Exercice : ligne d'influence d'une charge mobile sur une poutre continue à deux travées

-

On propose de mettre en évidence les lignes d'influence pour le moment sur l'appui central et pour le moment en travée, pour une poutre continue à deux travées.

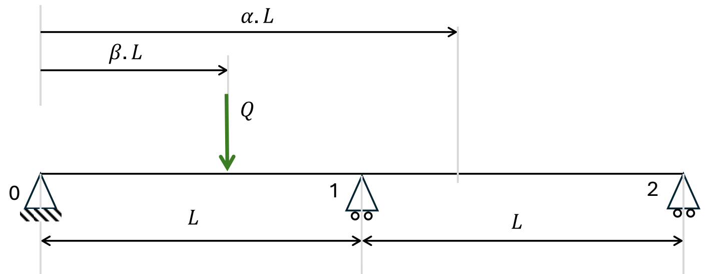
Cet exercice s'inspire de la ressource du CTICM (Palacios, s. d.) : « Lignes d'influence d'une charge mobile sur une poutre sur 3 appuis - Romain Palacios, chef de projets recherche, CTICM – Mai 2025 ». https://metaletech.com/2025/04/28/lignes-dinfluence-dune-charge-mobile-sur-une-poutre-sur-3-appuis/

1 Sujet

Soit une poutre continue de deux travées de longueur identique L.

Le module d'Young E et le moment quadratique I sont constants sur toute la poutre.

La poutre est soumise à une charge ponctuelle Q, appliquée à la distance $\beta.L$ de l'appui de gauche, avec $0 \leq \beta \leq 2$.



Partie 1. Ligne d'influence pour le moment sur l'appui 1

1. Déterminer l'expression du moment M_1 sur l'appui central en fonction de Q, β et L.
2. Soit la fonction $\mu_1(\beta)$ telle que $M_1 = QL.\mu_1(\beta)$. Déterminer l'expression de μ_1 et tracer μ_1 en fonction de β.
3. Déterminer la valeur de β correspondant au maximum du moment M_1

Partie 2. Ligne d'influence pour le moment en travée

On se place dans la section x telle que $x = \alpha.L$.

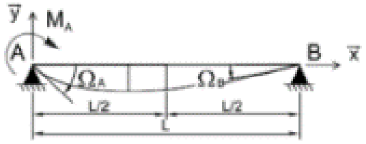
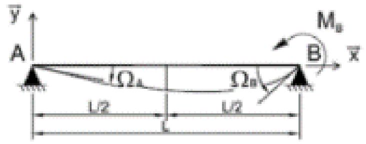
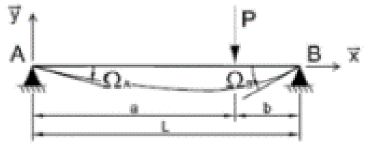
Seul varie le point d'application de la charge, point d'abscisse $\beta.L$ avec $0 \leq \beta \leq 2$.

1. Déterminer l'expression du moment fléchissant M en travée en fonction de Q, β et L.
2. Soit la fonction $\mu_2(\beta)$ telle que $M = QL.\mu_2(\beta)$. Déterminer l'expression de $\mu_2(\beta)$ et tracer μ_2 en fonction de β.
3. Déterminer la valeur de β correspondant au maximum du moment M

Partie 3. Synthèse

1. Conclure sur les deux positions d'une surcharge ponctuelle en travée 1, pour le moment sur appui central et le moment en travée.

2 Formulaire

Géométrie et chargement	Ω_A	Ω_B	flèche en x=L/2
	$\dfrac{-M_A L}{3EI}$	$\dfrac{M_A L}{6EI}$	$\dfrac{-M_A L^2}{16EI}$
	$\dfrac{-M_B L}{6EI}$	$\dfrac{M_B L}{3EI}$	$\dfrac{-M_B L^2}{16EI}$
	$-\dfrac{Pab(L+b)}{6EIL}$	$\dfrac{Pab(L+a)}{6EIL}$	

3 Correction

<u>Partie 1. Ligne d'influence pour le moment sur l'appui 1</u>

1/

- Pour $0 \leq \beta \leq 1$ (charge sur la travée 1)

Théorème des trois moments sur l'appui central

$$M_0.L + 2M_1.2L + M_2.L = 6EI.\left(\Omega_d - \Omega_g\right)$$

$$M_0 = 0\,;M_2 = 0\,;\Omega_g = \frac{Q.\beta L.(L-\beta L).(L+\beta L)}{6EIL}\,;\Omega_d = 0$$

$$M_1 = -\frac{6EI}{4L}.\frac{Q.\beta L.(L-\beta L).(L+\beta L)}{6EIL}$$

Finalement,

$$M_1 = 0{,}25 \times Q.\beta.L.(\beta^2 - 1)$$

- Pour $1 \leq \beta \leq 2$ (charge sur la travée 2)

Théorème des trois moments sur l'appui central

$$M_0.L + 2M_1.2L + M_2.L = 6EI.\left(\Omega_d - \Omega_g\right)$$

$$M_0 = 0\,;\; M_2 = 0\,;\; \Omega_g = 0\,;\; \Omega_d = -\frac{-Q.(L-\beta L).(2L-\beta.L).(L+2L-\beta.L)}{6EIL}$$

Finalement,

$$M_1 = 0{,}25 \times QL.(2-\beta).(3-4\beta+\beta^2)$$

2/ On a

$$\begin{cases} \mu_1(\beta) = 0{,}25.\beta.(\beta^2 - 1) & 0 \leq \beta \leq 1 \\ \mu_1(\beta) = 0{,}25.(2-\beta).(3-4\beta+\beta^2) & 1 \leq \beta \leq 2 \end{cases}$$

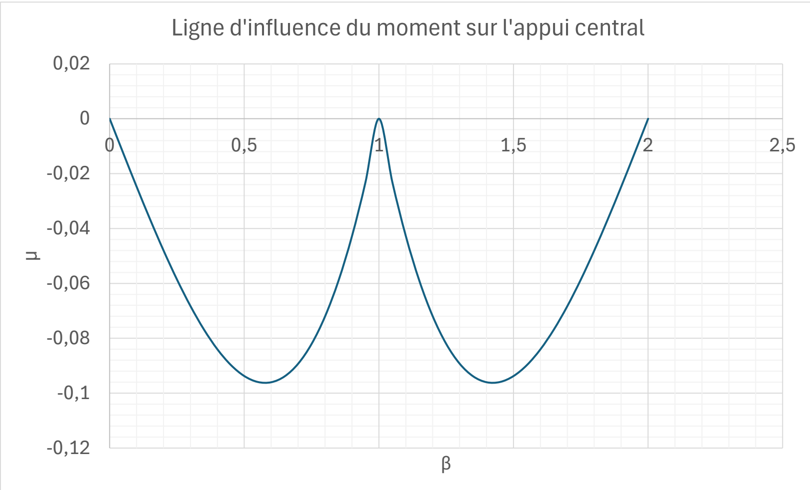


Figure 1. Ligne d'influence du moment sur l'appui central

3/ Valeur de β correspondant au maximum du moment M_1

Pour $0 \leq \beta \leq 1$

$$\frac{d\mu_1}{d\beta} = 0{,}25.(\beta^2 - 1) + 0{,}25.\beta.2\beta = 0{,}75\beta^2 - 0{,}25$$

$$\frac{d\mu_1}{d\beta} = 0 \Leftrightarrow \beta = \sqrt{\frac{0{,}25}{0{,}75}} \approx 0{,}577$$

Pour $1 \leq \beta \leq 2$

$$\mu_1(\beta) = 0{,}25.(2 - \beta).(3 - 4\beta + \beta^2)$$

$$\frac{d\mu_1}{d\beta} = -0{,}25.(3 - 4\beta + \beta^2) + 0{,}25.(2 - \beta).(-4 + 2\beta)$$

$$\frac{d\mu_1}{d\beta} = 0 \Leftrightarrow \beta = 1{,}423$$

Remarque : par symétrie on pouvait deviner que le moment sur appui max est pour $\beta = 0{,}577$ en partant de l'appui de droite, donc 1,423 en partant de l'appui de gauche.

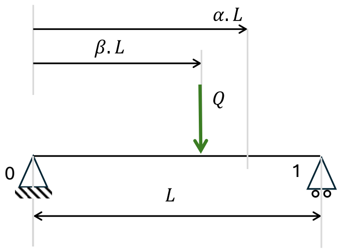
Partie 2. Ligne d'influence pour le moment sur travée

1/ En travée 1

- Pour $0 \leq \beta \leq \alpha$

$$M(\alpha.L) = m_0(\alpha.L) + M_1.\frac{\alpha.L}{L}$$

Calcul de $m_0(x)$: c'est le moment fléchissant pour une charge ponctuelle située à la distance $\beta.L$ de l'appui 0, dans une section à droite du point d'application de la charge.



PFS

$$Y_0 + Y_1 - Q = 0$$

$$Y_1.L - Q.\beta.L = 0 \Longrightarrow Y_1 = Q.\beta$$

Donc

$$m_0(x) = Q.\beta.(L - \alpha.L)$$

Donc pour $x = \alpha.L$

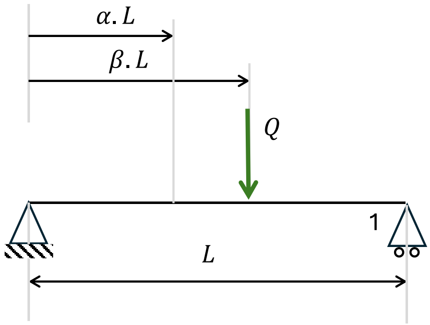
$$M = Q.\beta.(L - \alpha.L) + M_1.\alpha$$

$$\boxed{M = Q.\beta.L.(1-\alpha) + \mu_1.Q.L.\alpha = Q.L.\big(\beta.(1-\alpha) + 0{,}25.\alpha.\beta.(\beta^2-1)\big)}$$

- Pour $\alpha \leq \beta \leq 1$

$$M(\alpha.L) = m_0(\alpha.L) + M_1.\frac{\alpha.L}{L}$$

Calcul de $m_0(x)$: c'est le moment fléchissant pour une charge ponctuelle située à la distance $\beta.L$ de l'appui 0, dans une section à gauche du point d'application de la charge.



On a toujours $Y_1 = Q.\beta$

$$m_0(x) = Q.\beta.(L-\alpha.L) - Q.(\beta.L-\alpha.L) = Q.L.(\beta-\beta.\alpha-\beta+\alpha) = Q.L.\alpha.(1-\beta)$$

Donc

$$M = Q.\alpha.L.(1-\beta) + \mu_1.Q.L.\alpha = Q.L.(\alpha.(1-\beta) + \mu_1.\alpha)$$

$$\boxed{M = Q.L.(\alpha.(1-\beta) + 0{,}25.\beta.(\beta^2-1).\alpha)}$$

- Pour $1 \leq \beta \leq 2$

$$M = m_0(x) + M_1.\frac{x}{L} = M_1.\frac{x}{L}$$

On est toujours dans la travée 1, c'est la charge qui est passée dans la travée 2. La travée 1 n'est plus chargée donc $m_0(x) = 0$.

$$\boxed{M = QL.\mu_1.\alpha = QL.\alpha.0{,}25.(2-\beta).(3-4\beta+\beta^2)}$$

Finalement

$$\boxed{\mu_2(\alpha;\beta) = \begin{cases} \beta.(1-\alpha) + 0{,}25.\alpha.\beta.(\beta^2-1) & pour\ 0 \leq \beta \leq \alpha \\ \alpha.(1-\beta) + 0{,}25.\alpha.\beta.(\beta^2-1) & pour\ \alpha \leq \beta \leq 1 \\ \alpha.0{,}25.(2-\beta).(3-4\beta+\beta^2) & pour\ 1 \leq \beta \leq 2 \end{cases}}$$

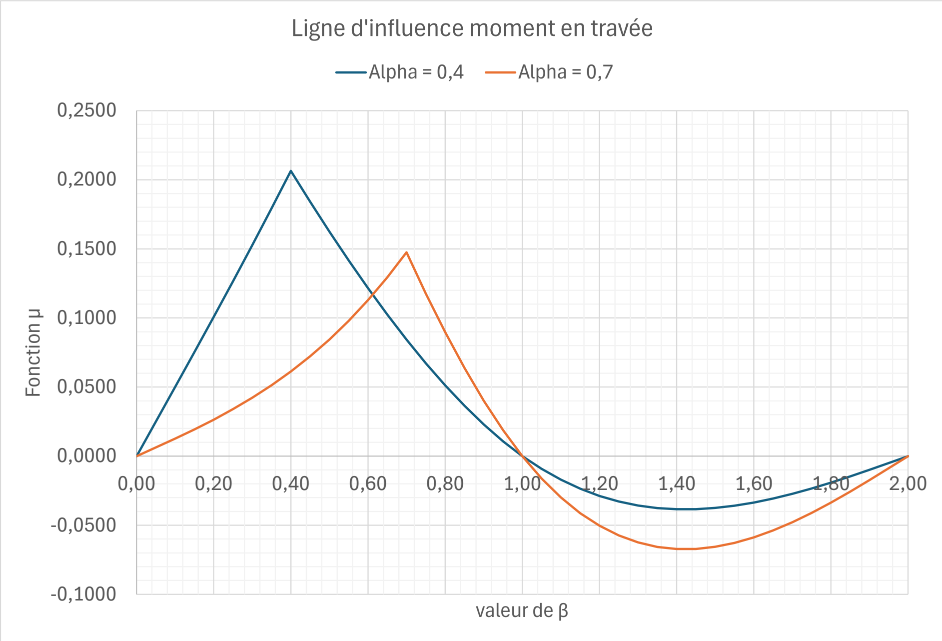


Figure 2. Ligne d'influence du moment dans la travée 1. Exemple pour deux valeurs de α

3/ Valeur de β correspondant au maximum du moment M

Le moment fléchissant dû à la charge ponctuelle Q est maximal au point d'application de la force Q, donc pour $\alpha = \beta$.

Ainsi, dans la travée 1,

$$M_{max} = Q.L.[\beta.(1-\beta) + 0{,}25.\beta^2.(\beta^2 - 1)]$$

Ce moment est tracé en vert ci-dessous.

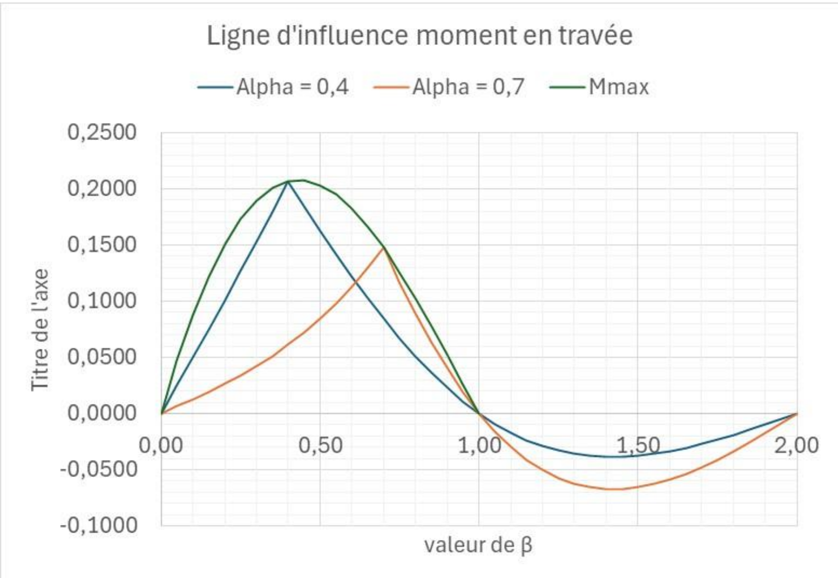


Figure 3. En vert, moment en travée lorsque la charge ponctuelle Q est appliquée dans la section étudiée (Moment maximal en travée)

Ce moment atteint sa valeur maximale pour β tel que

$$\frac{dM_{max}}{d\beta} = Q.L.[(1-\beta) - \beta^2 + 0{,}5.\beta.(\beta^2 - 1) + 0{,}5.\beta^3] = 0$$

$$\frac{dM_{max}}{d\beta} = 0 \Leftrightarrow 1 - \beta - \beta^2 + 0{,}5.\beta^3 - 0{,}5\beta + 0{,}5.\beta^3 = \beta^3 - \beta^2 - 1{,}5.\beta + 1 = 0$$

La seule racine possible de cette équation est 0,432 car β doit être compris entre 0 et 1 (effort dans la travée 1).

Partie 3. Conclusion

Finalement

- Le moment max sur l'appui central est atteint quand $\beta = 0{,}577$.
- Le moment max en travée est atteint quand $\beta = 0{,}432$.

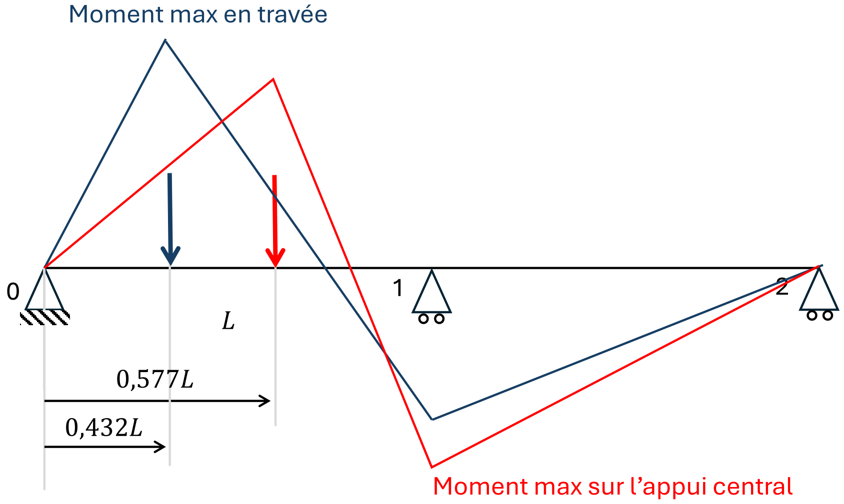


Figure 4. Cas donnant le moment maximal sur appui et le moment maximal en travée (Palacios, s. d.)

4 Références

Goulet, J., Boutin, J.-P., & Lerouge, F. (2019). *Résistance des matériaux* (10e éd.). Dunod : Editions le Moniteur.

Palacios, R. (s. d.). *Lignes d'influence d'une charge mobile sur une poutre sur 3 appuis—CTICM – Mai 2025*. https://metaletech.com/2025/04/28/lignes-dinfluence-dune-charge-mobile-sur-une-poutre-sur-3-appuis/

5 Pour aller plus loin

Voir (Goulet et al., 2019, p. 126)