$W = \vec{F} \cdot \int_{M_1}^{M_2} . \overrightarrow{dr}$$

Si le déplacement  $u = M_2 - M_1$  s'effectue dans la même direction que la force  $\vec{F}$ , alors on a simplement

$$W = F \cdot u$$

$W$  représente bien l'aire sous la courbe  $F.u$ .

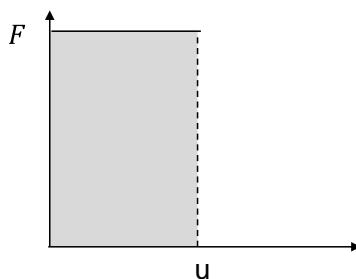


Figure 49. Travail d'une force constante

### 11.1.2 Travail d'une force appliquée progressivement

Le travail fourni n'a pas la même expression si la force est appliquée **progressivement**.

Considérons par exemple une force  $F$  et le déplacement  $u$  induit par cette force. Pour  $F=0$ , le déplacement est nul. Lorsque la force  $F$  augmente, le déplacement augmente. Finalement, lorsque  $F$  atteint  $F_{max}$ , le déplacement final obtenu est  $u$  (Figure 50).

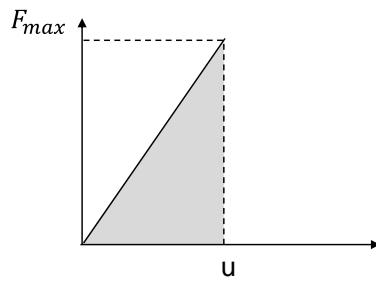


Figure 50. Travail d'une force appliquée progressivement

On peut écrire :

$$F(x) = F_{max} \cdot \frac{x}{u}$$

Par définition le travail élémentaire de cette force pour un déplacement  $dx$  a pour expression :

$$dW = F(x)dx = F_{max} \cdot \frac{x}{u} \cdot dx$$

Le travail total appliqué a donc pour expression :

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{L_f} F_{max} \cdot \frac{x}{u} \cdot dx = \frac{F_{max}}{u} \cdot [x]_0^u = \frac{F_{max}}{u} \cdot \frac{u^2}{2} \\ W &= \frac{1}{2} \cdot F_{max} \cdot u \end{aligned}$$

On retrouve bien l'aire sous la courbe  $F-u$ .

### 11.1.3 Energie de déformation d'une poutre (énergie potentielle élastique)

#### 11.1.3.1 Energie de déformation en traction

On postule que l'énergie de déformation est le travail des forces extérieures appliquées au solide.

Un petit élément de section  $dS$ , longueur  $dl$ , soumis à une contrainte  $\sigma$  subit le travail :

$$dW = \frac{1}{2} \cdot \sigma dS dx$$

$\sigma dS$  est l'effort  $F$  subi et  $dx$  est le déplacement induit par  $F$ .

Or

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{dx}{dl}$$

Donc

$$dx = \frac{\sigma}{E} \cdot dl = \frac{F}{ES} dl$$

Par conséquent l'énergie de déformation du petit élément de section  $dS$ , longueur  $dl$  a pour expression :

$$dW = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{S} \cdot dS \cdot \frac{F}{ES} dl$$

On intègre sur toute la section  $S$  :

$$dW_{section} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F^2}{ES} dl$$

Sur l'ensemble de la poutre :

$$W = \int_{poutre} dW_{section} = \frac{1}{2} \int_{poutre} \frac{F^2}{ES} dl$$

Autre démarche : partant de l'énergie de déformation par unité de volume

L'énergie de déformation *par unité de volume* a pour expression

$$dW_{volumique} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$$

Donc en traction

$$dW = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{ES^2}$$

Sur un élément de volume  $S \cdot dl$  on obtient :

$$dW = \frac{1}{2} \cdot \frac{F^2}{ES^2} \cdot S dl = \frac{1}{2} \cdot \frac{F^2}{ES} dl$$

Sur toute la poutre, l'énergie de déformation a pour expression

$$W = \frac{1}{2} \int_{poutre} \frac{F^2}{ES} dx$$

### 11.1.3.2 Energie de déformation en flexion

Un petit élément de section  $dS$ , longueur  $dl$ , subit la contrainte  $\sigma$  et donc l'effort  $\sigma \cdot dS$

$$dW = \frac{1}{2} \cdot \sigma dS \cdot dx$$

Or loi de Hooke :

$$dx = \frac{\sigma}{E} \cdot dl$$

Donc

$$dW = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{E} \cdot dl \cdot dS$$

Or

$$\sigma = M_f \cdot \frac{y}{I_z}$$

Donc

$$dW = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_f^2 \cdot y^2}{E \cdot I_z^2} dl \cdot dS$$

Sur toute la section  $dS=dydz$

$$dW_{section} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_f^2}{E \cdot I_z^2} \cdot \int_S y^2 dy dz \cdot dl$$

Or

$$I_z = \int_S y^2 dy dz$$

Donc

$$dW_{section} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_f^2}{E \cdot I_z} dl$$

Sur toute la longueur de la poutre :

$$W = \int_{longueur} dW_{section} = \frac{1}{2} \cdot \int_{longueur} \frac{M_f^2}{E \cdot I_z} dl$$

#### 11.1.3.3 Cas général

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_{longueur} \frac{M_f^2}{E \cdot I_z} + \frac{F^2}{ES} + \frac{V^2}{GS_r} dl$$

$\frac{V^2}{GS_r}$  : terme dû à l'effort tranchant

Remarque importante : on néglige généralement pour les poutres en flexion les termes dus à l'effort normal et l'effort tranchant, devant le terme du au moment fléchissant.

## 11.2 Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti

### 11.2.1 Enoncé

Soit un corps élastique soumis successivement à deux systèmes de forces S et S' chacun assurant l'équilibre. Le travail effectué par le système S sous l'effet des déplacements produits par le système S' est égal au travail effectué par le système S' sous l'effet des déplacements produits par S.

### 11.2.2 Démonstration

On considère le corps élastique au repos.

On applique tout d'abord le système de forces S. Le travail effectué par les forces F du système S est  $W_S$ . On applique ensuite le système de forces S'. Le travail effectué par les forces F' du système S' est  $W_{S'}$ . Or les points d'applications des forces F vont se déplacer sous l'action des forces F', donc les forces F vont appliquer un travail.

Soit  $u'$  le déplacement du point d'application de la force F pendant l'application des forces F', le travail de la force F est alors  $F.u'$ . Le travail total des forces F lors de l'application des forces F' sera  $\sum F.u'$ .

Le travail total appliqué au solide, lors de l'application du système S puis du système S' est donc :

$$W_S + W_{S'} + \sum F.u'$$

En appliquant d'abord le système de forces S' puis le système de forces S, le travail total appliqué au système est :

$$W_{S'} + W_S + \sum F'.u$$

A l'état élastique, le travail des forces ne dépend que de l'état initial et de l'état final donc les travaux appliqués sont identiques donc :

$$\sum F.u' = \sum F'.u$$

### 11.2.3 Exemple

Soit la poutre AB ci-dessous.

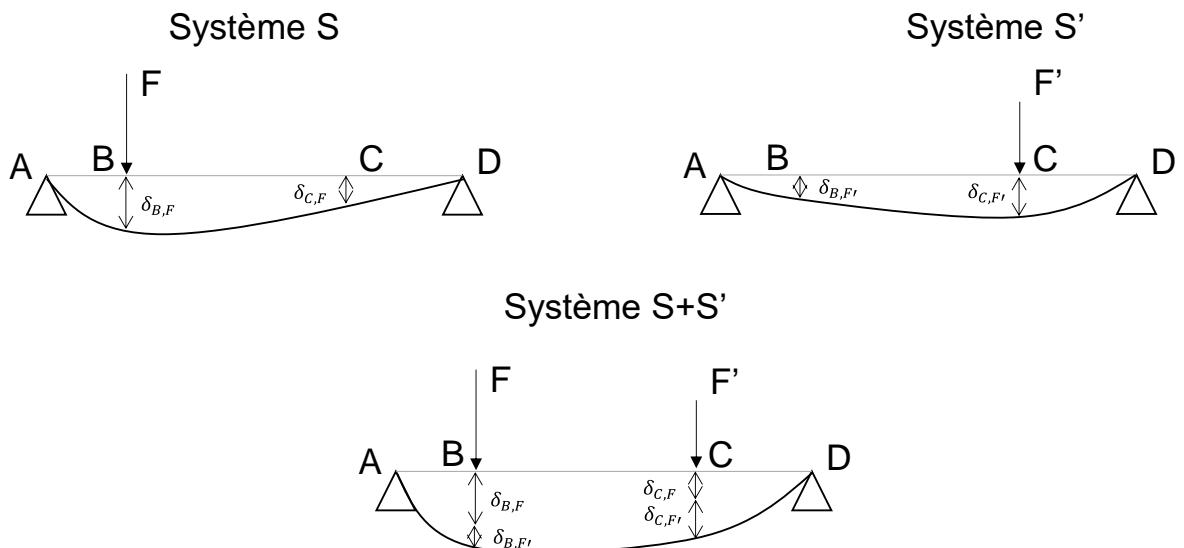


Figure 51. Illustration du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti

Si on applique d'abord la force  $F$  en  $B$  puis la force  $F'$  en  $C$ , le travail total est :

$$\frac{1}{2} \cdot F \cdot \delta_{B,F} + \frac{1}{2} \cdot F' \cdot \delta_{C,F'} + F \cdot \delta_{B,F'}$$

Si on applique d'abord la force  $F'$  en  $C$  puis la force  $F$  en  $B$ , le travail total est :

$$\frac{1}{2} \cdot F' \cdot \delta_{C,F'} + \frac{1}{2} \cdot F \cdot \delta_{B,F} + F' \cdot \delta_{C,F}$$

L'égalité des deux travaux donne :

$$F \cdot \delta_{B,F'} = F' \cdot \delta_{C,F}$$

#### 11.2.4 Notion de ligne d'influence

Si l'on reprend la poutre de la Figure 51 et que l'on applique une force de 1N en  $B$ , alors la flèche en  $C$  due à la force unitaire en  $B$  est égale à la flèche en  $B$  due à une force unitaire en  $C$  :

$$\delta_{B,F'=1N} = \delta_{C,F=1N}$$

On voit alors que la déformée de la poutre sous l'action d'une force unitaire en  $B$  donne en chaque point la flèche que l'on obtiendrait en  $B$  sous l'action d'une force unitaire appliquée en ce point.

Cette déformée est appelée ligne d'influence de la flèche en  $B$ .

## 11.3 Théorème de Castigliano

### 11.3.1 Enoncé

La dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à une force appliquée est égale au déplacement (en valeur algébrique) du point d'application de celle-ci, projetée sur la ligne d'action.

$$\frac{\partial W}{\partial F_i} = u_i$$

### 11.3.2 Démonstration

a) **Les dérivées du travail de déformation.** — Considérons un ouvrage élastique (fig. 263) soumis à des charges  $P$ . Nous supposerons que la loi de superposition des effets des forces est applicable.

Sous l'action des charges, l'ouvrage subit des déformations élastiques ; les charges  $P$  effectuent un *travail de déformation A*, tel que :

$$A = F(P_1, P_2, P_3 \dots, P_n).$$

(1) A. CASTIGLIANO : *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Turin, 1879. Voir aussi la nouvelle édition « *Selecta* » a cura de G. COLONETTI, Turin, 1935, qui contient notamment la thèse de doctorat de Castiglano (1873) ; celle-ci doit être considérée comme les prémisses de la *Théorie de l'équilibre*.

## DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES

241

Si l'une des charges extérieures  $P$ , par exemple  $P_n$ , s'accroît de la petite quantité  $dP_n$ , le travail de déformation devient :

$$A + \frac{\delta A}{\delta P_n} \cdot dP_n.$$

Comme on a supposé que la loi de superposition était applicable, la valeur du travail de déformation est indépendante de l'ordre dans lequel les charges  $P$  sont appliquées à l'ouvrage. Supposons que le petit accroissement  $dP_n$  de charge agisse d'abord seul, les déformations correspondantes sont également petites et le travail de déformation produit peut être négligé comme produit d'infiniment petits. Si l'on fait intervenir les charges  $P$ , elles produisent un travail  $A$ ; d'autre part la petite charge  $dP_n$  effectue également un travail de déformation  $dP_n \cdot \gamma_n$  lorsque le point d'application de la charge  $dP_n$  se déplace de  $\gamma_n$  dans la direction de  $dP_n$ , sous l'action de la charge  $P$ . De l'égalité du travail de déformation produit dans les deux cas, avec des ordres de succession différents dans l'application des charges, on tire :

$$A + \frac{\delta A}{\delta P_n} \cdot dP_n = A + dP_n \cdot \gamma_n$$

ou :

$$\gamma_n = \frac{\delta A}{\delta P_n}; \quad (164 \text{ a})$$

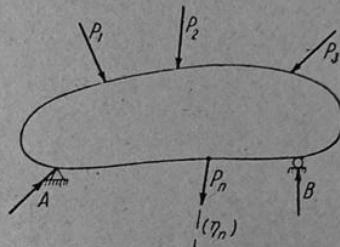


FIG. 263.

La dérivée partielle du travail de déformation  $A$  par rapport à la charge  $P$  où  $A$  est exprimé en fonction des charges  $P$ , fournit le déplacement  $\gamma_n$  du point d'application de  $P_n$  dans la direction de cette charge.

Les expressions « charge » et « déplacement » ont d'ailleurs un sens très général ; l'équation (164 a) s'applique en effet encore si l'on remplace la charge  $P_n$  par un moment  $M_n$  et le déplacement  $\gamma_n$  par une rotation  $\tau_n$  telle que :

$$\tau_n = \frac{\delta A}{\delta M_n}. \quad (164 \text{ b})$$

Figure 52. Démonstration du théorème de Castigliano, issue de [13]

Considérons une poutre statiquement déterminée liée à des appuis fixes. Les réactions d'appui sont déterminées par les équations de la statique.

La poutre est soumise aux forces  $P$  du système  $S$ . Appliquons le théorème de Maxwell en prenant un système  $S'$  constitué par des forces  $dP$  (différentielle de  $P$ ), c'est-à-dire correspondant à des petites variations des forces  $P$  dans leur direction.

Par suite :

$$\Sigma P dv = \Sigma v dP$$

Mais la variation du travail des forces  $P$  ou énergie de déformation quand on déplace leurs points d'application de  $dv$  dans leurs directions est :

$$dW = \Sigma P dv.$$

Par suite :

$$dW = \Sigma v dP.$$

On peut encore obtenir cette relation en différentiant la relation :

$$W = \frac{1}{2} \sum P v$$

$$dW = \frac{1}{2} \sum P dv + \frac{1}{2} \sum v dP = \sum P dv.$$

On obtient ainsi :

$$v = \frac{\partial W}{\partial P}$$

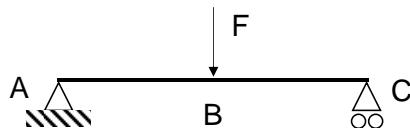
les variables  $P$  étant indépendantes et constituées par les forces extérieures directement appliquées.

*Le déplacement d'une force dans sa direction (ou la rotation du bras de levier d'un couple) est égal à la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à cette force (ou à ce couple).*

Figure 53. Démonstration du théorème de Castigliano, issue de [10]

### 11.3.3 Exemple : Flèche d'une poutre sur deux appuis, effort ponctuel au centre

Soit une poutre de longueur  $L$ , sur deux appuis, soumise à un effort ponctuel  $F$  en son centre, au point B. Calculer le déplacement  $u$  du point B. Le module  $E$  et le module  $I$  sont constants sur la poutre.



$$u = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx$$

Entre 0 et  $L/2$ ,

$$M = F \cdot \frac{x}{2}$$

Entre  $L/2$  et  $L$

$$M = \frac{F}{2} \cdot (L - x)$$

$$u = \frac{1}{EI} \cdot \frac{\partial}{\partial F} \left( \int_0^{L/2} F^2 \cdot \frac{x^2}{4} dx + \int_{L/2}^L \frac{F^2}{4} \cdot (L - x)^2 dx \right) = \frac{F \cdot L^3}{48EI}$$

## 11.4 Théorème de Ménabréa

Dans un système hyperstatique externe, les inconnues sont les réactions d'appui, et on a

$$\frac{\partial W}{\partial R_A} = u_A = 0$$

Si A est un appui fixe. On peut donc en déduire facilement  $R_A$ .

## 11.5 Théorème de la charge unitaire

Le théorème de Castigliano permet de calculer un déplacement seulement là où un effort est appliqué.

Une extension de Castigliano est le théorème de la charge unitaire, il permet de calculer le déplacement d'un point même si aucun effort n'y est appliqué.

### 11.5.1 Enoncé

Soit une poutre de module E, de moment quadratique I, soumise à au moment de flexion  $M_i$ .

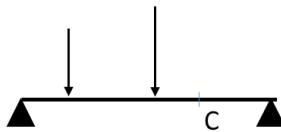
Le déplacement au point j est donné par :

$$\Delta_{ij} = \int_{structure} \frac{M_i M_j}{EI} dx$$

Avec  $M_j$  moment dû à une force unitaire appliquée au point j, dans la direction où l'on veut calculer le déplacement.

### 11.5.2 Démonstration

Soit par exemple la poutre ci-dessous.



On veut calculer le déplacement vertical du point C. Le théorème de Castigliano ne permet pas de calculer ce déplacement car aucune force n'est appliquée en C.

Appliquons donc une force F en C, force égale à 0. On peut alors écrire, par superposition :

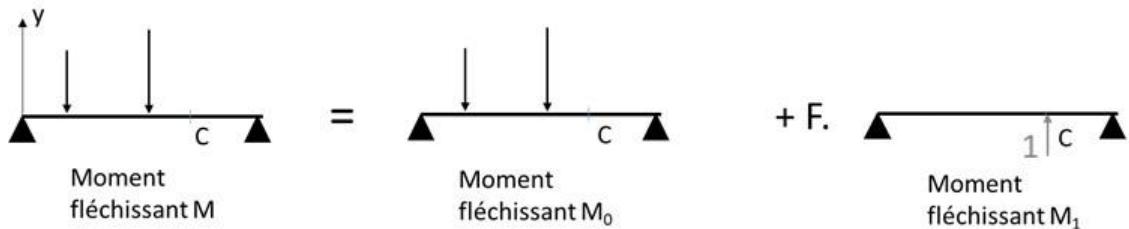


Figure 54. Calcul du déplacement vertical en C avec le théorème de la charge unitaire

M est le moment fléchissant total

$M_0$  est le moment fléchissant sur la structure avec le cas de charge réel

$M_1$  est le moment fléchissant pour une force unitaire placée en C dans la direction verticale.

Par superposition, on a :

$$M = M_0 + F \cdot M_1$$

L'énergie de déformation a pour expression, en négligeant les termes en traction et cisaillement :

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_{structure}^{\square} \frac{M^2}{EI} ds$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_{structure}^{\square} \frac{(M_0 + F \cdot M_1)^2}{EI} ds$$

Soit  $\Delta_C$  le déplacement au point d'application de F. Par le théorème de Castigliano on a :

$$\Delta_C = \frac{\partial W}{\partial F} = \int_{structure}^{\square} (M_0 + F \cdot M_1) \cdot \frac{M_1}{EI} ds$$

Or comme  $F = 0$  on a

$$\Delta_C = \int_{structure}^{\square} \frac{M_0 M_1}{EI} dx$$

### 11.5.3 Remarque importante

La force unitaire sera placée dans le sens positif par-rapport au repère.

Dans le calcul des intégrales, on spécifiera bien le signe des moments.

Cela donnera directement le signe du déplacement, dans la direction d'application de la force.

Par exemple, en Figure 54, la force sera orientée vers le haut (y positif). Si le déplacement obtenu est négatif, le déplacement est en  $-y$ .

### 11.5.4 Annexe : tableau des intégrales de Mohr

Tableau des intégrales de Mohr

Tableau tel que :  $\int_0^L M_i(x) \cdot M_j(x) \cdot dx$

$M_j(x)$						
$M_i(x)$		$\frac{1}{2}L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{2}L \cdot M_i(M_j + M'_j)$	$\frac{2}{3}L \cdot M_i M_j$	$\frac{2}{3}L \cdot M_i M_j$	$\frac{2}{3}L \cdot M_i M_j$
$M_i \uparrow$ 	$L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{2}L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{6}L \cdot M_i(2 \cdot M_j + M'_j)$	$\frac{1}{3}L \cdot M_i M_j$	$\frac{5}{12}L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{4}L \cdot M_i M_j$
$M_i \uparrow$ 	$\frac{1}{2}L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{3}L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{6}L \cdot M_i(2 \cdot M_j + M'_j)$	$\frac{1}{3}L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{12}L \cdot M_i M_j$	$(5 \cdot M_i + 3 \cdot M'_i)$
$M_i \uparrow$ 	$\frac{1}{2}L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{6}L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{6}L \cdot M_i(M_j + 2 \cdot M'_j)$	$\frac{1}{3}L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{4}L \cdot M_i M_j$	$\frac{5}{12}L \cdot M_i M_j$
$M_i \uparrow$ 	$\frac{1}{2}L \cdot M_j(M_i + M'_i)$	$\frac{1}{6}L \cdot M_j(2M_i + M'_i)$	$\frac{1}{6}L \cdot (2 \cdot M_i \cdot M_j + M_i \cdot M'_j + M'_i \cdot M_j + 2 \cdot M'_i \cdot M'_j)$	$\frac{1}{3}L \cdot M_j(M_i + M'_i)$	$\frac{1}{12}L \cdot M_j \cdot (5 \cdot M_i + 3 \cdot M'_i)$	$\frac{1}{12}L \cdot M_j \cdot (3 \cdot M_i + 5 \cdot M'_i)$
$M_i \uparrow$ 	$\frac{1}{2}L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{6}L \cdot M_i M_j \left(1 + \frac{x'}{L}\right)$	$\frac{1}{6}L \cdot M_i \left[ M_j \left(1 + \frac{x'}{L}\right) + M'_j \left(1 + \frac{x}{L}\right) \right]$	$\frac{1}{3}L \cdot M_i M_j \cdot \left(1 + \frac{x \cdot x'}{L^2}\right)$	$\frac{1}{12}L \cdot M_i M_j \cdot \left(3 + \frac{3x'}{L} - \frac{x'^2}{L^2}\right)$	$\frac{1}{12}L \cdot M_i M_j \cdot \left(3 + \frac{3x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)$
$M_i \uparrow$ 	$\frac{1}{2}L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{4}L \cdot M_i M_j$	$\frac{1}{6}L \cdot M_i(M_j + M'_j)$	$\frac{5}{12}L \cdot M_i M_j$	$\frac{17}{48}L \cdot M_i M_j$	$\frac{17}{48}L \cdot M_i M_j$

### 11.5.5 Méthode des forces avec moment unitaire

#### 11.5.5.1 Objectif

Apporter un éclairage sur l'utilisation de la méthode des forces avec un moment unitaire.

#### 11.5.5.2 Apport théorique

Dans le cas d'un moment d'encastrement, on ne calcule pas un déplacement mais une rotation  $\omega$ .

Mais la formule est la même que pour un déplacement :

$$\omega = \int_{structure} \frac{M_0 \cdot M_1}{EI} ds$$

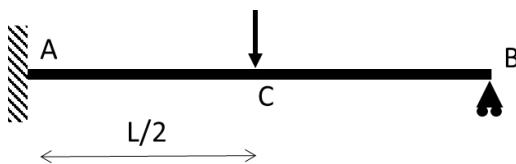
$M_0$  : moment sur structure isostatique associée avec cas de charge réel

$M_1$  : moment sur structure isostatique associée avec moment unitaire là où on veut calculer la rotation

Exemple

On a plutôt l'habitude, avec la méthode des forces, de déterminer des réactions d'appui. Mais on peut aussi s'en servir pour déterminer des moments d'encastrement.

Soit la structure ci-dessous



Il y a plusieurs façons de la résoudre avec la méthode des forces.

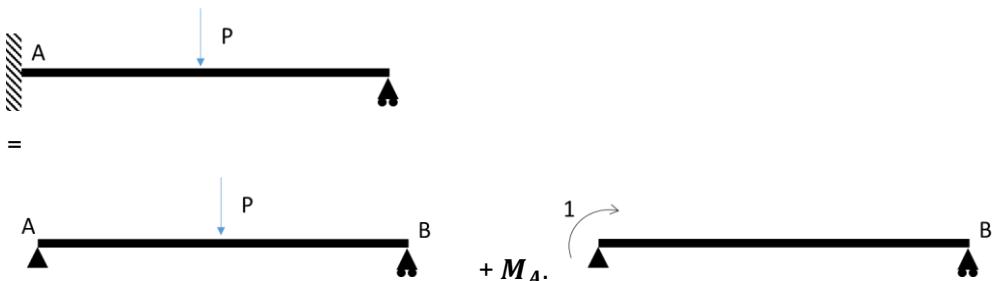
On donne ci-dessous deux méthodes où dans un cas l'inconnue que l'on détermine est  $M_A$  et dans l'autre, l'inconnue que l'on détermine est  $Y_B$ .

Pour comparer les deux méthodes on retrouve dans les deux cas

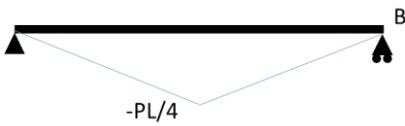
$$M_A = \frac{3PL}{16}$$

$$Y_B = \frac{5P}{16}$$

### Méthode 1



$M_0$



M1



$$\omega_0 = \int_{\text{structure isostatique associée}} \frac{M_0 \cdot M_1}{EI} ds$$

$$\omega_1 = \int_{\text{structure isostatique associée}} \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} ds$$

$$\omega_0 + M_A \cdot \omega_1 = 0$$

Donc

$$M_A = -\frac{\omega_0}{\omega_1}$$

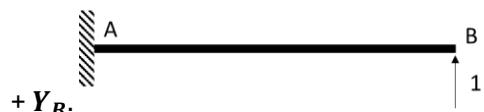
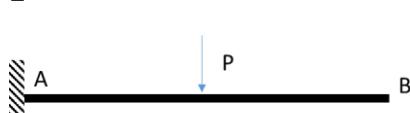
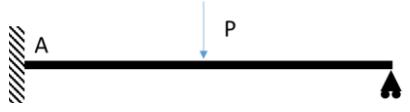
Finalement

$$M_A = \frac{3PL}{16}$$

Avec le PFS, on retrouve

$$Y_B = \frac{5P}{16}$$

## Méthode 2



M<sub>0</sub>

-PL/2

A

M<sub>1</sub>

L

A

B  
1

$$\delta_0 = \int_{\text{structure isostatique associée}} \frac{M_0 \cdot M_1}{EI} ds$$

$$\delta_1 = \int_{\text{structure isostatique associée}} \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} ds$$

$$\delta_0 + Y_B \cdot \delta_1 = 0$$

Donc

$$Y_B = -\frac{\delta_0}{\delta_1}$$

Finalement

$$Y_B = \frac{5PL}{16}$$

Avec le PFS, on retrouve

$$M_A = \frac{3PL}{16}$$

# 12 Flambement

## 12.1 Introduction

On appelle flambement le phénomène de flexion d'une structure soumise à un effort de compression.

La flexion se produit dans une direction perpendiculaire à l'axe de compression.

Ce phénomène est **non linéaire** : la flexion apparaît subitement pour une valeur critique de l'effort de compression. Lors du flambement, les forces ne sont plus proportionnelles aux déformations.

Il est **instable** car la flèche en flexion peut augmenter alors même qu'on n'augmente plus l'effort  $F$ .

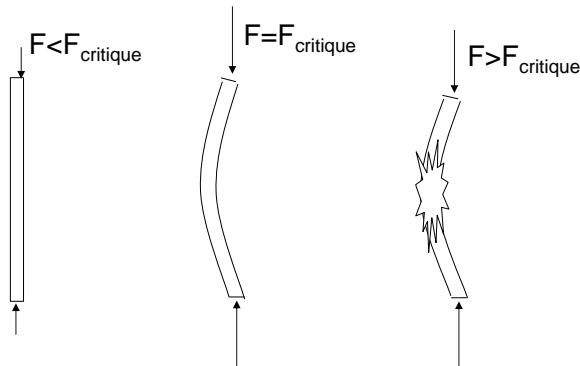


Figure 55. Le phénomène de flambement

La charge critique de flambement  $F_{critique}$  est donnée par

$$F_{critique} = k \times \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{L^2}$$

$k$  est un coefficient sans dimension dépendant des conditions aux limites (appuis à chaque extrémité de la poutre, voir Figure 56).

$I_z$  : moment quadratique de la section : quantifie la résistance de la section en flexion (propriété géométrique) ;  $L$  : longueur de la poutre.

$E$  : module d'Young de la poutre.

L'expression de la charge critique de flambement montre l'influence des propriétés du matériau ( $E$ ), mais aussi de la géométrie de la pièce :  $I_z$  et  $L$ .

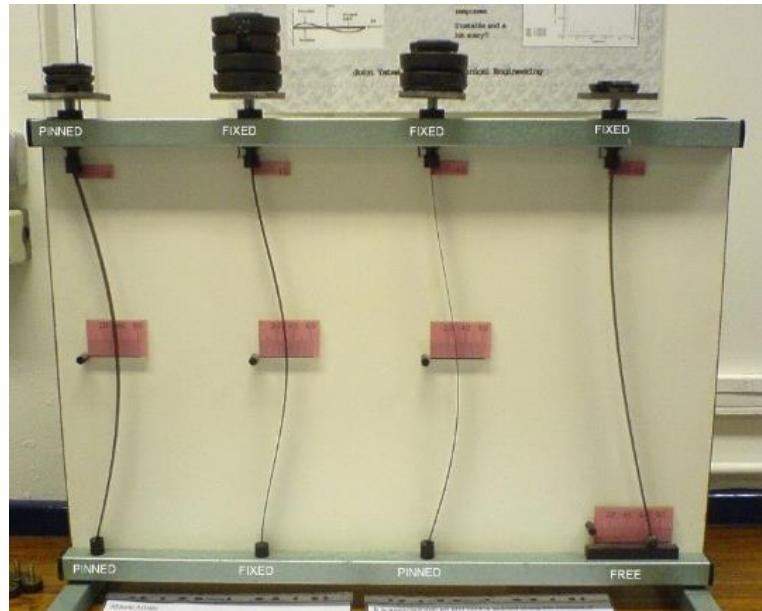


Figure 56. Charge critique : influence des conditions aux limites (Grahams Child, CC BY-SA 3.0, Wikimedia Commons)

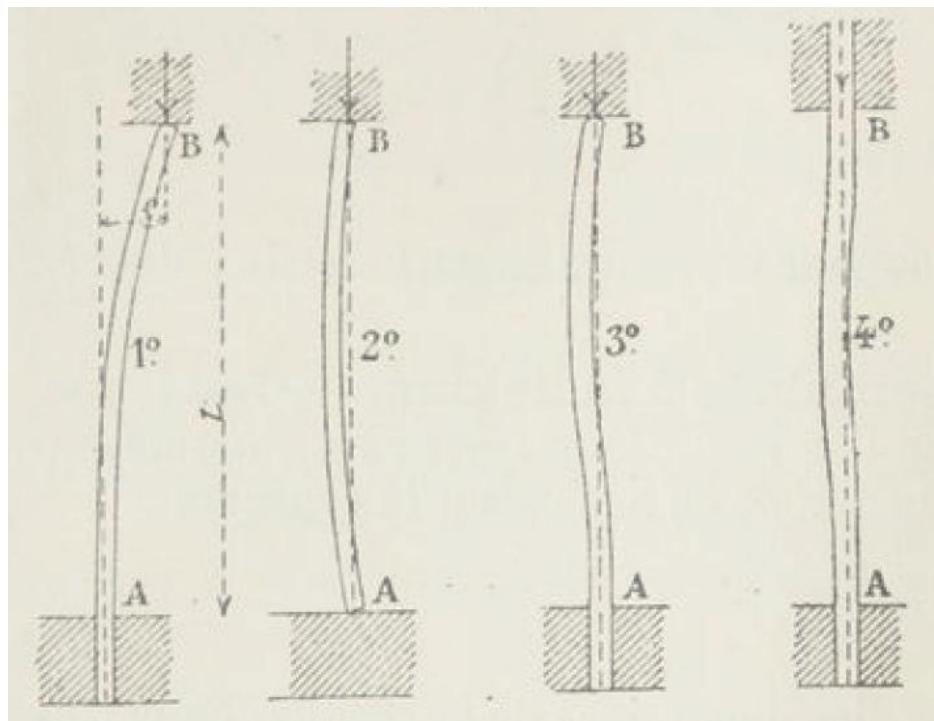


Figure 57. Charge critique : influence des conditions aux limites [14]

## 12.2 Modélisation du phénomène

Contrairement à l'ensemble des calculs présentés dans ce document, il est nécessaire de se placer dans la configuration déformée pour modéliser le flambement. Cela permet de faire apparaître un moment fléchissant  $M_f$  dû à la charge  $\vec{F}$  (Figure 58).

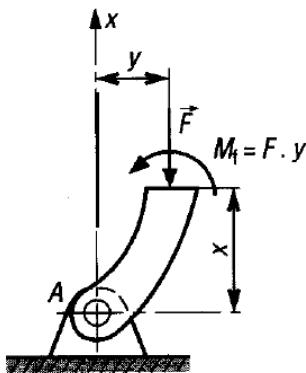


Figure 58. Calcul de la charge critique de flambage : on se place dans la configuration déformée pour déterminer le moment dû à l'effort de compression [7]

### 12.2.1 Schémas des cas 1-2-3 avec les différentes conditions d'appui

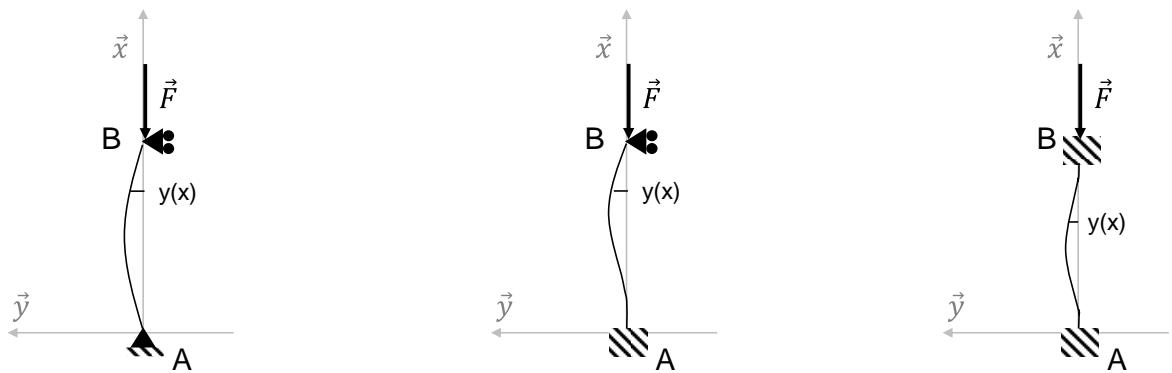


Figure 59. Gauche : cas 1 poutre appuyée sur ses 2 extrémités. Milieu : cas 2 Cas 2 : poutre appui en B – encastrement en A. Droite : cas 3. Cas 3 : poutre encastrement - encastrement

### 12.2.2 Cas 1 : poutre appuyée sur ses 2 extrémités

$$FS : R_{xA} = P ; R_{yA} + R_{yB} = 0$$

$$M_f(x) = E \cdot I_z \cdot y''(x)$$

$$M_f(x) = -F \cdot y(x)$$

$$E \cdot I_z \cdot y'' + F \cdot y = 0$$

$$y'' + k^2 \cdot y = 0$$

$$\text{Avec } k^2 = \frac{F}{E \cdot I_z}$$

$$y(x) = A \cdot \cos(kx) + B \cdot \sin(kx)$$

Conditions aux limites :  $y(0)=0 ; y(L)=0$

Donc

$$\begin{cases} A \cdot \cos(0) + B \cdot \sin(0) = 0 \\ A \cdot \cos(kL) + B \cdot \sin(kL) = 0 \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(kL) & \sin(kL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si  $\det \neq 0$  :  $A=B=0$  pas de déplacement

$$\det \neq 0 \Leftrightarrow \sin kL \neq 0 \Leftrightarrow kL \neq \pi \Leftrightarrow k^2 \neq \frac{\pi^2}{L^2} \Leftrightarrow P \neq \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{L^2}$$

Si  $\det=0$  : infinité de solutions avec  $B$  quelconque

$$\sin kL = 0 \Leftrightarrow kL = n\pi \Leftrightarrow F_{cr} = n \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{L^2}$$

Pour  $n=1$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{L^2}$$

### 12.2.3 Cas 2 : poutre appui en B – encastrement en A

PFS :  $R_{xA}=P$  ;  $R_{yA}+R_{yB}=0$  ;  $M_A+R_{yb} \cdot L=0$

$$M_f(x) = E \cdot I_z \cdot y''(x)$$

$$M_f(x) = -F \cdot y(x) + R_{yB}(L-x)$$

$$y'' + k^2 \cdot y = \frac{R_{yB}}{E \cdot I_z} (L-x)$$

$$\text{Avec } k^2 = \frac{F}{E \cdot I_z}$$

$$y = A \cdot \cos(kx) + B \cdot \sin(kx) + \frac{R_{yB}}{F} \cdot (L-x)$$

Conditions aux limites :  $y(0)=0 ; y(L)=0 ; y'(0)=0$

$$A + \frac{R_{yB}}{F} \cdot L = 0$$

$$A \cdot \cos(kL) + B \cdot \sin(kL) = 0$$

$$B \cdot k - \frac{R_{yB}}{F} = 0$$

$$F_{cr} \approx 2,04 \times \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{L^2}$$

### 12.2.4 Cas 3 : poutre encastrement - encastrement

PFS :  $R_{xA}=P$  ;  $R_{yA}+R_{yB}=0$  ;  $M_A+M_B+R_{yb}.L=0$  et par symétrie :  $M_A+M_B=0$

$$M_f(x) = E \cdot I_z \cdot y''(x)$$

$$M_f(x) = -F \cdot y(x) + M_B$$

$$y'' + k^2 \cdot y = \frac{M_B}{E \cdot I_z}$$

$$\text{Avec } k^2 = \frac{F}{E \cdot I_z}$$

Donc

$$y = A \cdot \cos(kx) + B \cdot \sin(kx) + \frac{M_B}{k^2 \cdot E \cdot I_z}$$

Conditions aux limites :  $y(0)=0$  ;  $y(L)=0$  ;  $y'(0)=0$

Donc

$$A + \frac{M_B}{k^2 \cdot E \cdot I_z} = 0$$

$$A \cdot \cos(kL) + B \cdot \sin(kL) + \frac{M_B}{k^2 \cdot E \cdot I_z} = 0$$

$$B \cdot k = 0$$

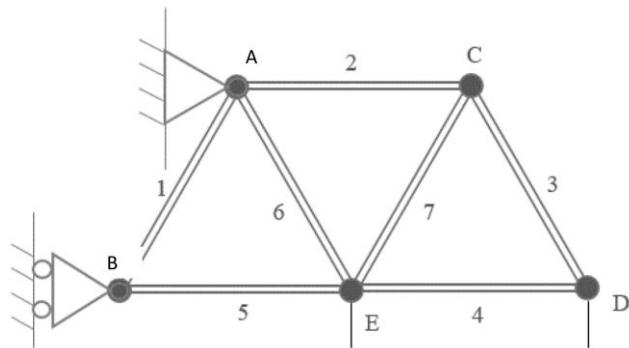
3 équations et 3 inconnues :  $A$ ,  $B$ ,  $M_B$

$$F_{cr} = 4 \times \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{L^2}$$

## 13 Fiches méthodes

### 13.1 Pour ne plus vous tromper dans les bras de levier et les signes des moments

#### 13.1.1 Exemple 1 : treillis



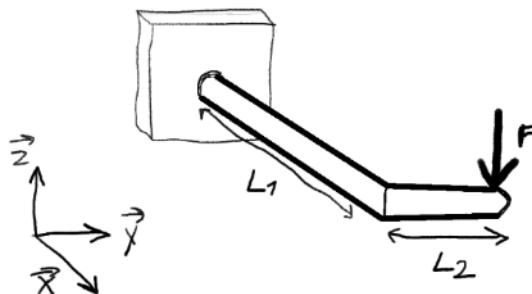
Les barres ont une longueur L. Le moment en B dû à la réaction d'appui en A est donné par

$$\vec{M}_B(\vec{R}_A) = \vec{M}_A(\vec{R}_A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_A$$

La liaison en A ne crée pas de moment en A (pivot) :  $\vec{M}_A(\vec{R}_A) = \vec{0}$  donc

$$\vec{M}_B(\vec{R}_A) = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_A = \begin{pmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}L \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_{Ay} \cdot \frac{L}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}L \cdot R_{Ax} \end{pmatrix} = \left( R_{Ay} \cdot \frac{L}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}L \cdot R_{Ax} \right) \vec{z}$$

#### 13.1.2 Exemple 2 : encastrement mur point B, application force F en A.



Moment en B dû à la force en A

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$$

Or le moment en A dû à la force en A est nul :  $\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{0}$  donc

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} L1 \\ L2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F \cdot L2 \\ F \cdot L1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# 14 Exercices

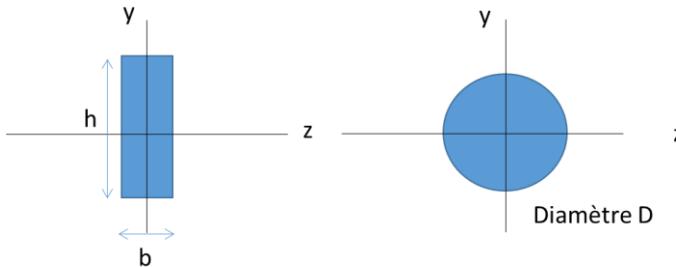
## 14.1 Caractéristiques des sections

### 14.1.1 Exercice. Moment quadratique de deux sections

Soient les deux sections ci-dessous de centre d'inertie G.

Déterminer l'expression de  $I_{GZ}$  moment quadratique par rapport à l'axe Gz pour les deux sections. On rappelle que

$$I_{GZ} = \iint y^2 dy dz$$



#### Correction

Section rectangulaire

$$I_{GZ} = \iint y^2 dy dz = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = b \cdot \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = b \cdot \left( \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{24} + \frac{\left(-\frac{h}{2}\right)^3}{24} \right)$$

$$I_{GZ} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Section circulaire

$$I_{GZ} = \iint r^2 \sin^2 \theta \cdot dS = \iint r^2 \sin^2 \theta \cdot r dr d\theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \theta \cdot r dr d\theta$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$I_{Gz} = \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot (\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}) \right]_0^{2\pi} = \frac{R^4}{4} \cdot \frac{2\pi}{2}$$

$$I_{Gz} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

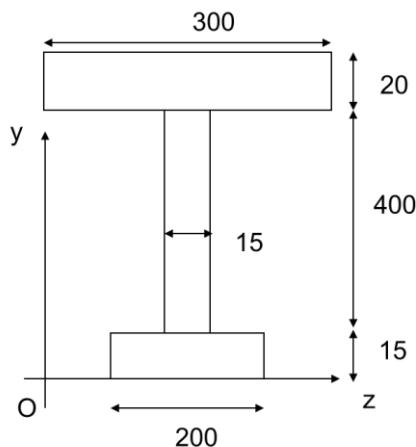
#### 14.1.2 Exercice. Centre de gravité et Moment quadratique d'une poutre en I

Soit une poutre constituée d'une section en I, centre de gravité G, de masse volumique homogène.

1/ Calculer les coordonnées du centre de gravité G de la section ci-dessous.

2/ En déduire le moment quadratique  $I_{Gz}$  de la section S par rapport à l'axe Gz.

Les dimensions sont données en mm.



#### Correction

Pour les deux questions, on divise la section en 3 sections rectangulaires (300x20,15x400,200x15).

1/

$$y_G = \frac{S_1 y_{G1} + S_2 y_{G2} + S_3 y_{G3}}{S_1 + S_2 + S_3} = 257,5 \text{ mm}$$

Par symétrie,  $z_G = 150$

2/ On calcule le moment quadratique des 3 sections par rapport à l'axe z passant par leur centre de gravité puis on en déduit le moment quadratique par rapport à Gz à l'aide du théorème de Huygens.

$$I_{GZ} = 4,4693 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

### 14.1.3 Exercice. Caractéristiques d'une section en I

Soient les sections A et B constituées du même matériau de module E.

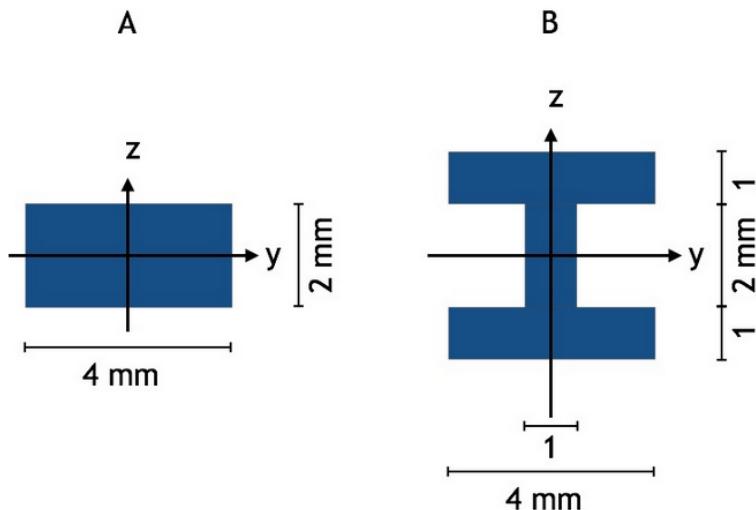


Figure 60. Référence MOOC ENS Cachan

Q1/ Montrer que la raideur en traction de la section B est 1.25 fois plus grande que la raideur de la section A

Q2/ Montrer que le moment quadratique  $I_{yB}$  de la section B est 7.25 fois plus grande que le moment quadratique de la section A

Rappels

Loi de Hooke en traction uniaxiale

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

De plus

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Donc

$$F = \frac{E}{L_0} \cdot S \cdot \Delta L$$

Donc la raideur d'une poutre en traction est

$$\frac{E}{L_0} \cdot S$$

Correction

1/ Les deux poutres ont même longueur et module E. La section  $S_B$  ( $10\text{mm}^2$ ) est 25% fois plus grande que la section  $S_A$  ( $8\text{mm}^2$ ) donc **la raideur en traction augmente de 25%**.

2/ Section A

$$I_{yA} = \frac{4 * 2^3}{12} \approx 2.7\text{mm}^4$$

Section B

$$I_{yB} = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3}$$

Par le théorème de Huyguens :

$$I_{y1} = \frac{4 * 1^3}{12} + 1.5^2 * 4 * 1 \approx 9.3\text{ mm}^4$$

$$I_{y1} = I_{y3}$$

$$I_{y2} = \frac{1 * 2^3}{12}$$

Par conséquent,

$$\frac{I_{yA}}{I_{yB}} = \frac{2 * \left( \frac{4 * 1^3}{12} + 1.5^2 * 4 * 1 \right) + \frac{8}{3}}{8} = 7.25$$

#### 14.1.4 Exercice. Matériaux « sandwichs »

Les matériaux « sandwichs » sont des matériaux composés d'une âme centrale entourée de deux peaux, ou semelles. Ils présentent un excellent rapport poids/résistance et poids/rigidité en flexion.

On propose dans cet exercice de retrouver les valeurs données ci-dessous concernant la rigidité et la résistance en flexion de trois sandwichs de différentes épaisseurs.

Questions

La figure ci-dessous donne les rapports entre la rigidité en flexion (moment quadratique Iz) d'une poutre d'épaisseur t et celle d'un sandwich d'épaisseur 2t et 4t.

Retrouver les rapports de 7 et 37 donnés.

Properties	Solid material	Core thickness t	8t
Stiffness	1.0	7.0	37.0
Flexural strength	1.0	3.5	9.2
Weight	1.0	1.03	1.06

Doc. HEXCEL

Techniques de l'ingénieur AM5141

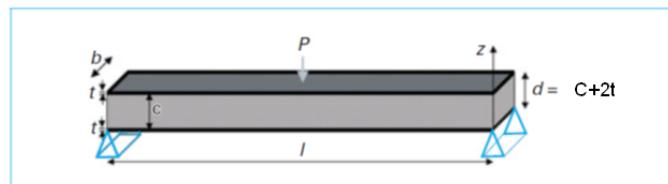


Figure 21 – Poutre sandwich sur deux appuis chargée au centre

Figure 61. Sandwichs

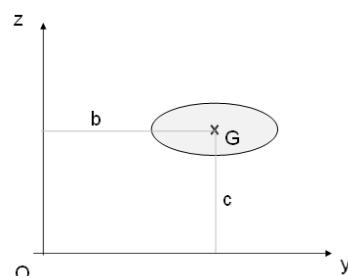
 $S = b \cdot h$ $I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$ $I_z = \frac{h \cdot b^3}{12}$ $I_G = \frac{b \cdot h}{12} (h^2 + b^2) = I_y + I_z$	 $S = \pi R^2$ $I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$ $I_u = \frac{5 \pi R^4}{4} = \frac{5 \pi d^4}{64}$ $I_G = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} = I_y + I_z$
 $S = BH - bh$ $I_y = \frac{BH^3 - hb^3}{12}$ $I_z = \frac{BH^3 - bh^3}{12} = I_y + I_z$	 $S = \pi (R^2 - r^2)$ $I_y = I_z = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$ $= \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$ $I_G = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4) = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = I_y + I_z$

Fanchon. Guide de mécanique. Nathan [7]

Théorème de Huyghens : moment quadratique pour un axe quelconque

$$I_{oy} = I_y + S \cdot c^2$$

$$I_{oz} = I_z + S \cdot b^2$$



## Correction

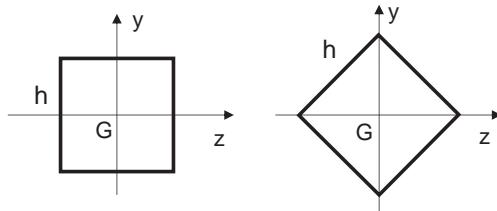
$$I_Z = \frac{b \cdot (2t)^3}{12} = \frac{8b \cdot t^3}{12} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot t^3$$

$$I_Z = 2 \left( \frac{b \cdot t^3}{12} + b \cdot t \cdot (1,5t)^2 \right) = 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot b \cdot t^3$$

$$Iz = 2 \left( \frac{b \cdot t^3}{12} + b \cdot t \cdot (3,5t)^2 \right) = 37 \cdot \frac{2}{3} \cdot b \cdot t^3$$

### 14.1.5 Exercice. Résistance en flexion d'une section losange

On dispose d'une poutre à section carré de côté  $h$ . On se demande s'il est préférable de la disposer « en carré » ou « en losange », pour optimiser sa résistance à la flexion.



1/ Calculer le moment quadratique  $I_{Gz}$  par rapport à l'axe  $Gz$ , pour chaque section

2/ Le seul calcul du moment quadratique permet-il de conclure sur la résistance en flexion des deux sections ?

#### Correction

1/ Section « en carré » :

$$I_{Gz} = \iint_D y^2 dz dy = \frac{h^4}{12}$$

Avec

$$D = \{z; y\} \in \mathbb{R}^2 / -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \text{ et } -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}$$

Section « en losange » :

$$I_{Gz} = 4 \cdot I$$

Avec  $I$  l'intégrale d'un quart de losange telle que

$$I = \iint_D y^2 dz dy$$

Avec

$$D = \{z; y\} \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq z \leq \frac{h}{\sqrt{2}} \text{ et } 0 \leq y \leq -z + \frac{h}{\sqrt{2}}$$

$$I = \int_0^{\frac{h}{\sqrt{2}}} \left( \int_0^{-z + \frac{h}{\sqrt{2}}} y^2 dy \right) dz = \frac{h^4}{48}$$

Donc

$$I_{GZ} = \frac{h^4}{12}$$

2/ Section « en carré » :

$$\sigma_{max} = -\frac{M_f \cdot y_{max}}{I_{GZ}}$$

Avec

$$y_{max} = \frac{h}{2}$$

Donc

$$\sigma_{max} = -M_f \cdot \frac{6}{h^3}$$

Section « en losange » :

$$\sigma_{max} = -\frac{M_f \cdot y_{max}}{I_{GZ}}$$

Avec

$$y_{max} = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

Donc

$$\sigma_{max} = -M_f \cdot \frac{6\sqrt{2}}{h^3}$$

La contrainte maximale sera plus forte dans la section posée « en losange » malgré un moment quadratique égal à la section carrée.

## 14.2 Estimation des efforts et moments

### 14.2.1 Exercice : solide soumis à un système de forces

#### Partie 1 : solide soumis à deux forces

Soient 2 forces  $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$  appliquées aux points A et B d'un solide à l'équilibre.

En écrivant le principe fondamental de la statique, que peut-on dire de ces deux forces ?

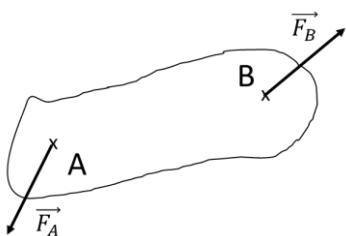


Figure 62. Exercice : solide soumis à un système de forces

**Partie 2 : solide à l'équilibre soumis à trois forces**

Soient 3 forces  $\vec{F}_A$ ,  $\vec{F}_B$  et  $\vec{F}_C$  appliquées aux points A, B et C d'un solide à l'équilibre.

En écrivant le principe fondamental de la statique, que peut-on dire de ces trois forces ?

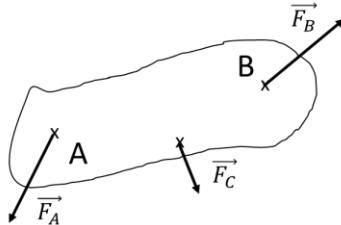


Figure 63. Exercice : solide soumis à un système de forces

## Correction

**Partie 1**

A l'équilibre on a :

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_B = \vec{0} \quad (2)$$

(1) indique que  $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$  ont une même direction, une même amplitude et des sens opposés.

(2) indique que  $\overrightarrow{AB}$  et  $\vec{F}_B$  ont même direction, donc la force  $\vec{F}_B$  a pour direction la droite AB.

Finalement, les deux forces ont pour direction la droite AB. Elles ont même norme et sont de sens opposé.

**Partie 2**

Soit un solide à l'équilibre soumis à 3 forces appliquées en A, B et C, le PFS donne :

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_B + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{F}_C = \vec{0} \quad (2)$$

Le vecteur  $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_B$  est normal au plan  $(\overrightarrow{AB}, \vec{F}_B)$ . Le vecteur  $\overrightarrow{AC} \wedge \vec{F}_C$  est normal au plan  $(\overrightarrow{AC}, \vec{F}_C)$ .

(2) montre que ces vecteurs sont opposés donc les forces  $\vec{F}_B$  et  $\vec{F}_C$  sont dans le plan ABC.

(1) montre que la force  $\vec{F}_A$  est également dans ce plan. Donc les 3 forces sont coplanaires.

Si  $\vec{F}_B$  et  $\vec{F}_C$  ne sont pas parallèles. Soit I leur point d'intersection. L'équation du moment statique écrite en I montre que le support de la force  $\vec{F}_A$  passe également par I. Donc les 3 forces sont concourantes.

Si  $\vec{F}_B$  et  $\vec{F}_C$  sont parallèles, alors (1) montre que  $\vec{F}_A$  est parallèle aux deux autres. Les 3 forces sont parallèles.

Pour conclure, si un solide est en équilibre sous l'action de 3 forces, ces forces sont :

- Coplanaires (dans un même plan)
- concourantes en un même point ou parallèles

et de somme vectorielle nulle

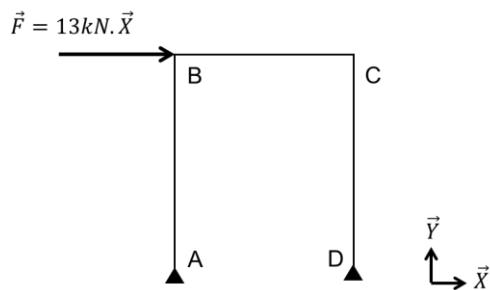
### 14.2.2 Exercice : portique

Soit le portique isostatique ci-dessous, de longueur L et de hauteur H.

La liaison en A est un appui (réaction en X et Y).

La liaison en D est un appui glissant (réaction en Y, déplacement possible en X).

Déterminer les réactions de liaison en A et D.



Correction

$$X_A + 13 = 0$$

Somme des moments en A

$$-13.H + Y_D \cdot L = 0$$

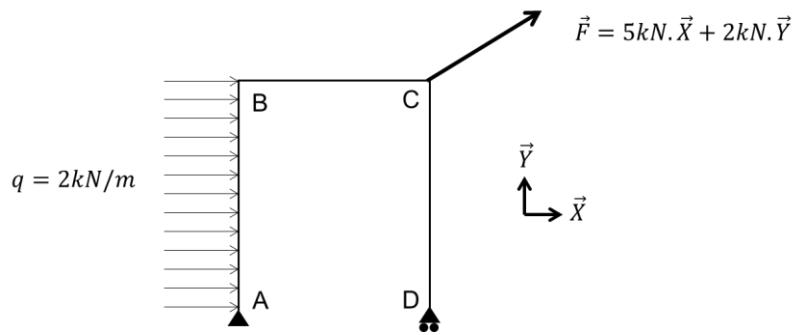
$$Y_D = 13 \cdot \frac{H}{L}$$

$$Y_A + Y_D = 0$$

### 14.2.3 Exercice : portique

Soit le portique isostatique ci-dessous, de longueur L=3m et de hauteur H=4m.

Déterminer les réactions de liaison en A et D.



**Correction**

$$X_A = -13kN ; Y_A = -12kN ; Y_D = 10kN$$

#### 14.2.4 Exercice. Porte coulissante

Soit une poutre coulissante composée d'un panneau 1 de poids  $\vec{P}$  ( $P=3000$  N) dont les dimensions sont 3000x5000, de deux galets 2 et 3 et d'un rail 5.

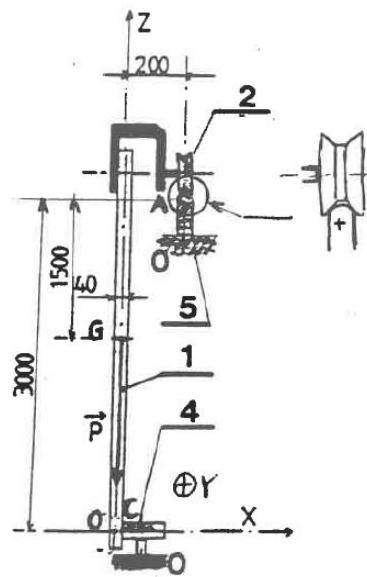
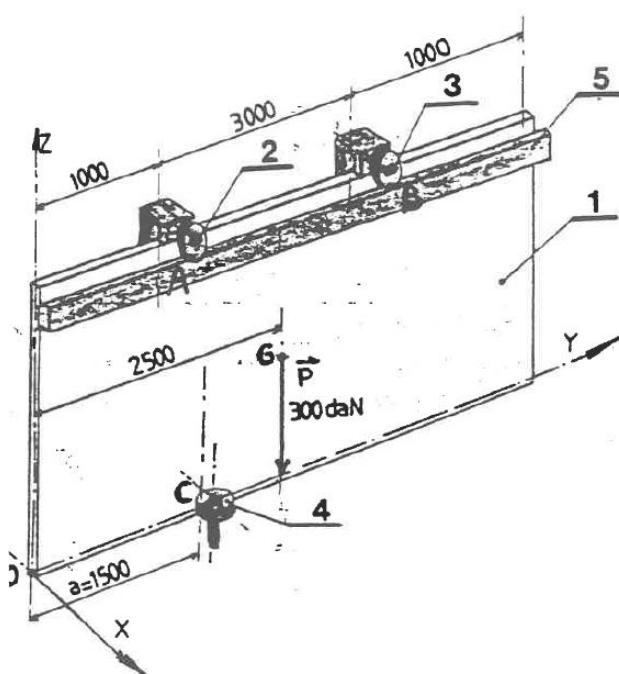
Les dimensions sur le plan sont en mm.

On néglige l'épaisseur de la porte dans les calculs de moments.

La porte est en appui en A et B sur le rail 5 par l'intermédiaire des galets 2 et 3. Le rail est scellé dans le mur 0. L'ensemble coulisse librement le long du rail posé horizontalement.

La stabilité de la porte est assurée par le galet 4. L'axe de ce galet, vertical, est scellé dans la sol 0. Le contact avec le panneau est effectué en C.

On suppose que les liaisons sont sans frottement. La résistance au roulement des galets est négligée.



Q1/ Calculer le degré d'hyperstatique du problème

Q2/ Déterminer les actions mécaniques s'exerçant sur la porte

Correction

Q1/ Bilan des actions extérieures sur S

$$[Poids \rightarrow S]_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix}$$

$$[Rail \rightarrow S]_A = \begin{pmatrix} X_A \\ 0 \\ Z_A \end{pmatrix}$$

$$[Rail \rightarrow S]_B = \begin{pmatrix} X_B \\ 0 \\ Z_B \end{pmatrix}$$

$$[Galet 4 \rightarrow S]_B = \begin{pmatrix} X_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5 inconnues et 6 équations (on est dans l'espace)

D=-1, système hypostatique car la porte est libre en Y

Q2/ On isole le portail + galets 2 et 3. S = {portail + galets 2 et 3}.

Le système à l'équilibre donc selon le principe fondamental de la statique :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Donc

$$X_A + X_B + X_C = 0$$

$$Z_A + Z_B - P = 0$$

De plus,

$$\sum \vec{M} = \vec{0}$$

Donc somme des moments en A = 0.

Moment en A dû à l'action du rail en B :

$$\vec{M}_A(\text{rail en B}) = \vec{M}_B(\text{rail en B}) + \overrightarrow{AB} \wedge \begin{pmatrix} X_B \\ 0 \\ Z_B \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_B(\text{rail en B}) = \vec{0}$$

$$\vec{M}_A(\text{rail en B}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_B \\ 0 \\ Z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3Z_B \\ 0 \\ -3X_B \end{pmatrix}$$

Moment en A dû à l'action du galet 4 en C :

$$\vec{M}_A(\text{galet 4}) = \vec{M}_B(\text{galet 4}) + \overrightarrow{AC} \wedge \begin{pmatrix} X_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.5 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3X_C \\ -0.5X_C \end{pmatrix}$$

Moment en A dû au poids :

$$\vec{M}_A(\text{poids}) = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 1.5 \\ -1.5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5P \\ -0.2P \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$3Z_B - 1.5P = 0$$

$$-3X_C - 0.2P = 0$$

$$-3X_B - 0.5X_C = 0$$

Finalement,

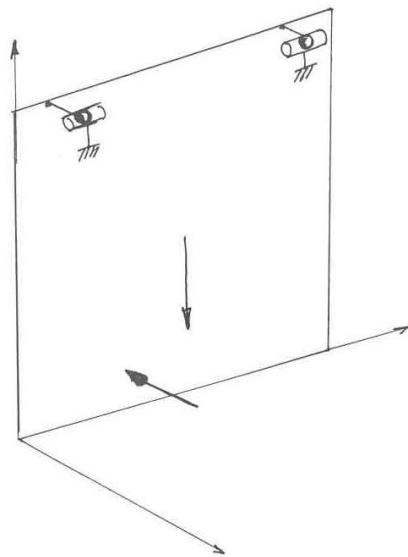
$$Z_B = 0.5P = 1500N$$

$$Z_A = -Z_B + P = 1500N$$

$$X_C = -\frac{0.2}{3}P = -200N$$

$$X_B = -\frac{0.5X_C}{3} = \frac{0.5}{3} \cdot \frac{0.2}{3}P = 33N$$

$$X_A = -X_B - X_C = -33 + 200 = 167N$$



#### 14.2.5 Exercice. Effort total dû à une charge répartie

Soient deux poutres de longueur  $L$ , d'axe  $x$ , encastrées à une extrémité.

L'une est soumise à un effort linéaire constant  $q$  tout le long de la poutre.

L'autre est soumise à un effort linéaire tel que  $q=a.x$  avec  $a$  constante réelle positive et  $x=0$  au niveau de l'enca斯特ement.

Déterminer l'expression de l'effort total  $F$  appliqué sur les deux poutres.



Correction

Effort  $q$  constant :

$$F = \int_0^L q \cdot dx = q \cdot L$$

Effort  $q$  tel que  $q=a.x$  avec  $a$  constante

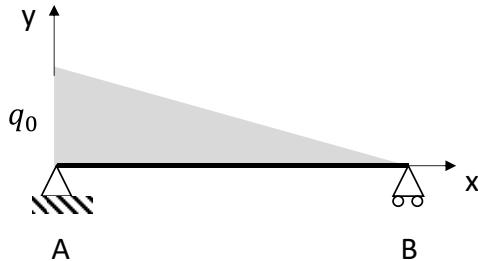
$$F = \int_0^L a \cdot x \cdot dx = a \cdot \frac{L^2}{2}$$

### 14.2.6 Exercice : Poutre sur deux appuis avec charge linéique variable

Soit une poutre sur deux appuis A et B, de longueur L, d'axe x, soumise à une charge linéique q telle que

$$q = q_0 - q_0 \cdot \frac{x}{L}$$

On pose x=0 en A.



Déterminer les réactions d'appui en A et B.

#### Correction

Principe Fondamental de la Statique

$$X_A = 0$$

$$Y_A + Y_B - \frac{q_0 L}{2} = 0$$

Somme des moments en A : soit  $M_q$  le moment dû à la charge linéique

$$Y_B \cdot L + M_q = 0$$

$$M_q = - \int_0^L \left( q_0 - q_0 \cdot \frac{x}{L} \right) \cdot x \cdot dx = - \int_0^L \left( q_0 \cdot x - q_0 \cdot \frac{x^2}{L} \right) dx$$

$$M_q = - \left[ q_0 \cdot \frac{x^2}{2} - q_0 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^L = - q_0 \cdot \frac{L^2}{2} - q_0 \cdot \frac{L^3}{3} = - q_0 \cdot L^2 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

$$M_q = - q_0 \cdot L^2 \cdot \frac{1}{6} = - q_0 \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot L$$

On retrouve le moment dû à une charge ponctuelle d'intensité  $q_0 \cdot \frac{L}{2}$  appliquée au centre de gravité du triangle donc appliquée en  $L/3$ .

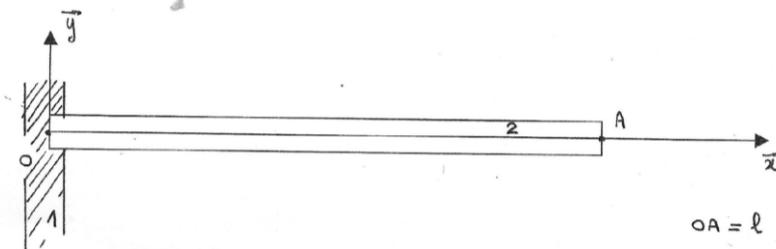
$$Y_B = q_0 \cdot L \cdot \frac{1}{6}$$

$$Y_A = - q_0 \cdot L \cdot \frac{1}{6} + \frac{q_0 L}{2} = q_0 \cdot L \cdot \frac{2}{6}$$

### 14.2.7 Exercice. Poutre soumise à son propre poids

La poutre a une section carrée de côté h.

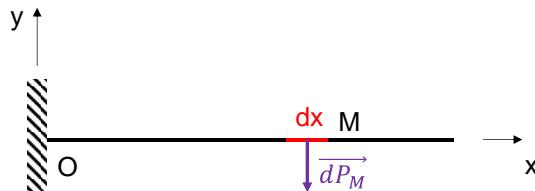
Déterminer le torseur des actions de pesanteur en O (résultante et moment en O)



Correction

Poids d'une section de poutre élémentaire de longueur  $dx$ , volume  $dV_M$ , en M :

$$\overrightarrow{dP_M} = -dV_M \cdot \rho \cdot g \cdot \vec{y} = -\rho \cdot g \cdot h^2 \cdot dx \cdot \vec{y}$$



Soit  $[Actions\ pesanteur]_O$  le torseur des actions de pesanteur en O :

$[Actions\ pesanteur]_O$

$$= \begin{cases} \overrightarrow{R_0} = \int_0^L \overrightarrow{dP_M} \\ \overrightarrow{M_0} = \int_0^L \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dP_M} = \int_0^L \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \cdot g \cdot h^2 \cdot dx \\ 0 \end{pmatrix} = -\rho \cdot g \cdot h^2 \int_0^L x \cdot dx \cdot \vec{z} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{R_0} = -\rho \cdot g \cdot h^2 \int_0^L dx \cdot \vec{y} = -\rho \cdot g \cdot h^2 \cdot L \cdot \vec{y}$$

$$\overrightarrow{M_0} = -\rho \cdot g \cdot h^2 \cdot \frac{L^2}{2} \cdot \vec{z}$$

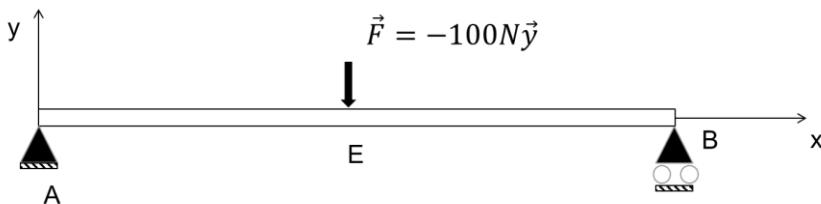
On retrouve la résultante et le moment d'une charge linéique de valeur  $-\rho \cdot g \cdot h^2$ .

## 14.3 Poutres isostatiques en flexion

### 14.3.1 Exercice. Poutre isostatique

Soit une poutre de longueur L, sollicitée par une force  $\vec{F}$  en E, à la distance  $L/2$  de A.

1. Déterminer les efforts et moments en A et B
2. Déterminer le torseur de cohésion le long de la poutre
3. Construire les diagrammes des efforts normaux, tranchants et moments fléchissants



#### Correction

Principe fondamental de la statique

$$X_A = 0$$

$$Y_A = Y_B = 50N$$

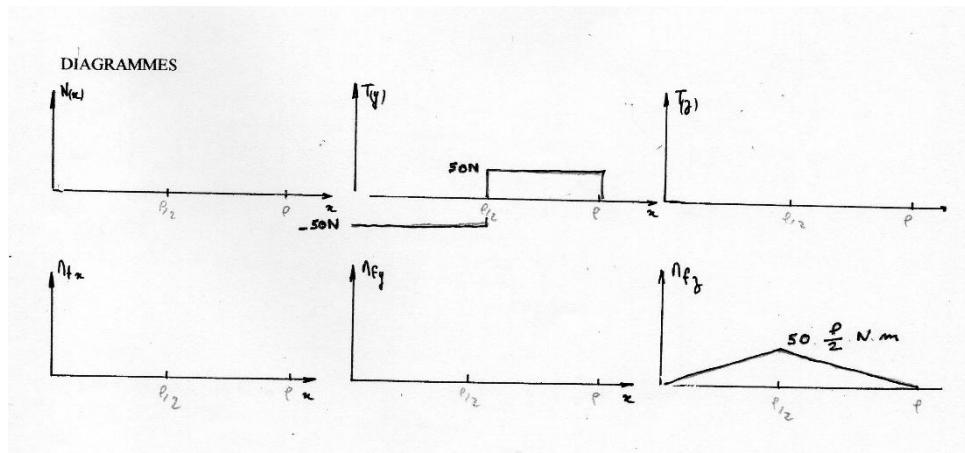
Torseur de cohésion

Pour  $x \in [A ; E]$

$$[Action II \rightarrow I]_G = [Action ext \rightarrow II]_G = \begin{cases} -50N.\vec{y} \\ 50x N.m \vec{z} \end{cases}$$

Pour  $x \in [E ; B]$

$$[Action II \rightarrow I]_G = [Action ext \rightarrow II]_G = \begin{cases} 50N.\vec{y} \\ 50(L-x) N.m \vec{z} \end{cases}$$



### 14.3.2 Exercice. Poutre isostatique

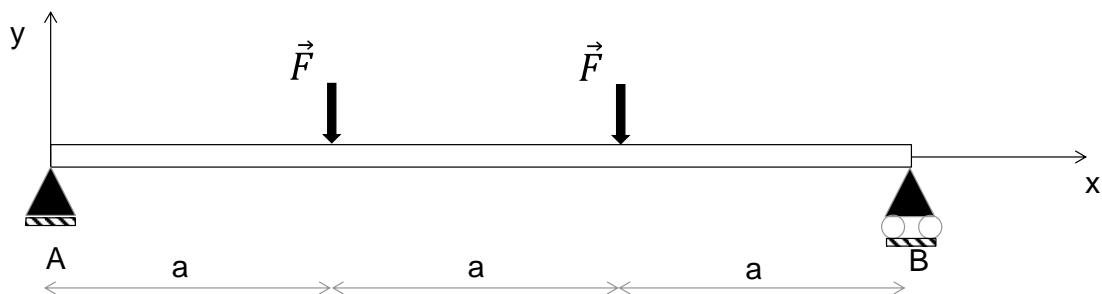
Soit la poutre ci-dessous.

$$\vec{F} = -1000N \cdot \vec{y}$$

$$a=1m$$

Remarque : attention au schéma, le point A est aussi bloqué en X

1. Déterminer les efforts et moments en A et B
2. Déterminer le torseur de cohésion le long de la poutre
3. Construire les diagrammes des efforts et moments



Correction

#### 1/ PFS

En X :  $X_a=0$

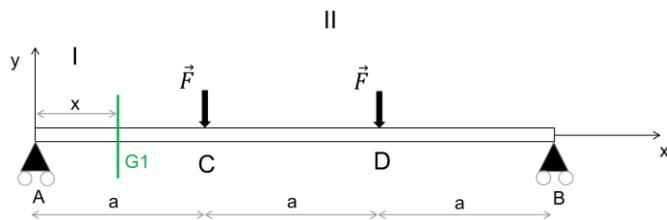
En Y :  $Y_a - 2F + Y_b = 0$

Par symétrie du problème (géométrie, appuis et efforts) :  $Y_a=Y_b$  donc  $Y_a=F$  et  $Y_b=F$

Pas de moment en A et B (appuis)

#### 2/ Déterminer le torseur de cohésion le long de la poutre

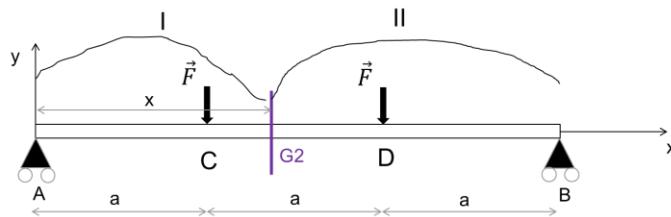
- Pour une section d'abscisse x entre 0 et a, en  $G_1$



Torseur de cohésion : [Actions II → I] = [Actions extérieures → II]

$$\boxed{\begin{cases} M_f : \overrightarrow{G_1C} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{G_1D} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{G_1B} \wedge Y_b \vec{y} = (a - x) \vec{x} \wedge (-1000 \vec{y}) + (2a - x) \vec{x} \wedge (-1000 \vec{y}) + (3a - x) \vec{x} \wedge 1000 \vec{y} \\ G_1 \begin{cases} \vec{R} = -1000N \cdot \vec{y} \\ \vec{M} = 1000 \cdot x \cdot \vec{z} \end{cases} \end{cases}}$$

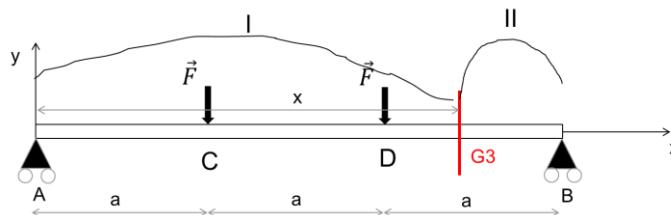
- Pour une section d'abscisse x entre a et 2a, en  $G_2$



$$\boxed{\begin{cases} \text{Résultante : } 0 \\ G_2 \text{ Moment fléchissant } M_f \text{ (suivant z)} = 1000 \cdot a \cdot \vec{z} \end{cases}}$$

- Pour une section d'abscisse x entre 2a et 3a, en  $G_3$

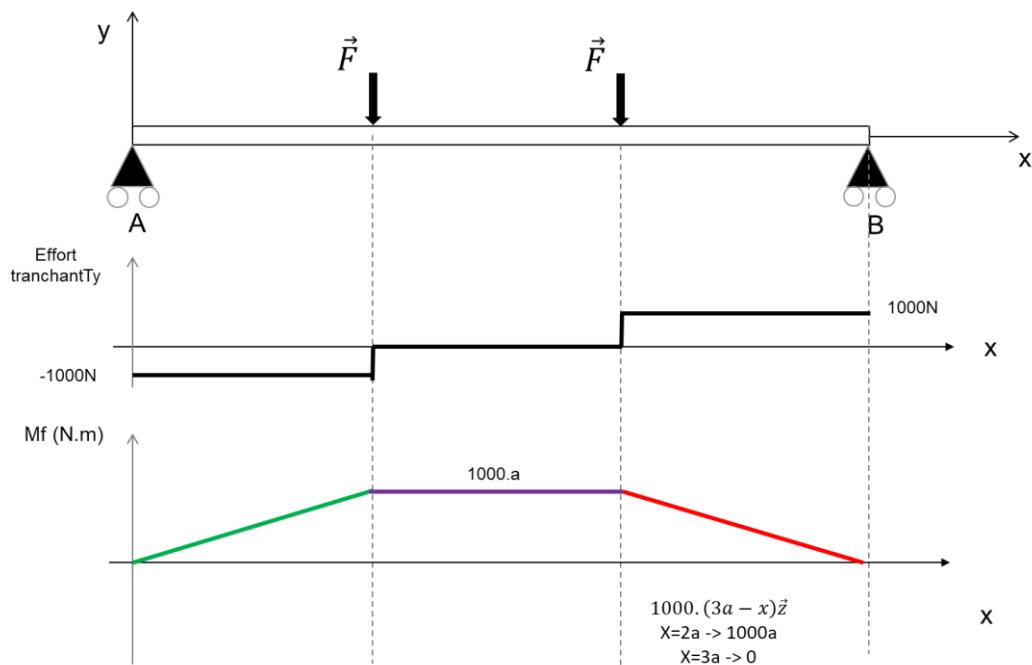
$$\boxed{\begin{cases} \vec{R} = 1000N \vec{y} \\ G_2 \vec{M} = 1000 \cdot (3a - x) \vec{z} \end{cases}}$$



3/ On parle de flexion 4 points : 2 points d'appui et deux forces.

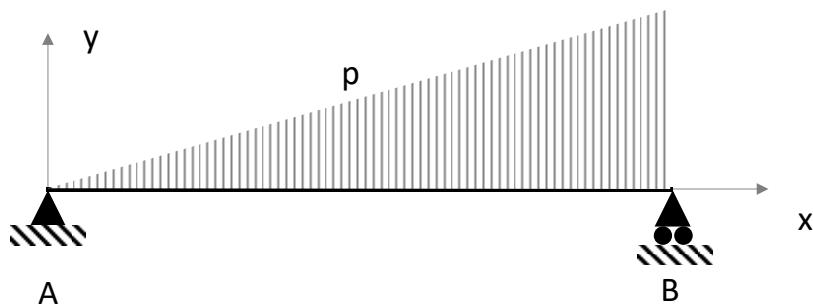
Effort normal : N=0 sur toute la poutre.

La flexion 4 points permet d'obtenir un état de flexion pure : entre les deux efforts, on a qu'un moment fléchissant et pas d'effort tranchant. On utilise souvent ce genre de montage pour solliciter des éprouvettes en flexion pure (assemblages soudés.....)



### 14.3.3 Exercice. Poutre sur deux appuis, charge linéaire croissante

Soit une poutre de longueur L et d'axe x, sur deux appuis A (appui) et B (appui glissant). Cette poutre est soumise à une charge linéaire croissante  $p$  telle que l'effort total induit par cette charge sur la poutre soit  $P$ .



1/ On appelle  $a$  le coefficient directeur de la charge linéaire. Par définition,

$$p(x) = a \cdot \frac{x}{L}$$

Montrer que

$$p(x) = \frac{2Px}{L^2}$$

2/ Calculer les réactions aux appuis A et B

3/ Calculer les efforts internes dans toute section de la poutre (effort normal, effort tranchant, moment fléchissant). On déterminera en particulier en quelle section le moment fléchissant est maximal et que vaut le moment fléchissant maximal.

## Correction

1/ Soit  $a$  le coefficient directeur de la charge linéique  $p(x)$ . Par définition,

$$P = \int_0^L p(x)dx = \int_0^L a \cdot \frac{x}{L} dx$$

Donc

$$P = \frac{aL}{2}$$

Donc

$$a = \frac{PL}{2}$$

Donc

$$p(x) = \frac{2Px}{L^2}$$

2/ PFS. Somme des forces :  $X_A = 0$  et  $Y_A + Y_B - P = 0$

Moment M dû à la charge linéique

$$M = \int_0^L x \cdot p(x)dx = \frac{2PL}{3}$$

Donc somme des moments en A :

$$-\frac{2PL}{3} + Y_B \cdot L = 0$$

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_B = \frac{2P}{3} \\ Y_A = \frac{P}{3} \end{cases}$$

3/ Efforts internes. Pour tout  $x$  le long de la poutre :

Effort normal

$$N(x) = 0$$

Effort tranchant

$$V(x) = \frac{2P}{3} - \int_x^L \frac{2Px}{L^2} dx = \frac{2P}{3} - \frac{2P}{L^2} \cdot \left[ \frac{x^2}{2} \right]_x^L = \frac{2P}{3} - \frac{P}{L^2} \cdot (L^2 - x^2)$$

$$V(x) = -\frac{P}{3} + \frac{Px^2}{L^2}$$

Moment fléchissant

Dans une section d'abscisse  $a$  le long de la poutre, le moment fléchissant a pour expression :

$$M = Y_B(L - a) - \int_a^L (x - a) \cdot \frac{2Px}{L^2} dx = \frac{Pa}{3} - \frac{Pa^3}{3L^2}$$

Donc dans une section d'abscisse  $x$ ,

$$M = \frac{Px}{3} - \frac{Px^3}{3L^2}$$

Remarque : on a bien

$$\frac{dM(x)}{dx} = \frac{P}{3} - \frac{Px^2}{L^2} = -V(x)$$

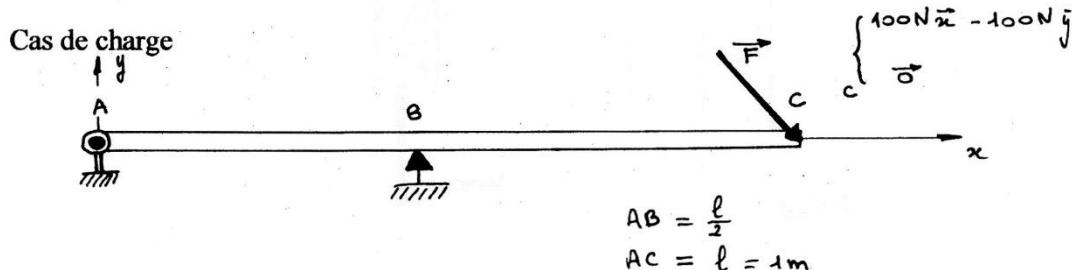
Le moment fléchissant est maximal lorsque  $V(x)$  est nul :

$$V(x) = -\frac{P}{3} + \frac{Px^2}{L^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot L$$

$$M_{max} = \frac{2\sqrt{3}}{27} PL \approx 0,1283 \cdot PL$$

#### 14.3.4 Exercice : Diagramme des efforts et moments, effort dévié

Calculer l'expression du torseur de cohésion le long de la poutre et tracer les diagrammes des efforts internes.



Correction

PFS

$$X_A = -100N$$

$$Y_A = -100N$$

$$Y_B = 200N$$

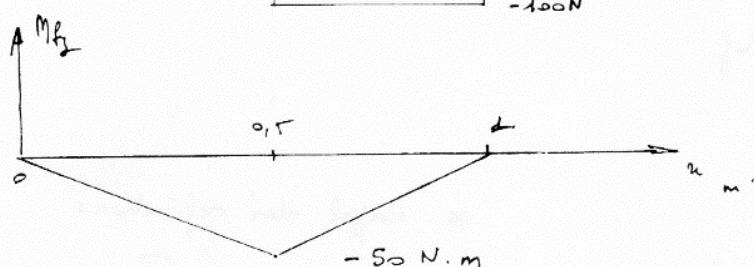
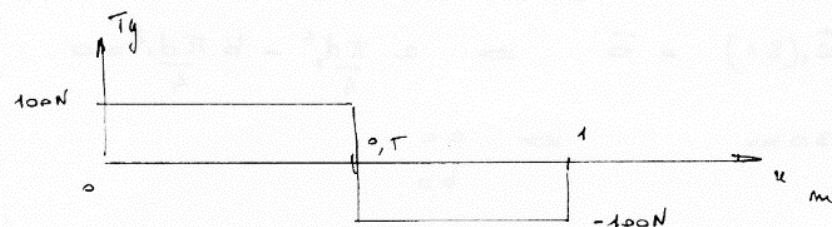
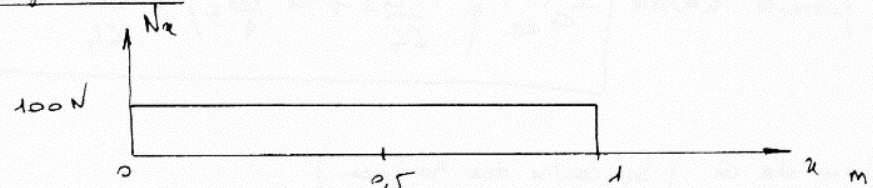
Entre A et B

$$\boxed{G} \begin{cases} 100N\vec{x} + 100N\vec{y} \\ -100 \times x \cdot \vec{z} \end{cases}$$

Entre B et C

$$\boxed{G} \begin{cases} 100N\vec{x} - 100N\vec{y} \\ -100 \times (1-x) \cdot \vec{z} \end{cases}$$

Diagrammes



Torseur de cohésion

\* Rappel des définitions

\* Point de coupe : paramétrage

On isole la poutre : calcul des actions extérieures

(#) Problème plan, poids négligé

bilan des actions :

- [ext → poutre] A liaison pivot :  $\begin{cases} \vec{R}_A = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} \\ \vec{n}_A = \vec{0} \end{cases}$
- [ext → poutre] B poutrelle :  $\begin{cases} \vec{R}_B = \vec{y}_B \\ \vec{n}_B = \vec{0} \end{cases}$
- [F → poutre] C :  $\begin{cases} 100 N \vec{i} - 100 N \vec{j} \\ \vec{o} \end{cases}$

PF's Théorème résultante :  $\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_A = -100 N \\ y_A = -100 N \end{cases}$

Théorème moment :  $\vec{AB} \wedge \vec{R}_B + \vec{AC} \wedge \vec{F} + \vec{AA} \wedge \vec{R}_A = \vec{0} \Rightarrow y_B = +200 N$

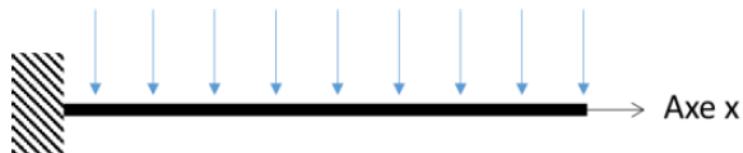
Calcul Torseurs de cohésion :

$x \in AB$ on isole (I) Torseur cohésion : $-[Ext \rightarrow I]$	$x \in BC$ on isole II Torseur de cohésion : $+[Ext \rightarrow II]$
--	---

### 14.3.5 Exercice. Moment fléchissant dû à une charge linéique constante

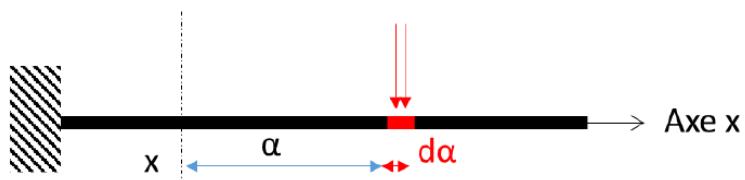
Soit la poutre ci-dessous d'axe x, soumise à une charge linéique q constante (N/m) tout le long de la poutre.

Déterminer le moment fléchissant dû à cette charge linéique.



Correction

Dans la section d'abscisse x, la force  $q.d\alpha$  à la distance  $\alpha$  de la section x exerce le moment  $-\alpha.q.d\alpha$ .

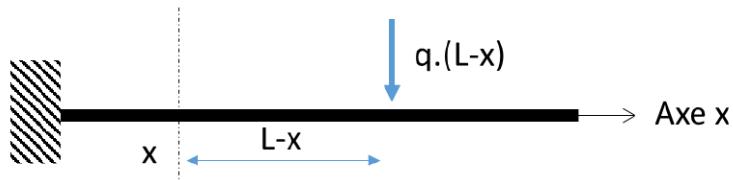


Il faut maintenant sommer (intégrer) l'ensemble entre 0 et  $L-x$

$$M = \int_0^{L-x} -\alpha \cdot q \cdot d\alpha = \left[ -q \cdot \frac{\alpha^2}{2} \right]_0^{L-x}$$

$$M(x) = -q \cdot \frac{(L-x)^2}{2}$$

Ce moment correspond à l'application d'une charge ponctuelle d'intensité  $q \cdot (L-x)$  appliquée à la distance  $(L-x)/2$  de la section d'abscisse  $x$ .



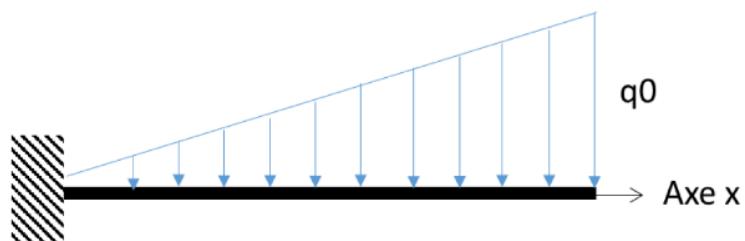
#### 14.3.6 Exercice. Moment fléchissant dû à une charge linéique non constante

Soit la poutre ci-dessous d'axe x, soumise à une charge linéique  $q$  (N/m) tout le long de la poutre telle que :

$$q = q_0 \cdot \frac{x}{L}$$

Avec  $q_0$  constante.

Déterminer le moment fléchissant dû à cette charge linéique.



#### Correction

Dans une section d'abscisse  $x$ , calculons le moment fléchissant dû à la charge en  $x+\alpha$ .

La charge linéique vaut dans la section d'abscisse  $x+\alpha$  :

$$q_0 \cdot \frac{x + \alpha}{L}$$

Appliquée sur la distance  $d\alpha$ , la force obtenue est  $q_0 \cdot \frac{x+\alpha}{L} \cdot d\alpha$

Cette force applique un moment  $dM$  à la section d'abscisse  $x$  avec le bras de levier  $\alpha$  tel que :

$$dM = -\alpha \cdot q_0 \cdot \frac{x+\alpha}{L} \cdot d\alpha$$

Le moment fléchissant total est donc

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{L-x} -\alpha \cdot q_0 \cdot \frac{x+\alpha}{L} \cdot d\alpha \\ M &= \frac{q_0}{L} \cdot (L-x)^2 \cdot \left( -\frac{x}{2} - \frac{L-x}{3} \right) \end{aligned}$$

Remarques

Pour  $x=0$ ,  $M = -\frac{q_0}{3} \cdot L^2$  on retrouve l'application d'une force d'intensité  $\frac{q_0 L}{2}$  (aire du triangle), exercée au centre de gravité du triangle, soit en  $x = \frac{2}{3}L$

Pour  $x=L$ , on a bien  $M=0$ .

#### 14.3.7 Exercice : moment fléchissant, poutre sur deux appuis, charge linéique variable

Soit une dalle ABCD en béton armé telle que ci-dessous [15].

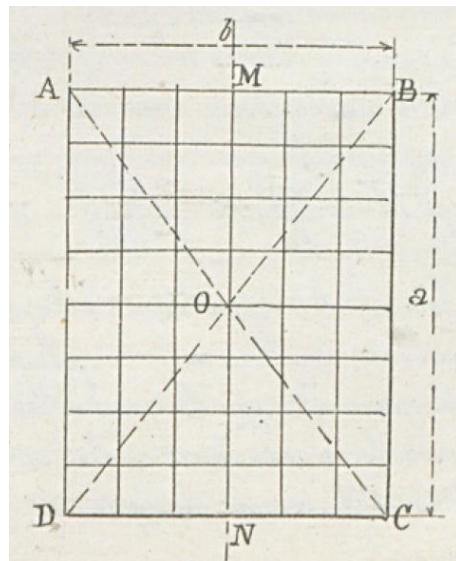
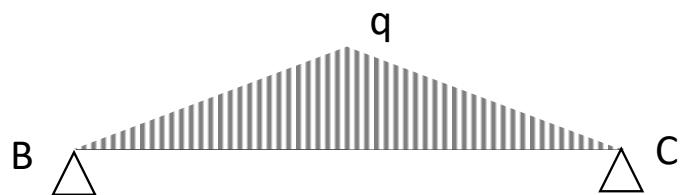


Figure 64. Dalle ABCD [15]

On propose de calculer le moment fléchissant maximal dans la poutre BC. On suppose que la poutre BC reprend la partie de la charge correspondant au triangle BOC. On peut ainsi modéliser la poutre BC comme une poutre sur deux appuis, soumise à une charge  $q$  linéique croissante entre B et le centre de la poutre et décroissante entre le centre de la poutre et C.



1/ Déterminer le moment fléchissant maximal dans la poutre

Correction

En un point d'abscisse  $x$  compris entre  $x = 0$  et  $x = \frac{L}{2}$ , le moment fléchissant a pour expression :

$$M(x) = \frac{qL}{4} \cdot x - \frac{x}{3} \cdot \frac{qx}{2}$$

Le moment fléchissant est maximal en  $L/2$

$$\begin{aligned} M_{max} &= M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{qL}{4} \cdot \frac{L}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{qL}{2} = \frac{qL^2}{8} - \frac{qL^2}{24} \\ M_{max} &= \frac{qL^2}{12} \end{aligned}$$

Loi de comportement d'une poutre en flexion

#### 14.3.8 Exercice. Flèche d'une poutre sollicitée en flexion

Soit une poutre longueur L section constante S sur toute sa longueur, encastrée à une extrémité et soumise à un effort P à l'autre extrémité.



Dans une section d'abscisse  $x$  (axe de la poutre), la relation entre le moment fléchissant  $M_f(x)$  et la dérivée seconde de la flèche  $y''(x)$  est donnée par

$$M_f(x) = EI \cdot y''(x)$$

Q1/ En déduire la flèche en bout de poutre induite par l'effort P.

Q2/ Reprendre l'exercice pour la flèche d'une poutre soumise à un effort réparti q en N/m tout le long de la poutre



Correction

$$Mf(x) = EI \cdot y''(x)$$

Moment fléchissant dans une section x

$$Mf(x) = -P \cdot (L - x)$$

$$y'' = \frac{Mf}{EI} = \frac{-P}{EI} \cdot (L - x)$$

$$y' = \frac{-P}{EI} \cdot \left( L \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) + A$$

$$y(x) = \frac{-P}{EI} \cdot \left( L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right) + Ax + B$$

Conditions aux limites : encastrement en x=0

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Donc

$$A = 0$$

$$B = 0$$

Donc

$$y(x) = \frac{-P}{EI} \cdot \left( L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right)$$

En x=L,

$$y(L) = \frac{-P}{EI} \cdot \left( \frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{6} \right)$$

$$y(L) = \frac{-PL^3}{3EI}$$

Q2/ Dans la section X, on sait que le moment revient à un effort de valeur q.(L-x), appliquée entre X et L donc à l'abscisse (X+L)/2 donc

$$Mf(X) = -q \cdot (L - X) \cdot \frac{L - X}{2} = -\frac{q}{2} \cdot (L^2 - 2XL + X^2)$$

$$y'' = \frac{Mf}{EI} = \frac{-q}{2EI} \cdot (L^2 - 2XL + X^2)$$

$$y' = \frac{-q}{2EI} \cdot \left( L^2 \cdot X - LX^2 + \frac{X^3}{3} \right) + A$$

$$y = \frac{-q}{2EI} \cdot \left( L^2 \cdot \frac{X^2}{2} - L \frac{X^3}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{X^4}{4} \right) + AX + B$$

Conditions aux limites : encastrement en X=0

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Donc A=0 et B=0

$$y = \frac{-q}{2EI} \cdot \left( L^2 \cdot \frac{X^2}{2} - L \frac{X^3}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{X^4}{4} \right)$$

En X=L

$$y = \frac{-q}{2EI} \cdot \left( L^2 \cdot \frac{L^2}{2} - L \frac{L^3}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{L^4}{4} \right)$$

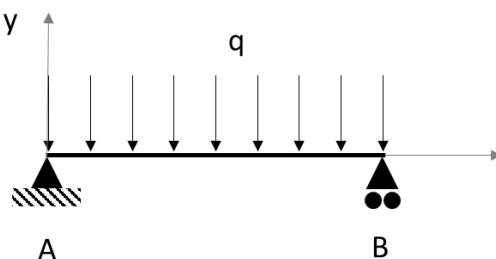
$$y = \frac{-q \cdot L^4}{2EI} \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right) = \frac{-q \cdot L^4}{2EI} \cdot \left( \frac{6 - 4 + 1}{12} \right) = \frac{-q \cdot L^4}{2EI} \cdot \frac{3}{12}$$

$$y(L) = \frac{-q \cdot L^4}{8EI}$$

#### 14.3.9 Exercice. Flèche d'une poutre isostatique en flexion sur deux appuis, charge concentrée

Soit une poutre de longueur L, axe x, module d'Young E, moment quadratique I, soumise à une charge linéaire q orientée suivant -y.

Déterminer l'équation de la déformée y(x) le long de la poutre.



Correction

Principe fondamental de la statique

$$R_{yB} = R_{yA} = q \cdot \frac{L}{2}$$

$$Mf = EIy''$$

$$Mf = \frac{qL}{2} \cdot (L-x) - q \cdot (L-x) \cdot \frac{L-x}{2}$$

Donc

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{Mf}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{q}{2} (L \cdot (L-x) - (L-x)^2) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{q}{2} (L^2 - xL - (L^2 - 2xL + x^2)) \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{q}{2} (xL - x^2) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} y' &= \frac{q}{2EI} \cdot \left( L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + A \\ y &= \frac{q}{2EI} \cdot \left( L \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{1}{12} \cdot x^4 \right) + Ax + B \end{aligned}$$

$y(0) = 0$  donc  $B=0$ . De plus  $y(L) = 0$  donc

$$y = \frac{q}{2EI} \cdot \left( \frac{L^4}{6} - \frac{1}{12} L^4 \right) + AL = 0$$

Donc

$$A = -\frac{q \cdot L^3}{2EI} \cdot \frac{1}{12}$$

Donc

$$y = \frac{q}{2EI} \cdot \left( L \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{1}{12} \cdot x^4 \right) - \frac{q \cdot L^3}{2EI} \cdot \frac{1}{12} x$$

Pour  $x=L/2$

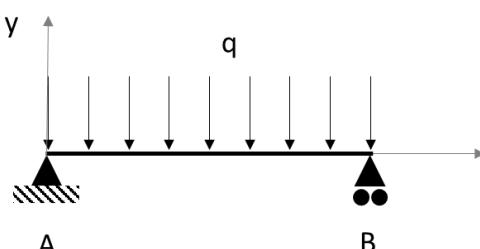
$$\begin{aligned} y &= \frac{q}{2EI} \left( \frac{L^4}{6 \cdot 8} - \frac{1}{12} \cdot \frac{L^4}{16} \right) - \frac{q \cdot L^3}{2EI} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{L}{2} \\ y &= \frac{q}{2EI} \cdot L^4 \cdot \left( \frac{1}{48} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{24} \right) = \frac{q}{EI} \cdot L^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{8}{384} - \frac{2}{384} - \frac{16}{384} \right) = \frac{q}{EI} \cdot L^4 \cdot \frac{-5}{384} \end{aligned}$$

$$y = \frac{-5}{384} \frac{q \cdot L^4}{EI}$$

#### 14.3.10 Exercice. Flèche d'une poutre en flexion sur deux appuis, charge concentrée

Soit une poutre de longueur  $L$ , axe  $x$ , module d'Young  $E$ , moment quadratique  $I$ , soumise à une charge linéaire  $q$  orientée suivant  $-y$ .

1/ Déterminer l'équation de la déformée  $y(x)$  le long de la poutre.



2/ La poutre est en acier. La section est pleine et carrée. Déterminer le côté a de la section pour que la flèche ne dépasse pas 1/500<sup>ème</sup> de la longueur L.

3/ On souhaite utiliser une poutre rectangulaire de largeur b en z, hauteur h en y. Tracer h et y en fonction de la masse de la poutre, dans le respect du critère sur la flèche. Quelles valeurs pour b et h peut-on proposer pour diviser la masse de la poutre dimensionnée en question 1 ?

4/ Quelle modification supplémentaire de la conception pourrions-nous opérer pour encore diminuer la masse de la structure ?

Données :

- Module d'Young E=210 000 MPa
- Masse volumique acier 7800 kg/m<sup>3</sup>
- Longueur L=5m
- $q = 2 \text{ kN/m}$

#### 14.3.10.1 Correction

1/ Principe fondamental de la statique

$$R_{yB} = R_{yA} = q \cdot \frac{L}{2}$$

$$Mf = EIy''$$

$$Mf = \frac{qL}{2} \cdot (L - x) - q \cdot (L - x) \cdot \frac{L - x}{2}$$

Donc

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{Mf}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{q}{2} (L \cdot (L - x) - (L - x)^2) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{q}{2} (L^2 - xL - (L^2 - 2xL + x^2)) \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{q}{2} (xL - x^2) \\ y' &= \frac{q}{2EI} \cdot \left( L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + A \\ y &= \frac{q}{2EI} \cdot \left( L \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{1}{12} \cdot x^4 \right) + Ax + B \end{aligned}$$

$y(0) = 0$  donc  $B=0$ . De plus  $y(L) = 0$  donc

$$y = \frac{q}{2EI} \cdot \left( \frac{L^4}{6} - \frac{1}{12} L^4 \right) + AL = 0 \Rightarrow A = -\frac{q \cdot L^3}{2EI} \cdot \frac{1}{12}$$

Donc

$$y = \frac{q}{2EI} \cdot \left( L \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{1}{12} \cdot x^4 \right) - \frac{q \cdot L^3}{2EI} \cdot \frac{1}{12} x$$

Pour  $x=L/2$

$$y = \frac{q}{2EI} \left( \frac{L^4}{6*8} - \frac{1}{12} \cdot \frac{L^4}{16} \right) - \frac{q \cdot L^3}{2EI} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{L}{2}$$

$$y = \frac{q}{2EI} \cdot L^4 \cdot \left( \frac{1}{48} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{24} \right) = \frac{q}{EI} \cdot L^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{8}{384} - \frac{2}{384} - \frac{16}{384} \right) = \frac{q}{EI} \cdot L^4 \cdot \frac{-5}{384}$$

$$y_{max} = \frac{-5}{384} \frac{q \cdot L^4}{EI}$$

2/ Si l'on veut  $|y_{max}| = \frac{L}{500}$  alors

$$\frac{5q \cdot L^4}{384E \cdot \frac{a^4}{12}} = \frac{L}{500}$$

$$\frac{5q \cdot L^3}{32E \cdot a^4} = \frac{1}{500}$$

$$32E \cdot a^4 = 2500qL^3$$

$$a = \sqrt[4]{\frac{2500qL^3}{32E}}$$

$$a = 9,82cm$$

Masse

$$m = \rho a^2 L$$

3/ Soit une section de largeur b suivant z, hauteur h.

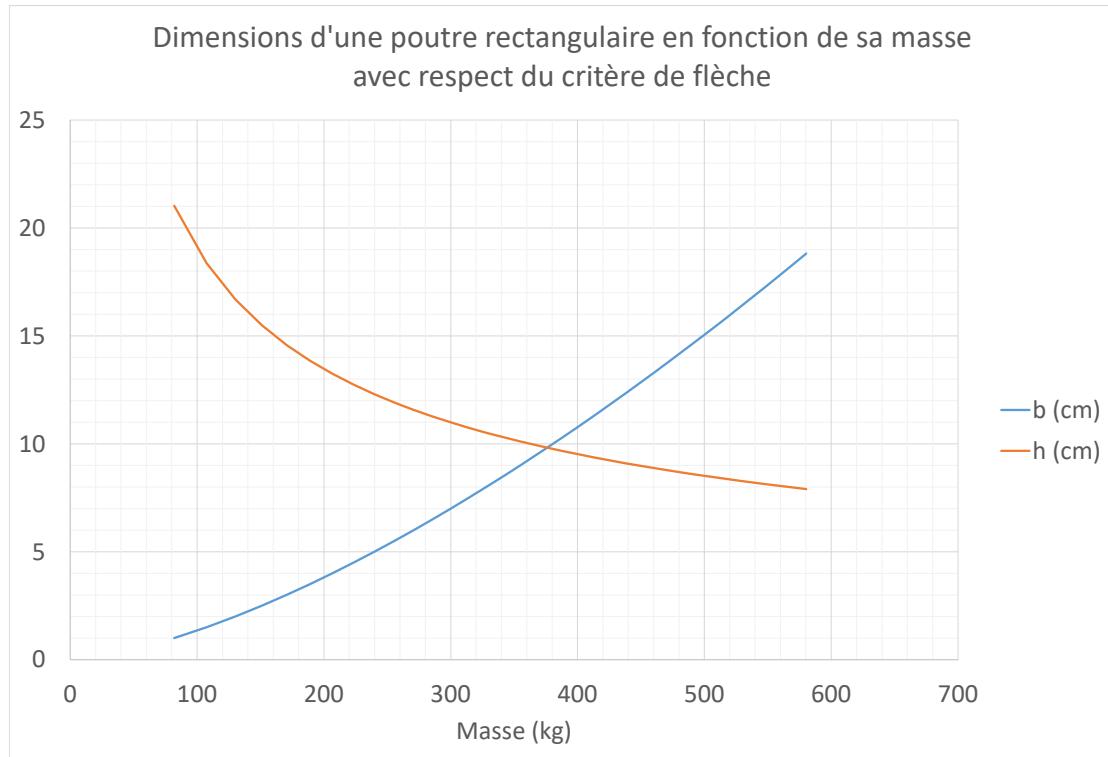
$$I_{Gz} = b \cdot \frac{h^3}{12}$$

On veut le même moment quadratique pour respecter le critère de la flèche

$$b \cdot \frac{h^3}{12} = \frac{a^4}{12} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{a^4}{b}}$$

$$m = \rho b h L = \rho b \cdot \sqrt[3]{\frac{a^4}{b}} \cdot L$$

On a tracé ci-dessous b en fonction de la masse m.



4/ Poutre creuse

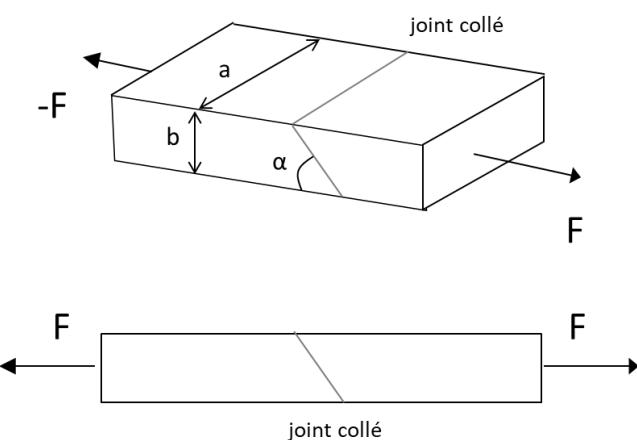
## 14.4 Estimation des contraintes

### 14.4.1 Exercice : traction et cisaillement d'un joint collé

Soient deux poutres en bois de section rectangulaire, collées comme le montre la figure ci-dessous. Un effort de traction  $F=400$  daN est appliqué.

On donne  $a=120\text{mm}$  ;  $b=80\text{mm}$  ;  $\alpha=65^\circ$

Calculer la contrainte normale et la contrainte tangentielle dans le joint collé



## Correction

Soient  $F_n$  l'effort normal sur le joint collé et  $F_t$  l'effort de cisaillement

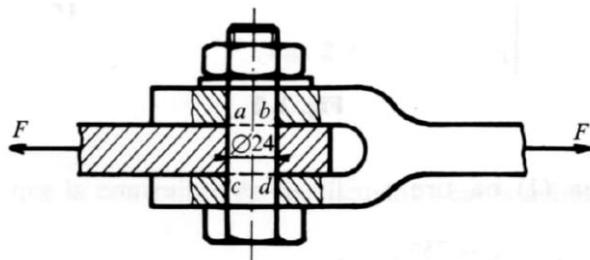
On a :  $\cos \alpha = F_t / F$  ;  $\sin \alpha = F_n / F$

La section considérée est  $S = a.b / \sin \alpha$

Contrainte normale :  $F_n/S = 0.342 \text{ MPa}$  ; contrainte tangentielle  $F_t/S = 0.160 \text{ MPa}$

#### 14.4.2 Exercice : cisaillement d'un assemblage vissé [16]

Déterminer la contrainte de cisaillement dans la vis ci-dessous pour  $F = 8.10^4 \text{ N}$ .



##### 14.4.2.1 Correction

Dans la chaque partie de la pièce en Y, passe l'effort  $F/2$ . Les deux sections ab et cd subissent chacune un effort de cisaillement de valeur  $F/2$ .

$$\tau = \frac{F/2}{S} = \frac{F/2}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{80000}{2 \cdot \pi \cdot \frac{24^2}{4}} \approx 89 \text{ MPa}$$

#### 14.4.3 Exercice. Equilibre des forces dans une section soumise à un moment

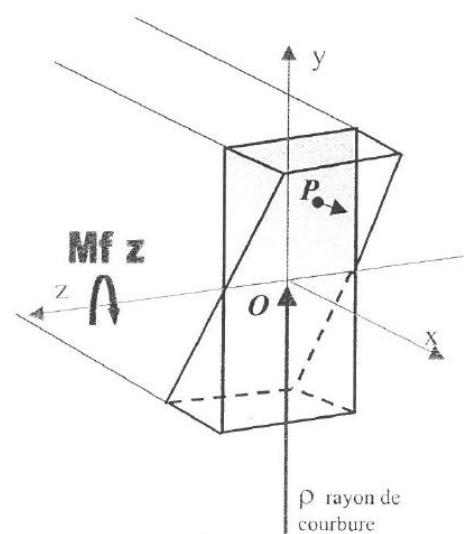
Soit une poutre de section S, module d'Young E, soumise à un moment fléchissant  $M_f$ ,

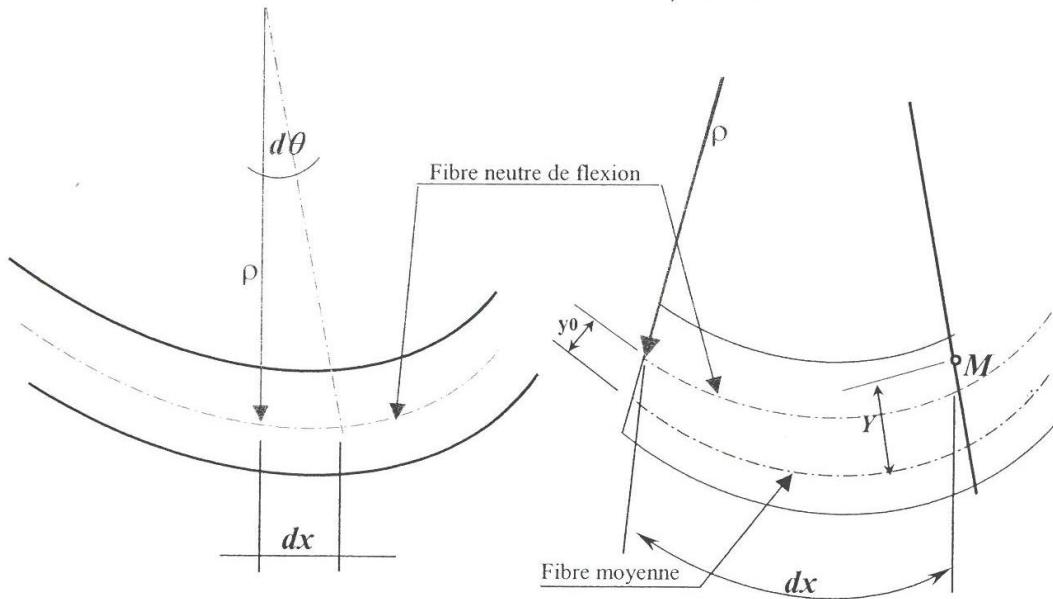
Apports théoriques : un peu de géométrie

Hypothèse de Bernoulli : les sections droites restent planes après déformation.

Soit  $\rho$  le rayon de courbure de la fibre neutre de flexion, alors

$$\rho \cdot d\theta = dx$$





La fibre neutre ne s'allonge pas  $\Rightarrow \rho \cdot d\theta = dx$  = longueur d'un élément de volume

Rayon de courbure au point M :  $= (\rho + y_0 - Y)$

Allongement unitaire  $\Delta l$  de la fibre au point M de cote Y :  $= (\rho + y_0 - Y)d\theta - \rho d\theta = \Delta l$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{(\rho + y_0 - Y)d\theta}{dx} = \frac{(\rho + y_0 - Y)}{\rho}$$

On suppose que la fibre moyenne et la fibre neutre de flexion sont confondues, alors  $y_0 = 0$  et

$$\varepsilon_{xx} = \frac{-y}{\rho}$$

De plus on a

$$y''x) = \frac{1}{\rho}$$

Questions

Le moment fléchissant est donné par

$$M_f = \iint_S (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{T}) dS$$

Avec

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma_{xx}$  contrainte normale dans la section, au point P.

Q1/ Calculer  $\overrightarrow{OP} \wedge \vec{T}$

Q2/ En déduire que

$$M_{fz} = \iint_S z \cdot \sigma_{xx} \cdot dS \cdot \vec{y} - \iint_S y \cdot \sigma_{xx} \cdot dS \cdot \vec{z}$$

La loi de Hooke, en négligeant les autres contraintes, donne

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx}$$

De plus, les axes z et y étant axes principaux d'inertie, on a

$$\begin{aligned} \iint_S zy dS &= 0 \\ \iint_S y^2 dS &= Iz \end{aligned}$$

Q3/ En déduire l'expression de Mf en fonction de E, Iz et y" (modifier l'expression de  $\sigma_{xx}$  dans l'expression de Mf obtenue en Q2)

Q4/ En déduire l'expression de  $\sigma_{xx}(y)$  en fonction de Mf, Iz et y

#### 14.4.3.1 Correction

$$\overrightarrow{OP} \wedge \vec{T} = \begin{vmatrix} 0 & \vec{x} \\ z \times \sigma_{xx} & \vec{y} \\ -y \times \sigma_{xx} & \vec{z} \end{vmatrix}$$

$$Mf_z = \iint z \sigma_{xx} dS \vec{y} - \iint y \sigma_{xx} dS \vec{z}$$

et  $\sigma_{xx} = -\frac{E \times y}{\rho}$  avec y point courant de la section droite.

$$Mf_z = - \iint zy \frac{E}{\rho} dS \vec{y} + \iint y^2 \frac{E}{\rho} dS \vec{z}$$

z et y étant les axes principaux d'inertie

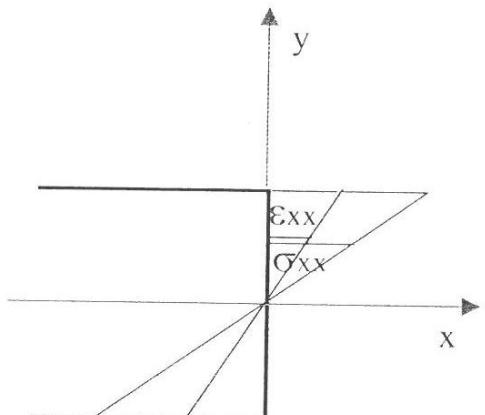
$$\iint zy dS = 0 \quad \text{et} \quad \iint y^2 dS = I_z$$

$$Mf_z = \frac{E}{\rho} I_z y'' \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\rho} = Y''$$

$$Mf_z = EI_z y'' \quad y'' = \frac{Mf_z}{EI_z}$$

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = -\frac{Ey}{\rho}$$

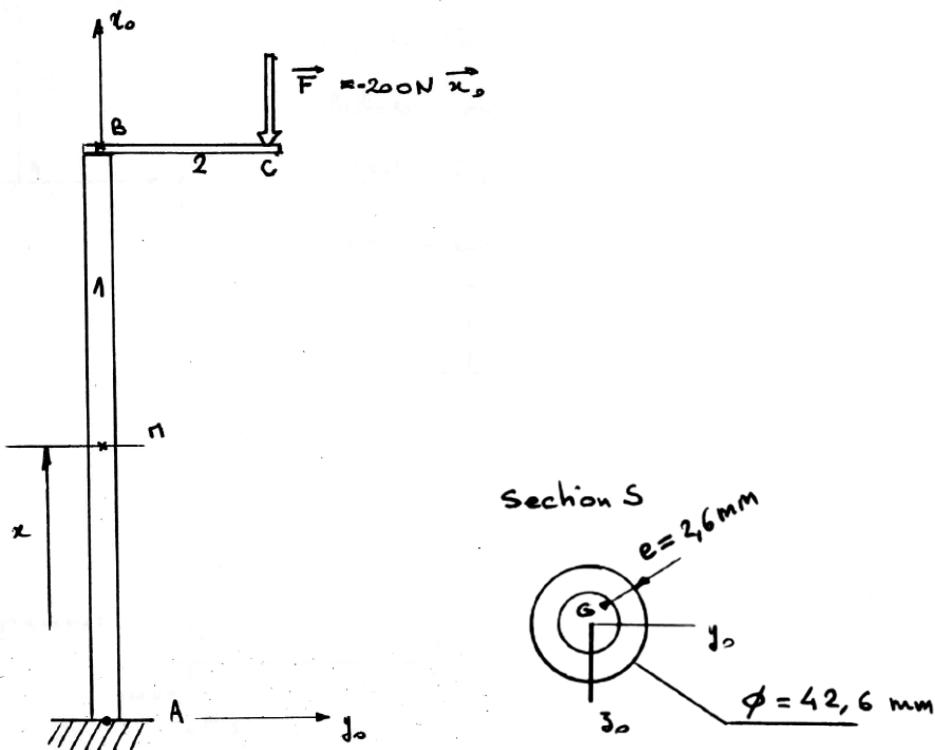
$$\varepsilon_{xx} = -\frac{y}{\rho} = -yy'' = -y \frac{Mf_z}{EI_z}$$



avec y point courant de la section  
et y'' dérivée seconde de l'équation de la déformée

$$\sigma_{xx} = -\frac{Mf_z}{I_z} y$$

#### 14.4.4 Exercice : poutre creuse



AB=1m ; BC=0,5m. On néglige le poids propre de la poutre.

##### Questions

1. Au point M tel que  $\overrightarrow{AM} = x \cdot \vec{x}_0$ , écrire le torseur de cohésion dans la section
2. En déduire les différents diagrammes le long de la poutre (entre A et B)
3. Tracer, dans une section, les contraintes dues uniquement aux efforts normaux
4. Tracer et calculer, dans la section la plus sollicitée, les contraintes dues au moment fléchissant, calculer la contrainte maximale de flexion dans une section

##### Correction

1/ Coupure : la partie I de la poutre est la partie AM. La partie II est la partie MBC.

Soit  $[Actions\ II \rightarrow I]_M$  le torseur de cohésion au point M (torseur des efforts internes), donc dans la section d'abscisse x.

En appliquant le PFS sur la partie II, on obtient :

$$[Actions\ II \rightarrow I]_M = [Actions\ ext \rightarrow II]_M$$

Les seules actions extérieures sont la force en C. Son torseur en C a pour expression :

$$[Actions\ \vec{F}]_C = \begin{cases} \vec{F} = -200N \cdot \vec{x}_0 \\ \overrightarrow{M_C} = \vec{0} \end{cases}$$

On déplace ce torseur en M

$$[Actions \vec{F}]_M = \begin{cases} \vec{F} = -200N \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{M}_M = \vec{MC} \wedge \vec{F} \end{cases}$$

$$\vec{MC} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100Nm \end{pmatrix}$$

Le torseur de cohésion dans une section d'abscisse x a pour expression :

$$[Actions II \rightarrow I]_M = \begin{cases} \vec{F} = -200N \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{M}_M = 100Nm \vec{z}_0 \end{cases}$$

2/ Le diagramme des efforts tranchants est nul.

L'effort normal est constant et a pour valeur -200 N.

Le moment fléchissant est constant et a pour valeur 100 Nm.

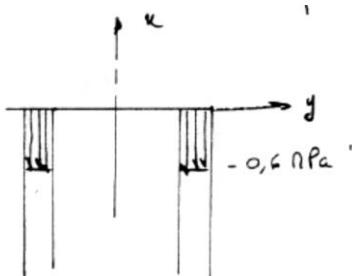
3/ la répartition des contraintes dues à l'effort normal est uniforme et en tout point :

$$\sigma_n = \frac{N_x}{S} = -\frac{200}{S}$$

$$S = \frac{\pi}{4}d_e^2 - \frac{\pi}{4}d_i^2 = 327mm^2$$

$$\sigma_n = -0.6 MPa$$

Les contraintes dues aux efforts normaux ont donc le profil ci-dessous



4/ Contraintes dues au moment fléchissant dans la section la plus sollicitée

Le moment fléchissant et l'effort normal sont constants donc toute section subit la même sollicitation.

$$\sigma_{flexion} = -\frac{M_{fz} \cdot y}{I_z}$$

$$I_z = \frac{\pi}{64} \cdot (d_e^4 - d_i^4) = 65621 mm^4$$

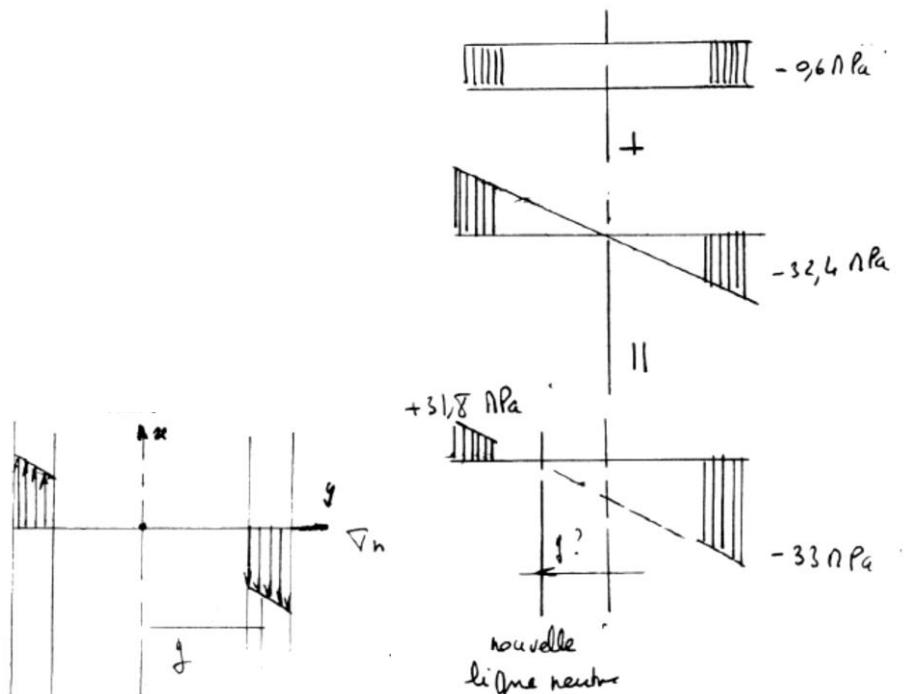
$$\sigma_{flexion} = -1,52 \cdot y$$

La contrainte maximale de flexion a pour valeur (pour  $y=-d/2$ )

$$\sigma_{flexion\_max} = 32.4 \text{ MPa}$$

La contrainte minimale de flexion a pour valeur (pour  $y=d/2$ )

$$\sigma_{flexion\_min} = -32.4 \text{ MPa}$$



Le profil global des contraintes est la somme des profils obtenus par traction et flexion :

$$\sigma_{maxi} = -0,6 \text{ MPa} - 32,4 \text{ MPa}$$

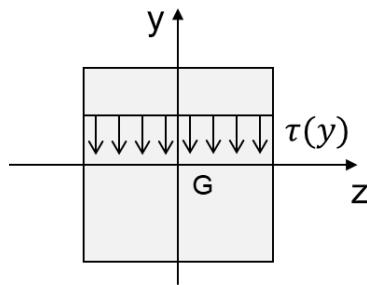
On voit un décalage de la ligne neutre. Calcul de nouvelle ligne neutre définie par  $\sigma_n = 0$

$$\frac{N_x}{S} + \frac{-M_f \cdot y}{I_{GZ}} = 0 \Rightarrow y = -0,46 \text{ mm}$$

Une poutre en acier de section carrée est encastrée dans un mur. Sa masse volumique est  $\rho$ , sa section  $S=h^2$ , longueur  $L$ .

#### 14.4.5 Exercice : Contrainte de cisaillement

Soit une section S carrée de côté a, contenue dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ .



La section est soumise à un effort tranchant  $T$  suivant l'axe  $-\vec{y}$ .

La contrainte de cisaillement en tout point d'ordonnée  $y$  est définie par

$$\tau(y) = \frac{T \cdot S_z}{I_{Gz} \cdot b(y)}$$

- $S_z$  moment statique de la section définie entre  $y = -a/2$  et  $y$ .
- $I_{Gz}$  moment quadratique de la section  $S$  par rapport à l'axe
- $b(y)$  largeur de la section en  $y$ .

Calculer la contrainte de cisaillement **moyenne** sur la section  $S$ .

### Correction

$$I_{Gz} = \int y^2 dS = \frac{a^4}{12}$$

$$\forall y \quad b(y) = a$$

$$S_z = \int_{-a/2}^y y dy dz = a \cdot \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{-a/2}^y = a \cdot \left( \frac{y^2}{2} - \frac{a^2}{8} \right)$$

Donc

$$\tau(y) = \frac{12T}{a^5} \cdot a \cdot \left( \frac{y^2}{2} - \frac{a^2}{8} \right) = \frac{12T}{a^4} \cdot \left( \frac{y^2}{2} - \frac{a^2}{8} \right)$$

Par définition, la contrainte de cisaillement moyenne a pour expression :

$$\begin{aligned} \tau_{moy} &= \frac{1}{a} \cdot \int_{-a/2}^{a/2} \tau(y) dy = \frac{1}{a} \cdot \frac{12T}{a^4} \cdot \int_{-a/2}^{a/2} \left( \frac{y^2}{2} - \frac{a^2}{8} \right) dy = \frac{12T}{a^5} \cdot \left[ \frac{y^3}{6} - \frac{a^2}{8} \cdot y \right]_{-a/2}^{a/2} \\ \tau_{moy} &= \frac{12T}{a^5} \cdot \left( \frac{a^3}{48} - \frac{a^3}{16} + \frac{a^3}{48} - \frac{a^3}{16} \right) = \frac{12T}{a^5} \cdot \frac{-2a^3}{24} \end{aligned}$$

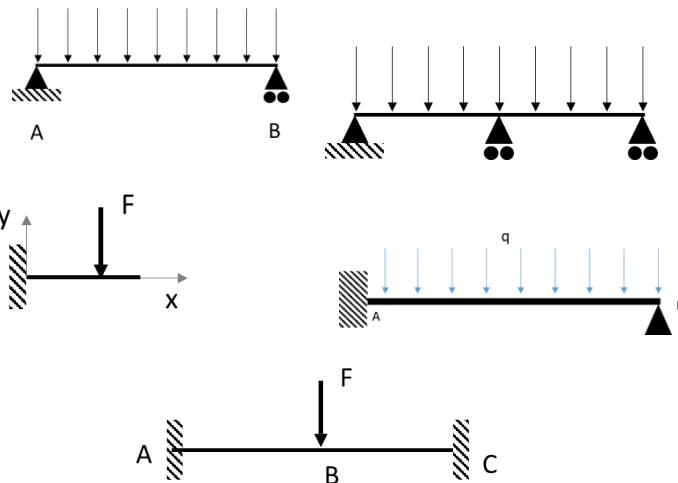
$$\boxed{\tau_{moy} = -\frac{T}{a^2}}$$

La contrainte de cisaillement moyenne est l'effort tranchant divisé par la section. C'est la contrainte obtenue lorsque l'on suppose que le champ de contrainte de cisaillement est uniforme sur la section.

## 14.5 Systèmes hyperstatiques

### 14.5.1 Exercice. Hyperstatique ?

Déterminer le degré d'hyperstaticité global, interne et externe des structures ci-dessous.



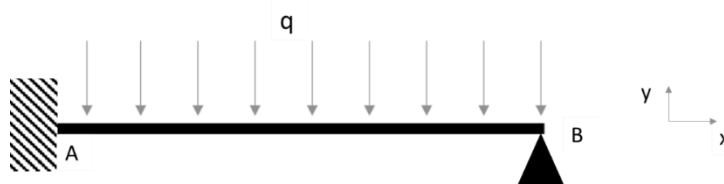
#### Correction

	de	di	dg
	$3-3=0$		0
	$2+1+1-3=1$		1
	$3-3=0$	$l_i = 0$ $b=1$ $0 - (3 \times 1 - 3) = 0$	0
	$3+2-3=2$		2
	$3+3-3=3$		3

### 14.5.2 Exercice. Poutre hyperstatique

Soit la poutre de longueur L ci-dessous encastrée en A et simplement appuyée en B.

Soient  $M_A$  le moment d'enca斯特ment en A,  $X_A$  et  $Y_A$  les réactions d'encastration en A et  $Y_B$  la réaction d'appui en B.



Q1/ Déterminer le degré d'hyperstaticité de la structure.

Q2/ A l'aide du PFS en A, montrer que

$$M_A = Y_A \cdot L - \frac{qL^2}{2}$$

Pour déterminer toutes les inconnues de liaison, on va apporter des équations supplémentaires à l'aide de considérations sur la déformée.

Q3/ Déterminer l'équation de la déformée  $y(x)$  de la poutre en fonction de  $Y_A$ ,  $q$ ,  $L$  et  $M_A$

Q4/ Que vaut la déformée  $y(x)$  en B ?

Q5/ En déduire que

$$M_A = \frac{L}{3} \cdot \left( Y_A - \frac{qL}{4} \right)$$

Q6/ En déduire que

$$Y_A = \frac{5}{8} qL$$

Q6/ En déduire  $M_A$  et  $Y_B$

Correction

Q1/ dg=1. Structure hyperstatique. Le PFS ne suffit pas.

Q2/ Somme des moments en B :

$$M_A - Y_A \cdot L + \frac{qL^2}{2} = 0$$

Q3/ Le moment fléchissant a pour expression

$$M_f = -M_A + Y_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} = EI \cdot y''(x)$$

Donc

$$EI \cdot y'(x) = -M_A \cdot x + \frac{Y_A x^2}{2} - \frac{q}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + C$$

En  $x=0$ ,  $y'(x) = 0$  (encastrement) donc  $C=0$

$$EIy(x) = -\frac{M_A}{2}x^2 + \frac{Y_A}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{q}{6} \cdot \frac{x^4}{4} + D$$

En  $x=0$ ,  $y(x) = 0$  (encastrement) donc  $D=0$

Donc

$$y(x) = \frac{1}{EI} \cdot \left( -\frac{M_A}{2}x^2 + \frac{Y_A}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{q}{6} \cdot \frac{x^4}{4} \right)$$

Q4/ en B,  $y(x)=0$

Q5/ On sait que pour  $x=L$ ,  $y(x)=0$  donc

$$\begin{aligned} -\frac{M_A}{2}L^2 + \frac{Y_A}{2} \cdot \frac{L^3}{3} - \frac{q}{6} \cdot \frac{L^4}{4} &= 0 \\ -M_A + Y_A \cdot \frac{L}{3} - \frac{q}{3} \cdot \frac{L^2}{4} &= 0 \end{aligned}$$

$$M_A = \frac{L}{3} \cdot \left( Y_A - \frac{qL}{4} \right)$$

Q6/

$$M_A = \frac{L}{3} \cdot \left( Y_A - \frac{qL}{4} \right)$$

De plus on a vu en Q1 que

$$M_A = Y_A \cdot L - \frac{qL^2}{2}$$

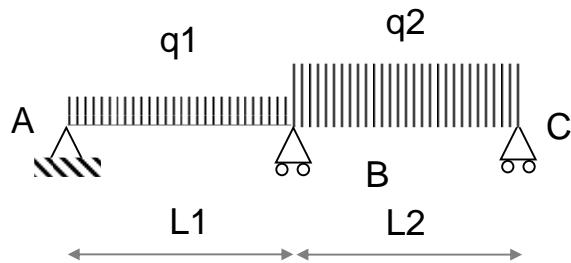
$$Y_A = \frac{5}{8}qL$$

Q7/ PFS

## 14.6 Poutres continues

### 14.6.1 Exercice. Théorème des 3 moments, poutres continues

Soit une poutre à 2 travées de longueur  $L_1$  et  $L_2$ , soumises aux charges linéaires  $q_1$  et  $q_2$



On suppose que le module  $E$  et le moment quadratique  $I$  sont constants le long de la poutre. Montrer que le moment fléchissant en B a pour expression

$$M_B = -\frac{q_1 L_1^3 + q_2 L_2^3}{8(L_1 + L_2)}$$

Correction

$$M_A \cdot L_1 + 2M_B \cdot (L_1 + L_2) + M_C \cdot L_2 = 6EI \cdot (\Omega_{i,d}^0 - \Omega_{i,g}^0)$$

$$\begin{cases} M_A = 0 \\ M_C = 0 \end{cases}$$

$$\Omega_{i,d}^0 = -q_2 \cdot \frac{L_2^3}{24EI}$$

$$\Omega_{i,g}^0 = q_1 \cdot \frac{L_1^3}{24EI}$$

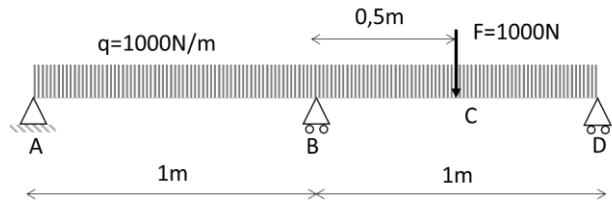
$$M_B = -\frac{q_1 L_1^3 + q_2 L_2^3}{8(L_1 + L_2)}$$

### 14.6.2 Exercice. Résolution d'une poutre continue par superposition

Soit la poutre continue ci-dessous, axe x, longueur  $L=2m$ , module  $E$ , moment quadratique  $I$ , soumise à une charge linéaire  $q$  sur toute sa longueur, et à une force  $F$  en C.

La poutre est hyperstatique de degré 1.

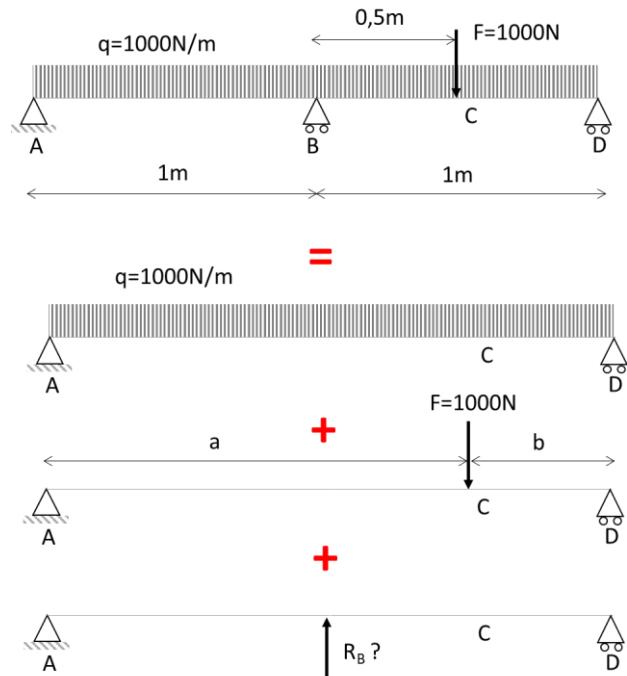
L'axe vertical ascendant est l'axe y.



On propose de résoudre cette poutre continue (estimation des appuis en A, B et D) par l'utilisation du théorème de superposition.

Soit la même poutre de longueur 2m uniquement portée par les appuis A et D.

Par superposition on a :



La partie 1 étudie les flèches des cas isostatiques.

Les résultats de la partie 1 peuvent être directement utilisés pour la partie 2.

Partie 1 : calcul des flèches pour les cas isostatiques

1/ Dans le cas de la charge linéaire seule, pour la poutre sans l'appui en B, montrer que la flèche en  $x=L/2$  a pour expression :

$$y_1 = -\frac{5}{384} \cdot \frac{qL^4}{EI}$$

$$q=1000\text{N/m}$$



2/ Dans le cas de la force F seule appliquée en C, pour la poutre sans l'appui en B, montrer que la flèche en  $x=L/2$  a pour expression :

$$y_2 = -\frac{Fb}{6EIL} \cdot \left[ a \cdot (L+b) - \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right]$$



3/ Dans le cas de la réaction  $R_B$  seule appliquée au centre de la poutre, montrer que la flèche en  $x=L/2$  a pour expression :

$$y_3 = \frac{R_B L^3}{48EI}$$



Partie 2 : calcul de la réaction  $R_B$  à l'appui B de la poutre continue

- 1/ Pour la poutre continue, que vaut la flèche au point B ?
- 2/ En déduire une relation simple entre  $y_1$ ,  $y_2$  et  $y_3$ .
- 3/ En déduire la valeur de la réaction  $R_B$ .

### Correction

#### Partie 1

- 1/ Calcul direct de déformée à partir de  $M = EIy''$
- 2/ Calcul direct de déformée à partir de  $M = EIy''$
- 3/ Calcul direct de déformée à partir de  $M = EIy''$

#### Partie 2

- 1/ Pour la poutre continue,  $y_B = 0$
- 2/ On a donc par superposition

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

- 3/ On en déduit :

$$R_B = -\frac{48EI}{L^3} \cdot (y_1 + y_2) = \frac{48EI}{L^3} \cdot \left[ \frac{Fb}{6EIL} \cdot \left[ a(L+b) - \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right] + \frac{5}{384} \cdot \frac{FL^3}{EI} \right]$$

La connaissance de E et I n'est pas nécessaire puisque le facteur EI disparaît de l'expression de  $R_B$

Application numérique :

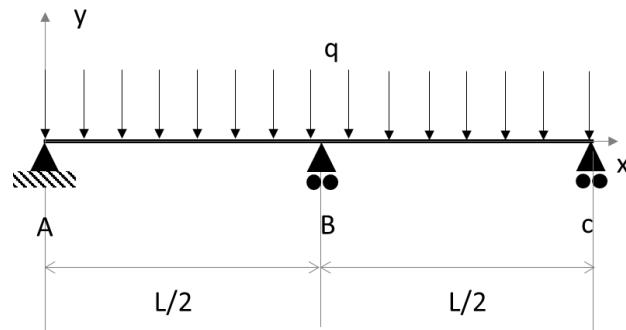
$$R_B = 1937 N$$

On peut alors en déduire les réactions aux appuis en A et D.

### 14.6.3 Exercice. Poutre continue sur trois appuis

Soit la poutre de longueur  $L=4\text{m}$  ci-dessous, reposant sur trois appuis en A, B et C.

La poutre est soumise à une charge linéique  $q = -1000 \text{ N/m}$  suivant y.



#### Partie 1 : superposition

Par superposition, en considérant que la flèche  $y_B$  est nulle, calculer  $R_{YB}$ , réaction d'appui en B suivant y.

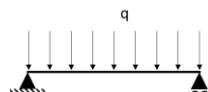
#### Partie 2 : théorème des 3 moments

Par le théorème des 3 moments, retrouver la valeur de  $R_{YB}$  calculée en partie 1.

#### Formulaire

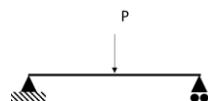
Poutre sur deux appuis, longueur L, effort linéique q : flèche maximale

$$y_{max} = -\frac{5qL^4}{384EI}$$



Poutre sur deux appuis, longueur L, effort ponctuel p au centre

$$y_{max} = -\frac{PL^3}{48EI}$$



Théorème des 3 moments

$$M_{i-1} \cdot \frac{L_i}{6EI_i} + 2M_i \left( \frac{L_i}{6EI_i} + \frac{L_{i+1}}{6EI_{i+1}} \right) + M_{i+1} \cdot \frac{L_{i+1}}{6EI_{i+1}} = \Omega_{i,d}^0 - \Omega_{i,g}^0$$

- Effort tranchant

$$V(x) = V_0(x) + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_i}$$

Correction

### Partie 1 : superposition

Le cas étudié est par superposition la somme de deux cas : Poutre sur deux appuis avec effort linéaire  $q$  + Poutre sur deux appuis avec effort ponctuel  $R_{YB}$  au centre

La flèche en B est nulle donc la somme des flèches dues à chaque cas est nulle :

$$-\frac{5qL^4}{384EI} + \frac{R_{YB} \cdot L^3}{48EI} = 0$$

$$R_{YB} = 48 \times \frac{5qL}{384} = 0.625qL = 2500 \text{ N}$$

### Partie 2 : théorème des 3 moments

$$M_A \cdot \frac{\frac{L}{2}}{6EI} + 2M_B \left( \frac{\frac{L}{2}}{6EI} + \frac{\frac{L}{2}}{6EI} \right) + M_C \frac{\frac{L}{2}}{6EI} = -\frac{q \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3}{24} - \frac{q \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3}{24}$$

Moment sur appuis :  $M_A = 0$  et  $M_C = 0$

On a finalement

$$M_B = -\frac{qL^2}{32}$$

Effort tranchant :

Travée 1

$$V(x) = \frac{qL}{4} - q \cdot \frac{L-x}{2} + \frac{qL^2}{32} \cdot \frac{2}{L}$$

Donc l'effort tranchant à gauche de l'appui en B a pour valeur

$$V\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5qL}{16} = 1250 \text{ N}$$

Travée 2

$$V(x) = \frac{qL}{4} - q \cdot \frac{L-x}{2} + \frac{qL^2}{32} \cdot \frac{2}{L}$$

Donc l'effort tranchant à droite de l'appui en B a pour valeur

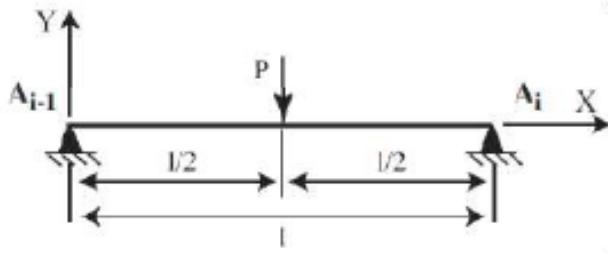
$$V(0) = \frac{qL}{4} + \frac{qL}{16} - \frac{qL^2}{32} \cdot \frac{2}{L} = -\frac{5qL}{16} = -1250 \text{ N}$$

Par conséquent, on a

$$R_{YB} = 1250 - (-1250) = 2500 \text{ N}$$

#### 14.6.4 Exercice. Rotation à un appui

Soit une poutre de longueur L, posée sur deux appuis A<sub>i-1</sub> et A<sub>i</sub>.



Montrer que,  $\omega(0)$  rotation de la poutre au niveau de l'appui A<sub>i-1</sub>, a pour expression :

$$\omega(L) = -\frac{P \cdot L^2}{16EI}$$

Correction

Soient X<sub>A<sub>i</sub></sub> et Y<sub>A<sub>i</sub></sub> les réactions en X et Y au niveau de l'appui A<sub>i</sub> et X<sub>A<sub>i-1</sub></sub> et Y<sub>A<sub>i-1</sub></sub> réaction en X et Y au niveau de l'appui A<sub>i-1</sub>.

Par symétrie,

$$X_{A_i} = X_{A_{i-1}} = 0$$

$$Y_{A_i} = X_{A_{i-1}} = \frac{P}{2}$$

Le moment fléchissant dans une section d'abscisse x a pour expression :

$$M_f(x) = EI \cdot y''(x)$$

Dans la partie [0 ; L/2]

$$M_f = -P \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right) + \frac{P}{2} \cdot (L - x) = -\frac{PL}{2} + Px + \frac{PL}{2} - \frac{Px}{2} = \frac{Px}{2}$$

Donc

$$y'' = \frac{Px}{2EI}$$

Donc

$$y' = \frac{P}{2EI} \cdot \frac{x^2}{2} + A$$

La rotation est la dérivée de la flèche y donc

$$y' = \omega$$

Conditions aux limites :  $\omega(L/2)=0$  donc

$$\omega\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{P}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L^2}{4} + A = 0$$

Donc

$$\omega = \frac{P}{2EI} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{P \cdot L^2}{16EI}$$

Donc en  $x=0$ ,

$$\omega(0) = -\frac{P \cdot L^2}{16EI}$$

NB : pour la flèche en  $x=L$ , il faut changer l'expression du moment fléchissant :

$$M_f = \frac{P}{2} \cdot (L - x)$$

On obtient

$$\omega(L) = \frac{P}{2EI} \cdot \left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) - 3 \cdot \frac{P \cdot L^2}{16EI}$$

$$\omega(L) = \frac{P \cdot L^2}{16EI}$$

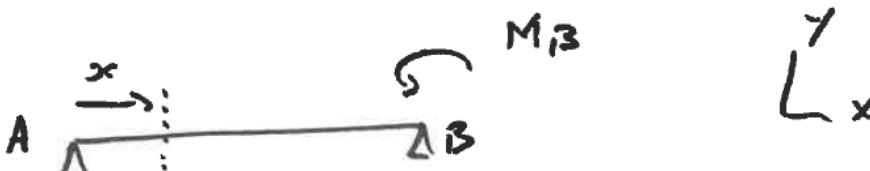
#### 14.6.5 Exercice. Rotation à un appui

Soit la poutre isostatique ci-dessous sur deux appuis en A et B, soumise à un moment  $M_B$  en B.

Calculer les rotations  $\omega_A$  et  $\omega_B$  en A et B.

On pourra écrire le PFS pour déterminer les appuis en A et B, en déduire le moment fléchissant dans une section d'abscisse et enfin la relation entre le moment fléchissant et la déformée  $y(x)$ .

On sait que la rotation dans la section d'abscisse x est la dérivée de  $y(x)$  par rapport à x.



Correction

$\Sigma M$  en A :

$$M_B + Y_B \cdot L = 0$$

Donc

$$Y_B = -\frac{M_B}{L}$$

$\Sigma F$  en y :

$$Y_A + Y_B = 0$$

Donc

$$Y_A = \frac{M_B}{L}$$

Moment fléchissant :

$$M_f(x) = M_B + Y_B \cdot (L - x) = M_B - \frac{M_B}{L} \cdot (L - x) = M_B \cdot \frac{x}{L}$$

Donc

$$y'' = \frac{1}{EI} \cdot M_B \cdot \frac{x}{L}$$

Par intégration,

$$y' = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M_B}{L} \cdot \frac{x^2}{2} + K_1$$

Condition aux limites :

$$K_1 = \omega_A$$

Par intégration,

$$y = \frac{1}{EI} \cdot \frac{M_B}{L} \cdot \frac{x^3}{6} + \omega_A \cdot x + K_2$$

Condition aux limites :

$$y(0) = 0 \text{ donc } K_2 = 0$$

$$y(L) = 0 \text{ donc }$$

$$\omega_A = -\frac{M_B \cdot L}{6EI}$$

De plus,

$$y'(L) = \omega_B = \frac{1}{EI} \frac{M_B}{L} \cdot \frac{L^2}{2} - \frac{1}{EI} \cdot \frac{M_B \cdot L}{6}$$

$$\omega_B = \frac{M_B \cdot L}{3EI}$$

## 14.7 Méthodes énergétiques

### 14.7.1 Exercice. Tableau des intégrales de Mohr

Retrouver les résultats donnés dans le tableau ci-dessous

$$\int m_j(x) \cdot m_i(x) dx$$

$m_j(x)$	$M_j$ 	$M_j$ 
$m_i(x)$		
$M_i$ 	$LM_i M_j$	$\frac{1}{2} LM_i M_j$
$M_i$ 	$\frac{1}{2} LM_i M_j$	$\frac{1}{3} LM_i M_j$

Figure 65. Tableau des intégrales de Mohr

#### Correction

Case 11 : Deux rectangles

$$\int m_j(x) \cdot m_i(x) dx = \int_0^L M_i \cdot M_j dx = M_i \cdot M_j \cdot [x]_0^L = M_i \cdot M_j \cdot L$$

Case 21 et Cas 12 : un triangle et un rectangle

$$\int M_j \cdot M_i \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx = M_i \cdot M_j \cdot \left[x - \frac{x^2}{2L}\right]_0^L = M_i \cdot M_j \cdot \left(L - \frac{L^2}{2L}\right) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot M_i \cdot M_j$$

Case 22 : deux triangles dans le même sens

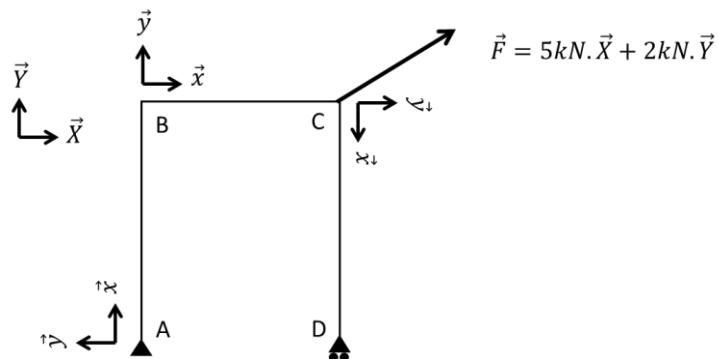
$$\int m_j(x) \cdot m_i(x) dx = \int_0^L M_i \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) M_j \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx = M_i \cdot M_j \cdot \int_0^L \left(1 - \frac{2x}{L} + \frac{x^2}{L^2}\right) dx$$

$$\int m_j(x) \cdot m_i(x) dx = M_i \cdot M_j \cdot \left[x - \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{3L^2}\right]_0^L = M_i \cdot M_j \cdot \left(L - L + \frac{1}{3} \cdot L\right) = \frac{1}{3} \cdot L \cdot M_i \cdot M_j.$$

## 14.8 Etude des portiques

### 14.8.1 Exercice. Moment de flexion dans un portique

Soit le portique isostatique ci-dessous, de longueur L et de hauteur H.



Déterminer le diagramme des moments fléchissant au sein du portique.

#### Correction

Le portique est isostatique.

PFS

- Somme des forces

$$X_A + 5 = 0$$

$$Y_A + Y_D + 2 = 0$$

- Somme des moments en A

Le moment en A, dû à la force  $\vec{F}$  appliquée en C, a pour expression, dans le repère global :

$$\overrightarrow{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{M}_C(\vec{F}) + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{F} = \vec{0} + \begin{pmatrix} L \\ H \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2L - 5H \end{pmatrix}$$

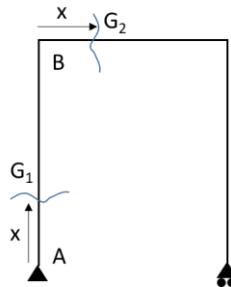
Somme des moments en A suivant l'axe Z :

$$Y_D \cdot L + 2L - 5H = 0$$

Donc

$$\begin{cases} X_A = -5kN \\ Y_D = \frac{5H}{L} - 2 \\ Y_A = -\frac{5H}{L} \end{cases}$$

Moment fléchissant



- Partie AB

Soit  $G_1$  d'abscisse  $x$  sur la partie AB.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{G_1}(F)} &= \overrightarrow{M_C(F)} + \overrightarrow{G_1C} \wedge \vec{F} = \vec{0} + \begin{pmatrix} L \\ H-x \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2L - 5(H-x) \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{M_{G_1}(Y_D)} &= \overrightarrow{M_D(Y_D)} + \overrightarrow{G_1D} \wedge Y_D \cdot \vec{Y} = \vec{0} + \begin{pmatrix} L \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ Y_D \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Y_DL \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$M = 2L - 5(H-x) + Y_DL = 5x$$

- Partie BC

Soit  $G_2$  d'abscisse  $x$  sur la partie BC.

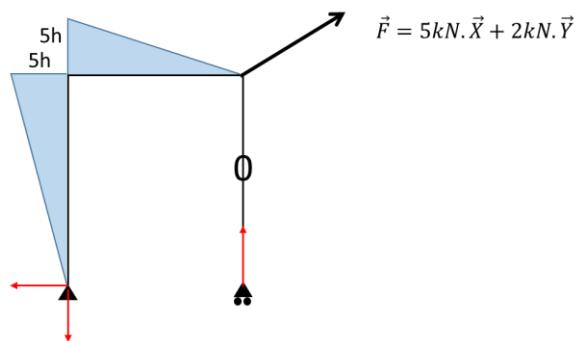
$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{G_2}(F)} &= \overrightarrow{M_C(F)} + \overrightarrow{G_2C} \wedge \vec{F} = \vec{0} + \begin{pmatrix} L-x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2(L-x) \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{M_{G_2}(Y_D)} &= \overrightarrow{M_D(Y_D)} + \overrightarrow{G_2D} \wedge Y_D \cdot \vec{Y} = \vec{0} + \begin{pmatrix} L-x \\ -H \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ Y_D \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Y_D(L-x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le moment fléchissant a donc pour expression

$$M = 2(L-x) + Y_D(L-x) = \frac{5H}{L}(L-x)$$

- Partie CD

$M = 0$



## 14.9 Treillis isostatiques

### 14.9.1 Exercice : treillis

Les nœuds sont numérotés de I à VI. Une force  $P = -3$  Tonnes est appliquée au nœud V.

Barres numérotées de 1 à 9.

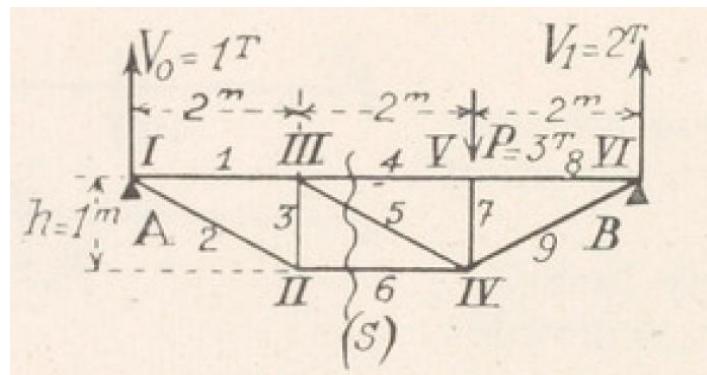


Figure 66. Référence [11]

1/ Déterminer les réactions d'appui en A et B

2/ En déduire les efforts dans les barres 1 à 9

Correction

Mesurés à l'échelle des forces, on a les résultats ci-dessous (compression +, traction -) :

Barres .....	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Efforts en tonnes...	2;	-2,4;	1;	4;	-2,4;	-2;	3;	4;	-4,5

### 14.9.2 Exercice : treillis

Soit le treillis articulé ci-dessous. Les barres sont surabondantes et on ne peut pas déterminer les efforts normaux dans toutes les barres avec seulement l'équilibre des nœuds.

On peut cependant, par l'équilibre des nœuds, calculer  $N_1, N_2, N_9, N_{10}$  en fonction de P et Q.

1. Appliquer le PFS pour exprimer les réactions  $Y_A = V_0$  et  $Y_B = V_1$  en A et B en fonction des efforts P et Q
2. Exprimer  $N_1, N_2, N_9, N_{10}$  en fonction de P et Q.

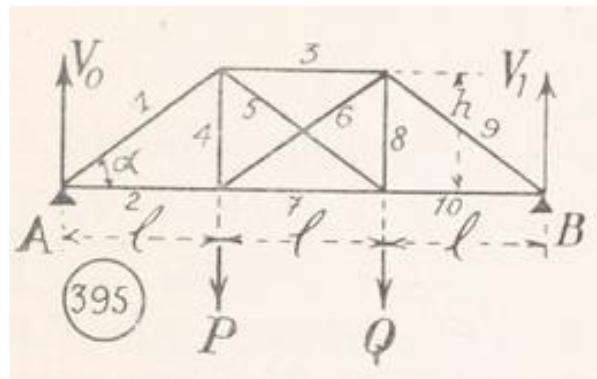


Figure 67. Référence [11]

#### Correction

##### 1/ PFS

$$Y_A + Y_B - P - Q = 0$$

$$Y_B \cdot 3L - P \cdot L - 2Q \cdot L = 0$$

$$Y_B = \frac{P + 2Q}{3}; Y_A = \frac{2P + Q}{3}$$

##### 2/ Equilibre du nœud A

$$-N_1 \cdot \cos \alpha - N_2 = 0$$

$$-N_1 \cdot \sin \alpha + Y_A = 0$$

$$\begin{cases} N_1 = \frac{Y_A}{\sin \alpha} \\ N_2 = -N_1 \cdot \cos \alpha = -\frac{Y_A}{\tan \alpha} \end{cases}$$

##### Equilibre du nœud B

$$N_9 \cdot \cos \alpha + N_{10} = 0$$

$$-N_9 \cdot \sin \alpha + Y_B = 0$$

$$\begin{cases} N_9 = \frac{Y_B}{\sin \alpha} \\ N_{10} = -\frac{Y_B}{\tan \alpha} \end{cases}$$

## 14.10 Exercices de synthèse

### 14.10.1 Exercice. Flèche d'une poutre console

La flèche maximale  $\delta$  d'une poutre console sollicitée par une force  $F$  à son extrémité a pour expression :

$$\delta = -\frac{FL^3}{3EI}$$

$L$  : longueur de la poutre ;  $E$  : module d'Young et  $I$  : moment quadratique

Q1/ Retrouver ce résultat à l'aide de la formule  $M_f(x) = EIy''(x)$

Q2/ Retrouver ce résultat par le théorème de la charge unitaire

Q3/ Retrouver ce résultat par la méthode des déplacements



#### Correction

Q1/ Par la loi de comportement de la poutre en flexion

$$M_f(x) = EIy''(x)$$

Or

$$M_f(x) = -F \cdot (L - x)$$

Par intégration on obtient

$$y(x) = -\frac{F}{6EI} \cdot x^2 \cdot (3L - x)$$

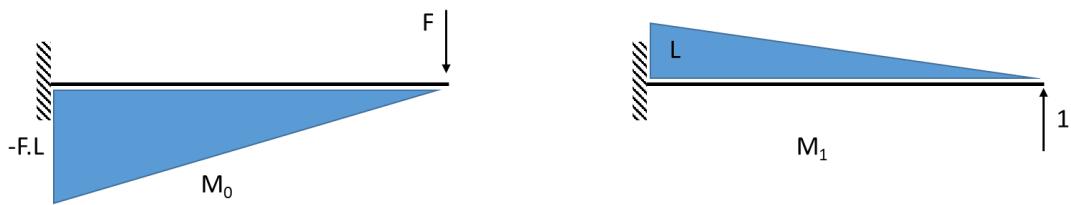
$$\delta = y(L)$$

On a bien

$$\delta = -\frac{FL^3}{3EI}$$

Q2/ Par le théorème de la charge unitaire

On applique une charge unitaire au point où l'on cherche le déplacement.



$$\delta = \frac{\partial W}{\partial F} = \int_0^L \frac{1}{EI} \cdot M_0 M_1 dx$$

E et I sont constants entre 0 et L donc :

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{1}{EI} \int_0^L M_0 M_1 dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot L \cdot (-FL)(L)$$

$$\delta = -\frac{FL^3}{3EI}$$

$m_j(x)$	$M_j$	$M_j$
$m_i(x)$		
$M_i$	$LM_i M_j$	$\frac{1}{2} LM_i M_j$
$M_i$	$\frac{1}{2} LM_i M_j$	$\frac{1}{3} LM_i M_j$

Q3/ Par la méthode des déplacements

Soient A le point d'encastrement, B l'extrémité de la poutre et S la section de la poutre.

Encastrement en A donc pas de degrés de liberté en A :  $u_{XA} = 0 ; u_{YA} = 0 ; \omega_A = 0$

Hypothèse de longueur de poutre invariante :  $u_{xB} = 0$ .

$$\begin{pmatrix} X_{AB} \\ Y_{AB} \\ M_{AB} \\ X_{BA} \\ Y_{BA} \\ M_{BA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_{YB} \\ \omega_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ M_A \\ 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$Y_{BA} = \frac{12EI}{L^3} u_{YB} - \frac{6EI}{L^2} \omega_B + F$$

$$M_{BA} = -\frac{6EI}{L^2} u_{YB} + \frac{4EI}{L} \omega_B$$

Équilibre du nœud B

$$Y_{BA} = 0$$

$$M_{BA} = 0$$

L'équation pour  $M_{BA}$  donne

$$\omega_B = \frac{3}{2} \cdot \frac{u_{YB}}{L}$$

Donc dans l'équation pour  $Y_{BA}$  on obtient :

$$\frac{12EI}{L^3} u_{YB} - \frac{6EI}{L^2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{u_{YB}}{L} = -F$$

$$(12EI - 9EI)u_{YB} = FL^3$$

Après arrangement des termes on a bien :

$$u_{YB} = -\frac{FL^3}{3EI}$$

# 15 Rappels : Propriétés mécaniques des matériaux

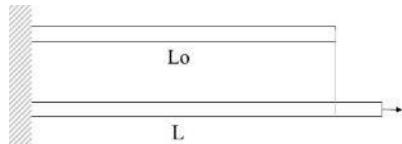
## 15.1 Matériau homogène / hétérogène et Matériau isotrope / anisotrope

Un matériau homogène est un matériau qui a les mêmes propriétés en tout point.

Un matériau isotrope a les mêmes propriétés dans toutes les directions de l'espace.

## 15.2 Déformation

Soit une pièce de longueur initiale  $L_o$ . Sous l'action d'un effort ou d'un déplacement, la pièce prend une longueur  $L$ .



L'allongement  $\Delta l$  (mm) de la pièce est

$$\Delta L = L - L_o$$

La déformation conventionnelle  $\varepsilon$  de la pièce est

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_o}$$

Une déformation est dite « **élastique** » si elle est **réversible**. Lorsque l'effort/déplacement n'est plus appliqué, la pièce reprend ses dimensions initiales.

Une déformation **irréversible** est dite **plastique**. Lorsque l'effort/déplacement n'est plus appliqué, la pièce ne reprend pas ses dimensions initiales.

## 15.3 Comportement en traction

### 15.3.1 Comportements typiques de traction

On peut décrire le comportement en traction de la plupart des matériaux à l'aide d'un des trois comportements donnés ci-dessous.

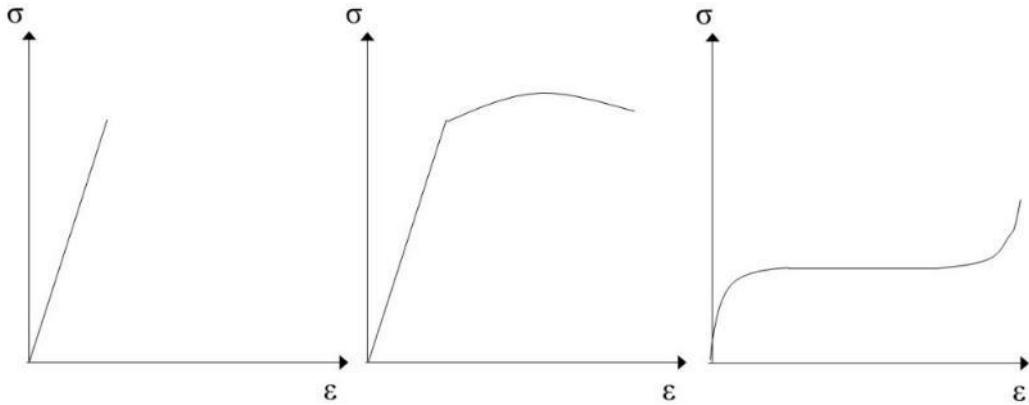


Figure 68. Gauche : linéaire élastique fragile. Milieu : linéaire élastique ductile. Droite : élastique non linéaire

#### 15.3.1.1 Linéaire élastique fragile

En début de traction, la déformation est élastique : réversible. Il y a relation linéaire entre la contrainte et la déformation. On parle de comportement linéaire élastique.

La rupture intervient ensuite sans déformation plastique notable : on parle de comportement fragile.

Ces matériaux sont sensibles au phénomène de concentration de contraintes, donc ils sont très sensibles à la présence de défauts (porosités, fissures internes).

#### 15.3.1.2 Linéaire élastique ductile

Le comportement est linéaire élastique en début de traction.

Il y a ensuite apparition d'une déformation plastique notable avant rupture (partie non linéaire de la courbe). On parle de comportement ductile.

#### 15.3.1.3 Elastique non linéaire

Sur une grande gamme de déformation, la déformation est élastique mais il n'y a pas relation linéaire entre la contrainte et la déformation.

### 15.3.2 La courbe de traction

Soit une éprouvette de section initiale  $S_0$  et de longueur initiale  $L_0$ .

La courbe de traction conventionnelle trace la contrainte conventionnelle (aussi appelée nominale)

$$\sigma_n = \frac{F}{S_0}$$

en fonction de la déformation conventionnelle (aussi appelée nominale)

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta L}{L_0}$$

On trouve sur cette courbe :

- Le module d'Young  $E$ , pente de la partie linéaire élastique.
- La limite d'élasticité  $R_e$  du matériau, contrainte au-delà de laquelle la déformation devient plastique

La résistance à la rupture  $R_m = F_{\max}/S_0$ , contrainte qui correspond à l'effort maximal mesuré lors de l'essai (donc en début de striction)

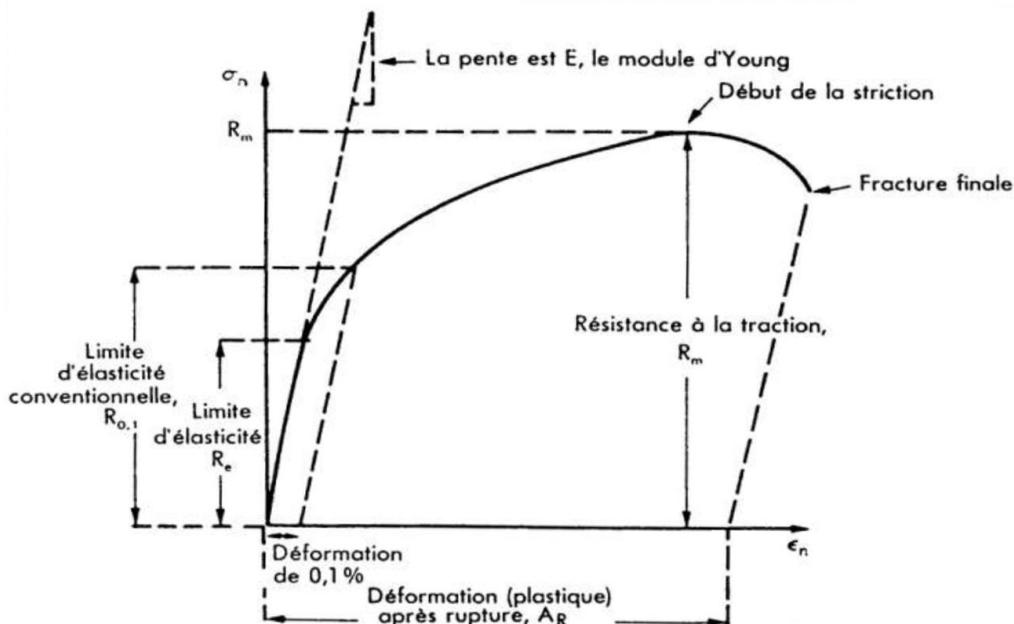


Figure 69. Courbe de traction pour un matériau linéaire élastique ductile

### 15.3.2.1 Domaine élastique linéaire

La relation entre contrainte et déformation est décrite par la loi de Hooke en traction **uniaxiale** :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$E$  (en MPa) : module d'Young du matériau.

$E$  dépend notamment de la nature des liaisons dans le solide :

Covalente	$\sim 10^6$ MPa
Métallique	30-200 000 MPa
Ionique	30-70 000 MPa
Pont hydrogène	8 000 MPa
Van der Waals	2 000 MPa

### 15.3.2.2 Effet Poisson

Pour une traction suivant l'axe longitudinal L, il se produit une contraction dans l'axe transversal t (conservation du volume). On parle d'effet Poisson. On définit alors le coefficient de Poisson  $\nu$  tel que :

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l}$$

Remarque :  $0 \leq \nu \leq 0.5$

Loi de Hooke généralisée (loi de comportement du solide élastique linéaire)

Elle généralise la loi de Hooke au cas multiaxial. Car l'effet Poisson induit un couplage entre contraintes et déformations dans toutes les directions.

Une contrainte $\sigma_i$ entraîne les déformations :	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$
$\sigma_1$	$\frac{\sigma_1}{E}$	$-\nu \cdot \frac{\sigma_1}{E}$	$-\nu \cdot \frac{\sigma_1}{E}$
$\sigma_2$	$-\nu \cdot \frac{\sigma_2}{E}$	$\frac{\sigma_2}{E}$	$-\nu \cdot \frac{\sigma_2}{E}$
$\sigma_3$	$-\nu \cdot \frac{\sigma_3}{E}$	$-\nu \cdot \frac{\sigma_3}{E}$	$\frac{\sigma_3}{E}$

Finalement, la loi de Hooke généralisée énonce

$$\varepsilon_1 = \frac{1 + \vartheta}{E} \sigma_1 - \frac{\vartheta}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1 + \vartheta}{E} \sigma_2 - \frac{\vartheta}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1 + \vartheta}{E} \sigma_3 - \frac{\vartheta}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

### 15.3.2.3 Limite d'élasticité $R_e$

Pour une contrainte seuil, appelée limite d'élasticité  $R_e$ , la déformation cesse d'être élastique : une déformation plastique, donc irréversible, apparaît.

La transition élastique – plastique est parfois difficile à situer sur la courbe de traction. On définit donc souvent la limite d'élasticité par convention (Figure 70).

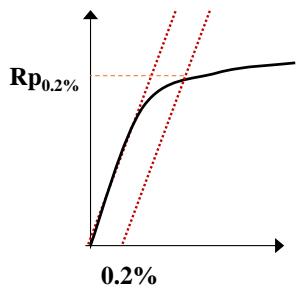


Figure 70. Limite d'élasticité  $R_{p0.2\%}$

# 16 Références Bibliographiques

- [1] « Annales des mines. Revue mensuelle des industries extractives », nov. 1971, [En ligne]. Disponible sur: Source gallica.bnf.fr / MINES ParisTech
- [2] J. Résal, *Résistance des matériaux : cours de l'École des ponts et chaussées*. 1898. [En ligne]. Disponible sur: gallica.bnf.fr
- [3] Menan, François, Saanouni, Amara, et Raso, « Optimisation en fatigue d'un moteur thermique à chambre circulaire », *La Forge*, n° 47, janv. 2012.
- [4] Maltrud, Gressel, Lawrjaniec, Menan, Lieurade, et Jubin, « CLASSIFICATION OF SEVERAL WELDED JOINTS FOR LOAD CARRYING ATTACHMENTS ACCORDING TO THEIR FATIGUE STRENGTH », présenté à International Institute of Welding, 2010.
- [5] T. Bouche, « Polycopié de mécanique PTSI-PT - Centre Charles de Foucauld - Angers ». 2001.
- [6] J. Résal, *Constructions métalliques, élasticité et résistance des matériaux, fonte, fer et acier.*, Source gallica.bnf.fr / BnF. 1892.
- [7] J.-L. Fanchon, *Guide de Mécanique*. Nathan, 1998.
- [8] E. Gouard et G. Hiernaux, *Cours élémentaire de mécanique industrielle. Principes généraux, applications, exercices pratiques*, 2<sup>e</sup> éd., vol. 1. Paris: DUNOD et PINAT, 1914.
- [9] K. Culmann, *Traité de statique graphique*. Traduit de la 2<sup>e</sup>me édition allemande. 1880. [En ligne]. Disponible sur: gallica.bnf.fr
- [10] P. Dellus, *Résistance des Matériaux*. Technique & Vulgarisation, 1956.
- [11] E. Callandreau, *Problèmes de résistance des matériaux avec leurs solutions*. Albin Michel, 1944. [En ligne]. Disponible sur: Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France
- [12] M. Koechlin, *Applications de la statique graphique*, 2<sup>e</sup> éd. 1898. [En ligne]. Disponible sur: gallica.bnf.fr
- [13] F. Stussi, *Statique Appliquée et Résistance des Matériaux*, vol. 1. DUNOD, 1949.
- [14] J. Buchetti, *Manuel des constructions métalliques et mécaniques*. 1888. [En ligne]. Disponible sur: http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb301722737
- [15] Espitallier, *Le Béton armé, systèmes généraux et calcul des ouvrages en béton armé*. Paris, 1906.
- [16] A. Giet, *Problèmes de résistance des matériaux tome 1*. DUNOD, 1973.
- [17] Y. Brémont et P. Réocreux, *Mécanique du solide indéformable: statique cours et exercices résolus classes préparatoires aux grandes écoles, MPSI, PTSI, PSI, PSI\*, MP, MP\*, PT, PT\**, premier cycle universitaire. in Mécanique, no. 2. Paris: Ellipses, 1996.
- [18] A. Castigliano, *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. in Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications, no. vol. 1 à 2. A. F. Negro, 1879. [En ligne]. Disponible sur: https://books.google.fr/books?id=d0EArvXp34gC
- [19] L. Buthaud, « Polycopié de mécanique des solides ISAE-ENSMA ». ISAE ENSMA, 2002.
- [20] Chillon, *Résistance des matériaux Tome 1*, vol. 1. Paris: DUNOD, 1961.
- [21] P.-O. Martin, « Formulaire résistance des matériaux - Poutres ». CTICM, 2021.
- [22] Comprendre simplement la résistance des matériaux: la structure, principes et enjeux pour la conception, 3<sup>e</sup> édition. Antony [France]: Éditions Le Moniteur, 2019.
- [23] D. Gamby, « Polycopié de Résistance des Matériaux ». ISAE-ENSMA, 2002.

[www.btscm.fr/dicocm/M/meca/Energetique/Th%C3%A9orie%20de%20l%20energie.pdf](http://www.btscm.fr/dicocm/M/meca/Energetique/Th%C3%A9orie%20de%20l%20energie.pdf)

ECAM Lyon - RdM - Serge VIALA

<https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwi3z8Wcrz9AhVKTKQEHz6AToQFnoECA0QAQ&url=https%3A%2F%2Fwww.ecam.fr%2Fmateriaux-structures%2Fwp-content%2Fuploads%2Fsites%2F2017%2F06%2F14-Statique-Hyperstaticit%25C3%25A9-Isostaticit%25C3%25A9-Hypostaticit%25C3%25A9.pdf&usg=AOvVaw1YOWYLPwZLg60x5LG9WVn1>

EPSAA - construction A3 Guillaume NICOLAS - 2019-2020

<https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwjr7-P8-bz9AhXIUaQEHTQIC-oQFnoECA4QAQ&url=http%3A%2F%2Fguillaume-nicolas.fr%2Fwp-content%2Fuploads%2F2019%2F10%2FS1-C04-staticit%25C3%25A9-DIAPO-2019.pdf&usg=AOvVaw1SsxLnJWaHETi0hC8odSuq>

Sylvain Ebode et Marc Leyral [www.construire-l-architecture.com](http://www.construire-l-architecture.com)