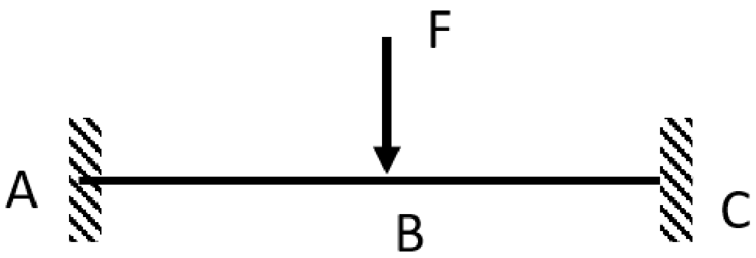
Résistance des Matériaux – Cahier d'exercices 1

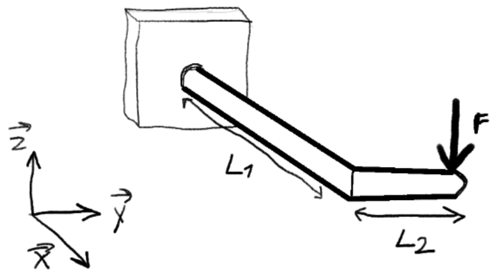


F. Menan
fmenan@cesi.fr
Juillet 2025

Table des matières

1 Exercice : moment d'une force

Soit une poutre encastrée dans un mur au point B(0 ;0 ;0) et soumise à une force $\vec{F} = -F.\vec{z}$ appliquée en A (L_1 ;L_2 ;0).



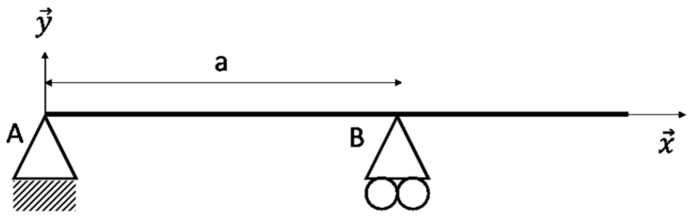
Déterminer en B le moment de la force $\vec{F}$ exercée en A.

2 Exercice : poutre en flexion : influence de la position de l'appui

Soit une poutre de longueur L reposant sur deux appuis A et B.

La distance entre A et B est appelée a, avec $a \leq L$. La poutre est donc en porte-à-faux entre B et son extrémité.

On applique une charge linéique q (en N/m) sur toute la poutre.



1/ Déterminer les réactions Y_A et Y_B aux appuis en A et B en fonction de la q, L et a.

On propose d'étudier l'influence de l'emplacement de l'appui B (donc l'influence de a) sur la valeur des réactions aux appuis.

On considère que

$$0{,}2.L \leq a \leq L$$

2/ Etudier les variations de Y_A en fonction de a

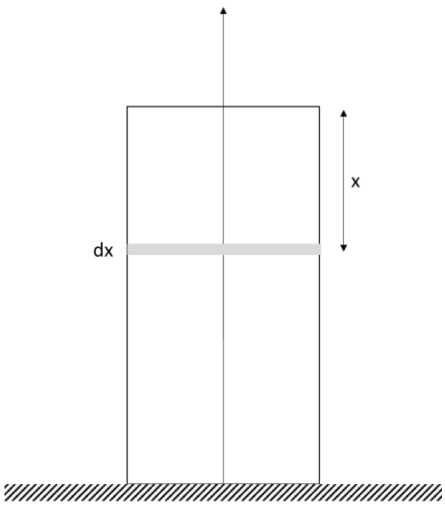
3/ Etudier les variations de Y_B en fonction de a

4/ Tracer sur un même graphe, en fonction de a, les réactions Y_A et Y_B, et la somme $Y_A + Y_B$ pour $q = 2\ kN/m$ et $L = 5m$.

3 Exercice : déformation d'un pilier sous son propre poids

Soit un pilier vertical de masse volumique ρ, module d'élasticité E, de section S, hauteur H, posé au sol et comprimé sous son poids propre.

Calculer la variation de longueur totale du pilier vertical.



4 Exercice : solide d'égale résistance

Soit une poutre encastrée à gauche et libre à droite, de longueur L, de largeur b, de limite d'élasticité R_e.

La poutre est soumise à une force P verticale, appliquée à son extrémité.

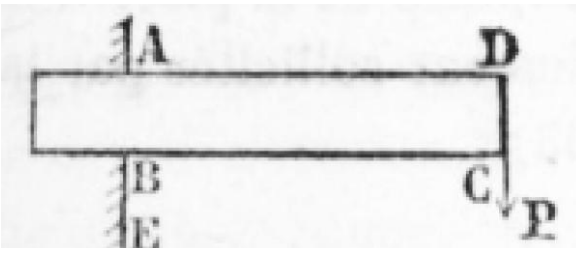
On propose d'appliquer à la poutre une hauteur h variable telle que, dans la section d'abscisse x

$$h^2 = \frac{6P}{R_e.b}.(L-x)$$

1/ Calculer le moment fléchissant $M_f(x)$ dans une section d'abscisse x

2/ En déduire la contrainte maximale dans la section. Que peut-on observer ?

3/ Représenter la hauteur h de la poutre le long de la poutre



5 Corrections

5.1 Exercice : moment d'une force

Correction

Moment en B dû à la force $\vec{F}$ en A

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$$

Or le moment en A dû à la force en A est nul : $\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{0}$ donc

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F.L_2 \\ F.L_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.2 Exercice : poutre en flexion, appui mobile

Correction

1/ Principe Fondamental de la Statique

$$Y_A + Y_B - q.L = 0$$

$$Y_B.a - q.\frac{L^2}{2} = 0$$

Donc

$$Y_B = q.\frac{L^2}{2a}$$

$$Y_A = -Y_B + qL = q.\frac{L^2}{2a} + qL = \frac{-qL^2 + 2qLa}{2a} = qL.\frac{(-L + 2a)}{2a}$$

2/

$$Y_A'(x) = qL.\frac{4a - 2(2a - L)}{4a^2} = qL.\frac{2L}{4a^2}$$

Pour tout x de I, $Y_A'(x) > 0$ donc la fonction g est strictement croissante

$$\lim_{x \to 0,2L} Y_A = -\frac{3qL}{2}$$

$$\lim_{x \to L} g(x) = \frac{qL}{2}$$

3/

$$Y_B = q.\frac{L^2}{2a}$$

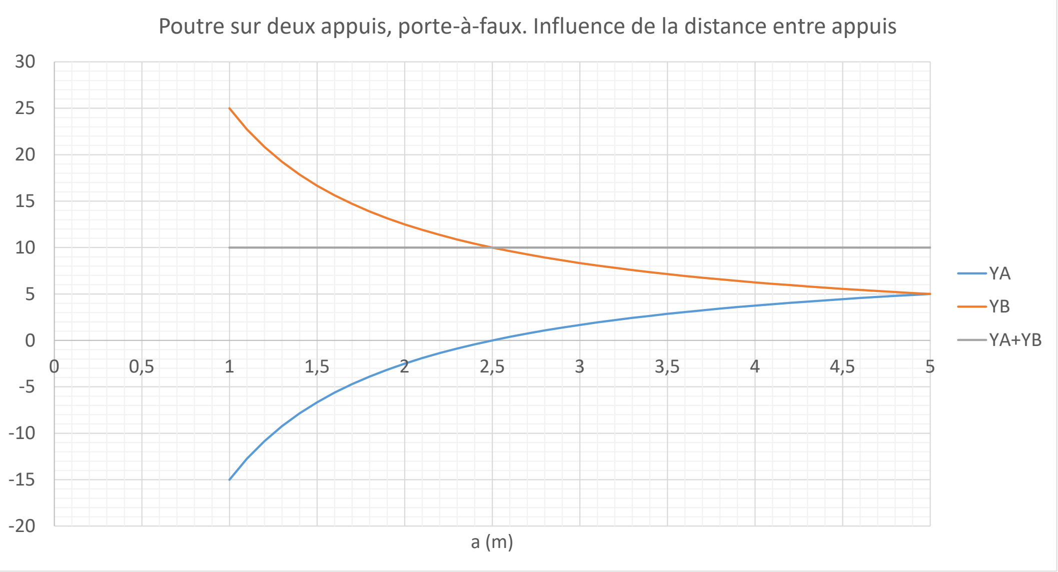
$$Y_B'(a) = -\frac{qL^2}{2}.\frac{1}{a^2}$$

Pour tout x de I, $Y_B'(a) < 0$ donc la fonction Y_B est strictement décroissante

$$\lim_{x \to 0,2L} f(x) = \frac{qL}{0,4} = 2,5qL$$

$$\lim_{x \to L} f(x) = \frac{qL}{2}$$

4/



5.3 Exercice : déformation d'un pilier sous son propre poids

Correction

Contrainte dans une section S, pour un effort normal F :

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

La déformation du pilier a pour expression

$$\varepsilon = \frac{\Delta H}{H}$$

ΔH : variation de la hauteur H.

Loi de Hooke

$$\sigma = E.\varepsilon$$

L'élément de hauteur dx, situé à la distance x du sommet, est soumis à la force F telle que :

$$F = \rho.S.x.g$$

La déformation a donc pour expression, avec la loi de Hooke

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\rho.S.x.g}{S}.\frac{1}{E} = \frac{\rho.x.g}{E}$$

La déformation a aussi pour expression

$$\varepsilon = \frac{dx - dx'}{dx}$$

dx : hauteur avant déformation

dx' : hauteur après déformation

donc

$$dx' = -\varepsilon.dx + dx = dx.\left(1 - \frac{\rho.x.g}{E}\right)$$

La hauteur H' après déformation s'obtient en intégration dx' sur tout le pilier :

$$H' = \int_0^H dx' = \int_0^H dx.\left(1 - \frac{\rho.x.g}{E}\right) = \left[x - \frac{\rho.x^2.g}{2E}\right]_0^H = H - \frac{\rho.H^2.g}{2E}$$

La variation de hauteur est donc

$$H' - H = \frac{\rho.H^2.g}{2E}$$

$$H' - H = \frac{\rho.H^2.g}{2E} = \frac{P.H}{2ES}$$

Avec P poids du pilier tel que $P = \rho.H.S.g$

5.4 Exercice : solide d'égale résistance

Correction

1/

$$M_f(x) = -P.(L - x)$$

2/ Par définition, la contrainte normale dans la section S au point d'ordonnée y a pour expression

$$\sigma(y) = -\frac{M_f . y}{I_z}$$

Donc pour $y = h/2$ on a la contrainte maximale de flexion

$$\sigma_{max} = \frac{P.(L-x).\frac{h}{2}}{b.\frac{h^3}{12}} = \frac{6P.(L-x)}{b.h^2}$$

Avec l'expression de h proposée dans l'énoncé on a

$$\sigma_{max} = \frac{6P.(L-x)}{b.\frac{6P}{R_e.b}.(L-x)} = R_e$$

La contrainte maximale de flexion est la même dans toute section de la poutre et est égale à R_e.

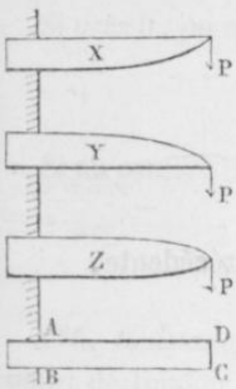
On parle de solide d'égale résistance.

3/

Supposant au contraire que la largeur b reste constante, et résolvant l'équation par rapport à h, on aura, pour une valeur quelconque l de L,

$$h^2 = \frac{6P}{Rb}\,l.$$

Fig. 29.



C'est-à-dire que le carré de la hauteur h sera proportionnel à l ; et la pièce qui est représentée en plan par le rectangle ABCD (fig. 29), dont la dimension AB = b, le sera en élévation par l'une quelconque des trois formes paraboliques X, Y, Z, dont le sommet est au point d'application de la force P.

On peut, en opérant d'une manière analogue, déterminer la forme des solides d'égale résistance pour toutes les manières dont peuvent reposer les solides, et quelle que soit la manière dont ils sont chargés.

[1]

6 Références

[1] J. Buchetti, *Manuel des constructions métalliques et mécaniques*. 1888. [En ligne]. Disponible sur: http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb301722737