CESI_
ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Formulaire de Mathématiques Supérieures
-

Algèbre

Equations du second degré

Soient a, b, c des nombres réels. $a \neq 0$

$$a.z^2 + b.z + c = 0$$

Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$, une solutions réelles= double

$$z = \frac{-b}{2a}$$

Si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$
$$z_2 = \frac{-b - i.\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Dans tous les cas

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$
$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$$
$$z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

Identités remarquables

Valables dans $\mathbb{C}$ et donc dans $\mathbb{R}$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k}.b^k + \cdots + b^n$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
$$a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$$

Nombres complexes

Forme algébrique

$$z = x + i.y$$

Forme trigonométrique

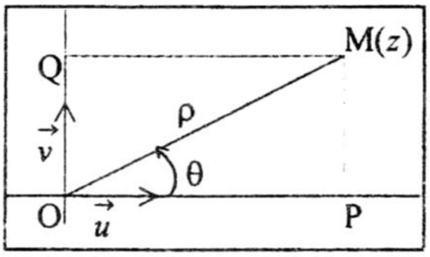
$$z = \rho.(\cos\theta + i.\sin\theta) = \rho e^{i\theta} \qquad \rho > 0$$

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{u} + y.\vec{v}$$

$$\overline{OP} = x = \Re e(z) = \rho.\cos\theta$$

$$\overline{OQ} = y = \Im m(z) = \rho.\sin\theta$$

$$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Opérations algébriques

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

$$z.z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Module

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Argument

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi$$

Conjugué

Pour $z = x + iy$; $\bar{z} = x - i.y$

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{z.z'} = \bar{z}.\overline{z'}$$

$$z.\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z.\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i.\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho}.e^{-i\theta}$$

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

$$\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$$

Module et argument d'un produit et d'un quotient

$$z.z' = \rho.\rho'.e^{i(\theta + \theta')}$$

$$|z.z'| = |z||z'|$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'}.e^{i(\theta - \theta')}$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, $z^n = \rho^n.e^{in\theta}$

Inégalité triangulaire

$$\big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Trigonométrie

$$cos^2\theta + sin^2\theta = 1$$

Pour $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Formules d'addition

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}.e^{ib}$$
$$\cos(a+b) = \cos a . \cos b - \sin a . \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a . \cos b + \sin b . \cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a . \cos b - \sin b . \cos a$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 - \tan a . \tan b}$$
$$\cos(2a) = cos^2 a - sin^2 a = 2cos^2 a - 1 = 1 - 2sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2\sin a . \cos a$$
$$cos^2 a = \frac{1}{2}.(1 + \cos 2a)$$
$$sin^2 a = \frac{1}{2}.(1 - \cos 2a)$$
$$1 + tan^2 a = \frac{1}{cos^2 a}$$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel n non nul,

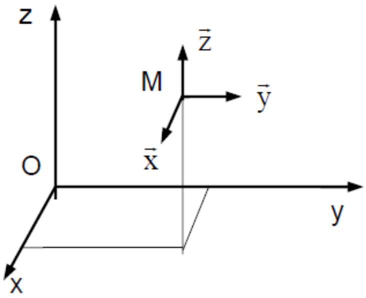
$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$
$$(\cos\theta + i.\sin\theta)^n = \cos n\theta + i.\sin n\theta$$

Valeurs remarquables

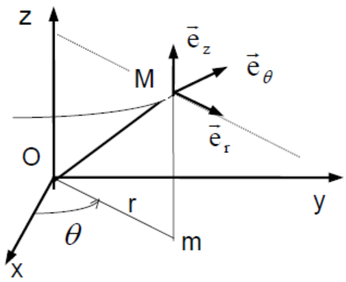
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
Sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
Cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1
Tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$		0

Calcul Vectoriel – Géométrie

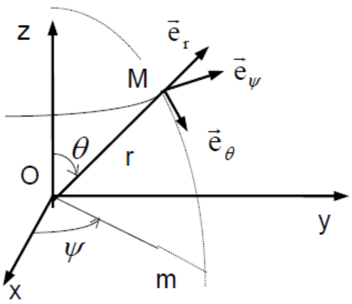
Repère cartésien : x,y,z



Repère cylindrique : r, θ, z et Repère polaire : r, θ



Repère sphérique : r, θ, φ



Produit scalaire

$$\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.\cos(\vec{U},\vec{V})$$
$$\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U}$$
$$\vec{U}.(\vec{V}+\vec{W}) = \vec{U}.\vec{V}+\vec{U}.\vec{W}$$
$$\lambda\vec{U}.\mu\vec{V} = \lambda\mu\vec{U}.\vec{V}$$

Produit vectoriel

$$\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.|\sin(\vec{U},\vec{V})|$$
$$\vec{U}\wedge\vec{V} = -\vec{V}\wedge\vec{U}$$
$$\vec{U}\wedge(\vec{V}+\vec{W}) = \vec{U}\wedge\vec{V}+\vec{U}\wedge\vec{W}$$
$$\lambda\vec{U}\wedge\mu\vec{V} = \lambda\mu\vec{U}\wedge\vec{V}$$

Produit mixte

$$(\vec{U},\vec{V},\vec{W}) = \vec{U}.(\vec{V}\wedge\vec{W})$$

$$\vec{U}.\left(\vec{V}\wedge\overrightarrow{W}\right)=det\left(\vec{U},\vec{V},\overrightarrow{W}\right)=\begin{vmatrix}u_x & v_x & w_x\\ u_y & v_y & w_y\\ u_z & v_z & w_z\end{vmatrix}$$

Suites et séries

Suites arithmétiques

Premier terme U_0

$$U_{n+1} = U_n + r$$
$$U_n = U_0 + n.r$$
$$U_n = U_p + (n-p).r$$
$$U_p + \cdots + U_n = (n-p+1).\frac{U_p + U_n}{2}$$
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme V_0

$$V_{n+1} = q.V_n$$
$$V_n = q^n V_0$$
$$V_n = q^{n-p}.V_p$$

Si $b \neq 1$

$$V_p + V_{p+1} + \cdots + V_n = V_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}$$

Si $b = 1$

$$S_n = n + 1$$

Formules d'Euler

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Séries de Fourier

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t)$$
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$
$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt$$
$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt$$

Série de Fourier autre écriture

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n.cos\left(\frac{2\pi}{T}nt + \varphi_n\right)$$
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$
$$\cos(\varphi_n) = \frac{a_n}{A_n}$$

Limites

Formes indéterminées

$$\infty - \infty$$
$$0 \times \infty$$
$$\frac{\infty}{\infty}$$
$$\frac{0}{0}$$
$$1^{\infty}$$
$$\infty^{0}$$

Limites des fonctions

Comportement à l'infini

$$\lim_{x\to+\infty} ln\ x = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$$

Si $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty$$

Si $\alpha < 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{x\to 0} ln\ x = -\infty$$

Si $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha} = 0$$

Si $\alpha < 0$,

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha} = +\infty$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{h}-1}{h} = 1$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Croissances comparées à l'infini

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Si $\alpha > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^{\alpha}} = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}.e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\alpha}} = 0$$

Suites

Si $\alpha > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} = +\infty$$

Si $\alpha < 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha} = 0$$

Si $a > 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} a^{n} = +\infty$$

Si $0 < a < 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} a^{n} = 0$$

Si $\alpha > 0$ et $a > 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n}}{n^{\alpha}} = +\infty$$

Développements limités

Formule de Taylor-Young

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + (x - x_0)^n . \varepsilon(x)$$

Avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Formule de Taylor-Mac Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + (x)^n . \varepsilon(x)$$

Avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

Développements limités usuels

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n . x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n . x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha . x + \frac{\alpha . (\alpha - 1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha . (\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)}{n!} . x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n . x^{n+1}}{n + 1} + o(x^{n+1})$$

Analyse

Propriétés algébriques des fonctions usuelles

Fonctions puissances

$$x^0 = 1$$
$$x^\alpha = e^{\alpha.lnx}\ (x > 0)$$
$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha.x^\beta$$
$$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$$
$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha.\beta}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0;+\infty[$ et $y \in [0;+\infty[$

$$y = \sqrt[n]{x} \iff x = y^n$$

Fonctions logarithme et exponentielle

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}\ (x > 0)$$
$$\ln(1) = 0$$
$$\ln(e) = 1$$
$$\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

Si $x \in]-\infty;+\infty[$ et $y \in]0;+\infty[$,

$$y = \exp(x) = e^x \iff x = \ln(y)$$
$$e^0 = 1$$
$$e^{a+b} = e^a.e^b$$
$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$
$$a^x = e^{x.lna}\ (a > 0)$$
$$\log(x) = \frac{lnx}{ln10}$$
$$\log_a(x) = \frac{lnx}{lna}$$
$$(e^a)^b = e^{ab}$$
$$\ln(a^x) = x.lna$$

Logarithme en base a

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Fonctions hyperboliques

$$ch(x) + sh(x) = e^x$$
$$ch(x) - sh(x) = e^{-x}$$
$$ch^2(x) - sh^2(x) = 1$$
$$ch(a+b) = cha.chb + sha.shb$$
$$sh(a+b) = sha.chb + shb.cha$$
$$ch(a-b) = cha.chb - sha.shb$$
$$sh(a-b) = sha.chb - shb.cha$$

$$ch(2x) = ch^2(x) + sh^2(x)$$
$$sh(2x) = 2shx.chx$$

Arithmétique

$$PGCD(a;b) = a \wedge b$$
$$PPCM(a;b) = a \vee b$$
$$a \wedge b = b \wedge a$$
$$a \wedge 1 = 1$$
$$a \wedge a = a$$
$$c(a \wedge b) = ca \wedge cb$$
$$\left(\frac{a}{c}\right) \wedge \left(\frac{b}{c}\right) = \frac{a \wedge b}{c}$$

Identité de Bezout (ou équation de Bezout)

Si a et b sont des entiers naturels alors il existe deux entiers p et q vérifiant

$$a.p + q.b = PGCD(a;b)$$

Dérivation

Dérivée

$$f'(a) = lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}$$

Dérivées usuelles

$$\cos(x)' = -\sin(x)$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$
$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$x^a = a.x^{a-1}$$
$$Arcos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$Arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$Arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Opérations sur les dérivées

$$(u+v)' = u'+v'$$
$$(k.u)' = k.u'$$
$$(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$$
$$(u.v)' = u'.v+u.v'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v-u.v'}{v^2}$$
$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$
$$(v\circ u)' = u'.(v'\circ u)$$
$$(e^u)' = u'.e^u$$
$$(lnu)' = \frac{u'}{u}, u \text{ à } valeurs\ strictement\ positives$$

Intégration

Si $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ alors $g'(x) = f(x)$

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$$

Relation de Chasles

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

Calcul d'intégrale avec primitive

Si F est une primitive de f, alors

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Théorème de Fubini

$$\iint f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Positivité

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors

$$\int_a^b f(t)dt \geq 0$$

Intégration d'une inégalité

Si $a \leq b$ et $f \leq g$, alors

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$$

Valeur moyenne de f sur [a ;b]

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$$

Changement de variable

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f(\Phi(x)).\Phi'^{(x)}.dx = \int_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(\beta)} f(u).du$$

Intégration par parties

$$\int_a^b u(t).v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Equations différentielles

Équations à variables séparables

$$a(x) = b(y).y'$$

Avec $y' = \frac{dy}{dx}$

$$\int a(x)dx = \int b(y)dy$$

Equation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants

Sans second membre

$$y(x)' + a.y(x) = 0$$
$$y(x) = k.e^{ax}$$

Avec second membre

$$y(x)' + a.y(x) = f(x)$$

Solution

$$y(x) = y_s(x) + y_p(x)$$

$y_s(x)$ Solution générale de l'équation sans second membre

$y_p(x)$ Solution particulière de l'équation avec second membre

Second membre	Exemple de solution particulière
$f(x) = C$ avec C constante	Si $b \neq 0$, $y_p(x) = \frac{C}{b}$ Si $b = 0$, $y_p(x) = \frac{C}{a}.x$
$f(x) = P(x)$ P polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$	$y_p(x) = Q(x)$ Q polynôme de degré p tel que Si $b \neq 0$, $p = n$ Si $b = 0$, Q est de la forme $a_1.x + a_2.x^2 + \cdots + a_{n+1}.x^{n+1}$
$f(x) = P(x).e^{sx}$ P polynôme de degré n et s réel	$y_p(x) = Q(x).e^{sx}$ Q polynôme de degré p tel que Si $s \neq \left(-\frac{b}{a}\right)$ alors $p = n$ Si s= $\left(-\frac{b}{a}\right)$, Q est de la forme $a_1.x + a_2.x^2 + \cdots + a_{n+1}.x^{n+1}$
$f(x) = A.\cos(\omega x + \varphi) + B.\sin(\omega x + \varphi)$ ω réel non nul	$y_p(x) = C.\cos(\omega x + \varphi) + D.\sin(\omega x + \varphi)$

Equation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, second membre nul

$$a(x).y''(x) + b(x).y'(x) + c(x).y(x) = f(x)$$

Solution générale de l'équation sans second membre

$$a.y''(x) + b.y'(x) + c.y(x) = 0$$

Soit

$$y(x)=k.e^{r.x}$$

Alors $a.r^2.e^{r.x}+b.r.e^{r.x}+c.e^{r.x}=0 \rightarrow a.r^2+b.r+c=0$: équation caractéristique associée à (1)

- Si les racines r_1 et r_2 sont réelles, alors

$$y_s(x)=A.e^{r1.x}+B.e^{r2.x}$$

- Si $r_1=r_2$, alors

$$y_s(x)=(A.x+B).e^{r1.x}$$

- Si r_1 et r_2 sont complexes, alors

$$y_s(x)=(A.\cos(\beta x)+B.\sin(\beta x)).e^{\alpha.x}$$

Exemples de solutions particulières pour des seconds membres usuels

Second membre	Exemple de solution particulière
$f(x) = P(x)$ P polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$	$y_p(x) = Q(x)$ Q polynôme de degré p tel que Si $c \neq 0$, $p = n$ Si $c = 0$ et $b \neq 0$, Q est de la forme $a_1.x + a_2.x^2 + \cdots + a_{n+1}.x^{n+1}$ Si $c = 0$ et $b = 0$, Q est de la forme $a_2.x^2 + \cdots + a_{n+2}.x^{n+2}$
$f(x) = P(x).e^{sx}$ P polynôme de degré n et s réel	$y_p(x) = Q(x).e^{sx}$ Si s n'est pas racine de l'équation caractéristique, $p = n$ Si s est racine simple de l'équation caractéristique, Q est de la forme $a_1.x + a_2.x^2 + \cdots + a_{n+1}.x^{n+1}$ Si s est racine double de l'équation caractéristique, Q est de la forme $a_2.x^2 + \cdots + a_{n+2}.x^{n+2}$
$f(x) = A.\cos(\omega x + \varphi) + B.\sin(\omega x + \varphi)$ ω réel non nul	Si $j\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $y_p(x) = C.\cos(\omega x + \varphi) + D.\sin(\omega x + \varphi)$ Si $j\omega$ est racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $y_p(x) = x.(C.\cos(\omega x + \varphi) + D.\sin(\omega x + \varphi))$

Une équation particulière

$$y''(x) + \omega^2.y(x) = 0$$
$$f(x) = A.\cos \omega x + B.\sin \omega x$$

Opérateurs vectoriels

Opérateur nabla

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Gradient

Gradient d'une fonction scalaire f

$$\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla} f$$

$$df = \overrightarrow{grad} f . d\overrightarrow{OM}$$

Tenseur gradient du champ vectoriel $\vec{V}$

$$\overline{\overline{grad}}\,\vec{V}$$

Divergence

$$div\,\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V}$$

Rotationnel

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$$

Laplacien

Laplacien d'une grandeur scalaire f en coordonnées cartésiennes

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Laplacien d'une grandeur vectorielle en coordonnées cartésiennes

Vecteur $\vec{v}$ de composantes (u,v,w) dans le repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\Delta\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix}$$

Théorème de Green-Ostrogradski (ou théorème Flux-Divergence)

$$\iiint_V div\,\vec{a}\,.\,dv = \iint_S \vec{a}.\vec{n}.dS$$

Relations usuelles

Soit f une fonction scalaire et $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs. Alors

$$div(f.\vec{a}) = f.div(\vec{a}) + \left(\overrightarrow{grad} f\right).\vec{a}$$

$$div\left(\overrightarrow{grad} f\right) = \Delta f$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad} f\right) = \vec{0}$$

$$div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{a})\right) = 0$$

$$div\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \vec{b}.\overrightarrow{rot}(\vec{a}) - \vec{a}.\overrightarrow{rot}\left(\vec{b}\right)$$

$$\overrightarrow{rot}(f.\vec{a}) = f.\overrightarrow{rot}(\vec{a}) - \vec{a} \wedge \overrightarrow{grad} f$$

$$div(\Delta\vec{a}) = \Delta div(\vec{a})$$

Dénombrement

Soit E un ensemble de n éléments.

Nombre de combinaisons de p éléments de E :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Avec $0\,! = 1$; $n\,! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

$$C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$$

<table>
<tr><th></th><th>Tirage avec ordre
(tirage successif)
de p éléments parmi n</th><th>Tirage sans ordre
(tirage simultané)
de p éléments parmi n</th></tr>
<tr><td>Avec remise</td><td>n^p</td><td rowspan="2">$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$
$= \frac{A_n^p}{p!} = \binom{n}{p}$</td></tr>
<tr><td>Sans remise</td><td>$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$</td></tr>
</table>

Binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i . a^{n-i} . b^i$$

Probabilités

Probabilités d'évènements

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A et B sont incompatibles :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$
$$P(\Omega) = 1$$
$$P(\emptyset) = 0$$

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de A

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Equiprobabilité

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

Probabilités conditionnelles

Probabilité de B sachant A

$$p_A(B) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$$

Si p(A) ≠ 0, A et B indépendants

$$p(B/A) = p(B)$$
$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

Théorème de Bayes

$$p_B(A) = \frac{p_A(B).P(A)}{P(B)}$$

Théorème des probabilités totales

$\{B_1, \dots, B_n\}$ est une partition et $\forall$ i : $P(B_i) \neq 0$

$$P(A) = P(B_1) \times P_{B1}(A) + \cdots + P(B_n) \times P_{Bn}(A)$$

Variable aléatoire

Fonction de répartition

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Espérance mathématique

$$E(X) = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Variance

$$V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Ecart-type

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Propriétés de l'espérance et de la variance

$$E(aX + b) = a.E(X) + b$$
$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$
$$V(aX + b) = a^2.V(X)$$
$$\sigma(aX + b) = a.\sigma(X)$$

$$E\big(X - E(X)\big) = 0$$
$$V(X + \lambda)$$
$$V(\lambda . X) = \lambda^2 . V(X)$$

Formule de König-Huyghens

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - E^2(X)$$

Loi binomiale

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \binom{n}{k} . p^k q^{n-k}$$
$$E(X = n.p$$
$$V(X) = n.p.q$$
$$q = 1 - p$$

Variable aléatoire continue

Probabilité d'un événement

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt$$

Fonction de répartition

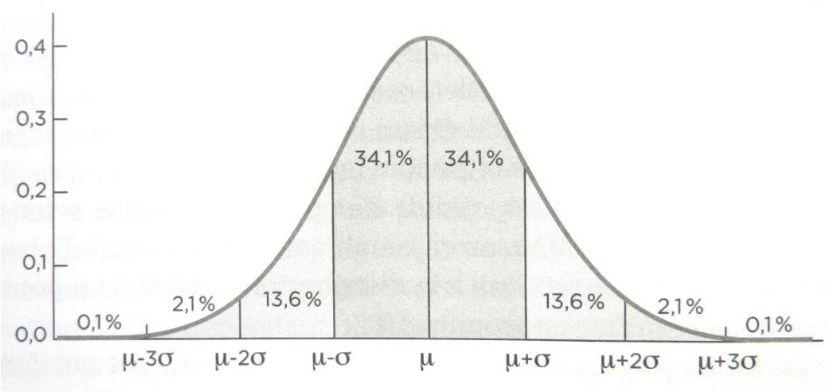
$$p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Loi uniforme sur [a ;b]

$$\forall\, t,\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}\ si\ a \leq t \leq b \\ 0\ sinon \end{cases}$$
$$p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0\ si\ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}\ si\ a \leq x \leq b \\ 1\ si\ x > b \end{cases}$$
$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$
$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

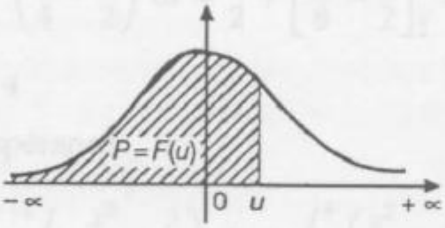
Loi normale centrée réduite

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{-t^2/_2}$$
$$p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{-t^2/_2} dt$$


0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
0,1%
2,1%
13,6 %
34,1%
34,1%
13,6 %
2,1%
0,1%
μ-3σ
μ-2σ
μ-σ
μ
μ+σ
μ+2σ
μ+3σ

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Probabilité $F(u)$ d'une valeur inférieure à u



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Tables pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$F(u)$	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

Statistiques

Indicateurs de position

Moyenne

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} X(i)$$

Indicateurs de dispersion

Ecart absolu moyen

$$EAM(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |X(i) - \bar{X}|$$

Variance

$$V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (X(i) - \bar{X})^2$$

Ecart-type

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Théorème de König-Huygens

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (X(i) - \bar{X})^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X(i)^2\right) - \bar{X}^2$$

Ecart absolu relatif moyen

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left|\frac{X(i) - \bar{X}}{\bar{X}}\right|$$

Coefficient de variation

$$COV(X) = \frac{\sigma(X)}{|\bar{X}|}$$

Théorèmes limites

Inégalité de Tchebychev

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Loi des grands nombres

Soit (Xn) une suite de variables aléatoires indépendantes de même espérance μ et de même variance σ²

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} p(\mu - \varepsilon < \overline{X_n} < \mu + \varepsilon) = 1$$

Théorème central limite

Soit (Xn) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, d'espérance μ et variance σ².

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n.\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

converge en loi vers la loi normale centrée réduite N(0,1).

Covariance de deux variables X et Y

$$cov(X,Y) = E\big(X - E(X)\big).E\big(Y - E(Y)\big) = E(XY) - E(X).E(Y)$$

Sur un échantillon de n couples (x,y), estimateur de la covariance :

$$cov(X,Y) = \frac{1}{n-1} . \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}).(Y_i - \bar{Y})$$

Si les variables X et Y sont indépendantes, alors $cov(X,Y) = 0$

Ajustements

Coefficient de corrélation linéaire

$$r = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)}$$

Méthode des moindres carrés

$$y = b_1 + b_2.x$$

$$b_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i.x_i - n.\bar{y}.\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n.\bar{x}^2}$$

$$b_1 = \bar{y} - b_2.\bar{x}$$

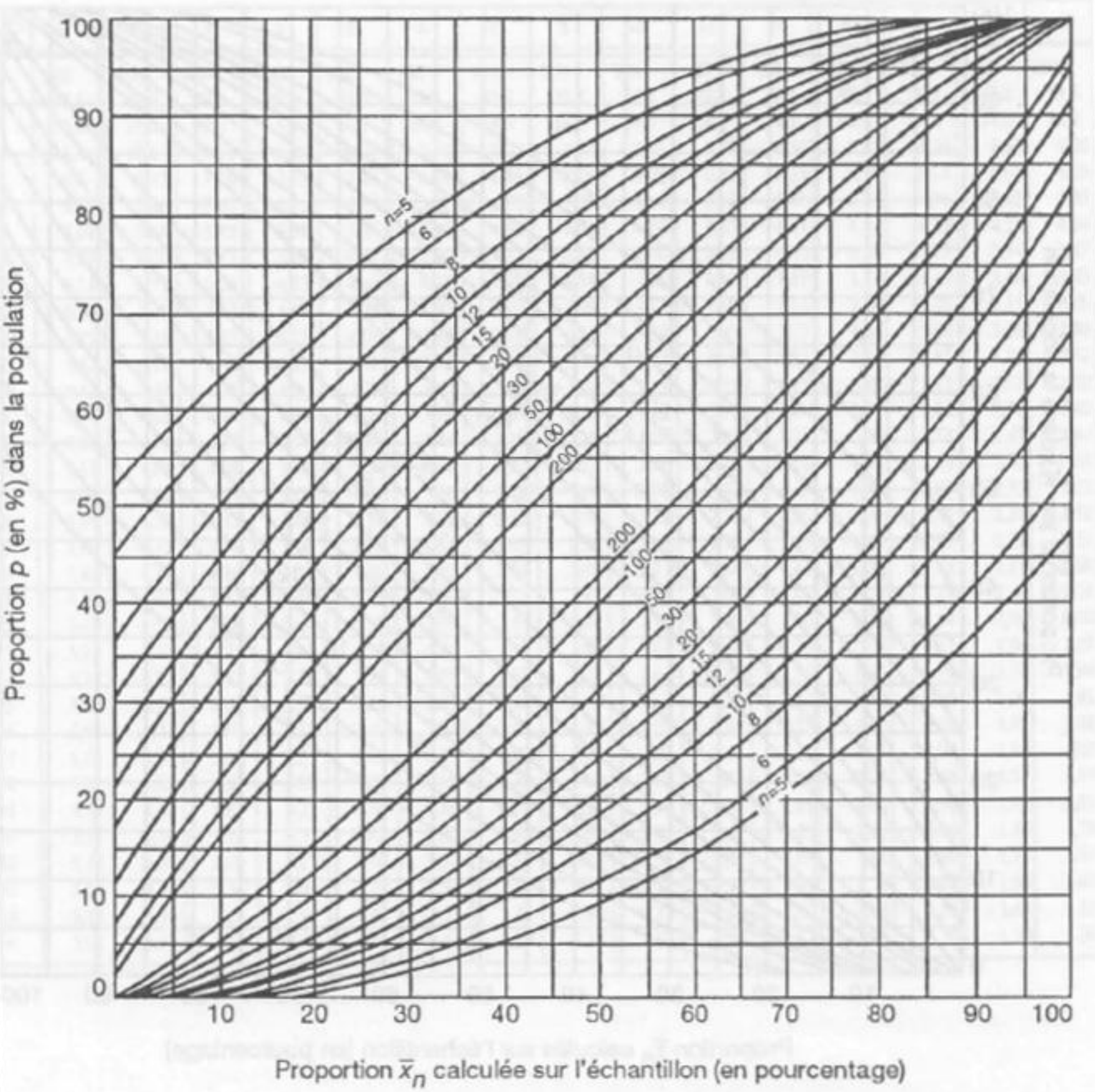
Coefficient de détermination

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - f(x_i))^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$$

Intervalles de confiance pour une proportion p

Intervalle bilatéral de niveau de confiance 0,95

Intervalles unilatéraux de niveau de confiance 0,975



Algèbre de Boole

Opérations booléennes, théorème de De Morgan

Complémentarité	$a \vee \bar{a} = S$	$a \wedge \bar{a} = \sigma$	$\bar{\sigma} = S$	$\bar{S} = \sigma$
Élément neutre	$a \vee \sigma = a$	$a \vee S = S$	$a \wedge \sigma = \sigma$	$a \wedge S = S$
Distributivité	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$		$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	
Associativité	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = a \vee b \vee c$		$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge b \wedge c$	
Commutativité	$a \vee b = b \vee a$		$a \wedge b = b \wedge a$	

Idempotence	$a \vee a = a$		$a \wedge a = a$	
Involution	$\bar{\bar{a}} = a$			
Absorption	$a \vee (a \wedge b) = a$	$a \vee (\bar{a} \wedge b) = a \vee b$	$a \wedge (a \vee b) = a$	$a \wedge (\bar{a} \vee b) = a \wedge b$
Théorème de De Morgan	$\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$		$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$	
Équivalences	$a \wedge b = a \iff a \preccurlyeq b$		$a \vee b = b \iff a \preccurlyeq b$	

Fonctions	Non ou (Nord)	Non et (Nand)	Ou exclusif (Xor)	Non oux
Equations	$S = \overline{a + b} = \bar{a} . \bar{b}$	$S = \overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$	$S = a \oplus b = \bar{a}.b + a.\bar{b}$	$S = \overline{a \oplus b} = \bar{a}.\bar{b} + a.b$

Transformée de Laplace

Transformée de Laplace d'une fonction f

$$F(p) = \int_{0}^{+\infty} e^{-pt}.f(t)dt$$

Impossible d'afficher l'image liée. Le fichier a peut-être été déplacé, renommé ou supprimé. Vérifiez que la liaison pointe vers le fichier et l'emplacement corrects.

CESI_
ÉCOLE D'INGÉNIEURS

Alphabet Grec

Minuscule	Usage en maths	Appellation	Majuscule	Usage en maths	Correspondant français
α	***	alpha	Α		a
β	***	bêta	Β		b
γ	***	gamma	Γ	*	g
δ	***	delta	Δ	***	d
ε	**	epsilon	Ε		e
ζ	*	zêta	Ζ		z
η	*	êta	Η		e grave, ê
θ	***	thêta	Θ	*	t
ι		iota	Ι		i
κ		kappa	Κ		k
λ	***	lambda	Λ	*	l
μ	**	mu	Μ		m
ν	*	nu	Ν		n
ξ	*	xi	Ξ		x
ο		omicron	Ο		o
π	***	pi	Π	*	p
ρ	*	rhô	Ρ		r
σ	**	sigma	Σ	***	s
τ	*	tau	Τ		t
υ		upsilon	Υ		u
φ	**	phi	Φ	*	ph ou f
χ	*	khi	Χ		ch dur ou q
ψ	*	psi	Ψ	*	ps
ω	***	oméga	Ω	**	o grave, ô

Notations

$\mathbb{N}$: ensemble des nombres entiers naturels {0,1,2,3,………}
$\mathbb{N}^*$: ensemble des nombres entiers strictement positifs {1,2,3,………}
$\mathbb{Z}$: ensemble des nombres entiers relatifs {…,-3,-2,-1,0,1,2,3………}
$\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels {p/q avec p entier relatif et q entier naturel différent de 0}
$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^*$: ensemble des nombres réels non nuls
$\mathbb{R}^+$: ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{B}$: ensemble des bits $\mathbb{B} = \{0,1\}$
$\in$ / $\notin$ appartient à / n'appartient pas à
$\exists$ / $\nexists$ il existe / il n'existe pas
$\emptyset$: ensemble vide
$\cup$: union de deux ensembles
$\cap$: intersection de deux ensembles
$\wp(E)$: ensemble des parties de E
$\forall$: pour tout
F^E : ensemble des applications de E dans F
card(E) : cardinal de E
$n!$: factorielle de n. $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$
A_n^p : nombre d'arrangements de p parmi n éléments
$C_n^p = \binom{p}{n}$: nombre de combinaisons de p parmi n éléments
$\sum_{i=1}^{n} \square$: somme pour i variant de 1 à n
inf(E) : plus petit élément de l'ensemble ordonné E
sup(E) : plus grand élément de l'ensemble ordonné E
$\bar{A}$: complémentaire de A
$P_A(B)$: probabilité de B sachant A
$\neg$: négation
$\wedge \square$: connecteur logique et (somme booléenne)
$\vee \square$: connecteur logique ou (produit booléen)
$\mathcal{F}n$: ensemble des fonctions booléennes de n variables booléennes
$\Longrightarrow$: implication
$\Longleftrightarrow$: équivalence
$\forall x\ P(x)$: la proposition P(x) est vraie quel que soit x
$\exists x\ P(x)$: il existe au moins un x pour qui la proposition P(x) est vraie