Mathématiques

-

Introduction à la théorie des jeux

Frédéric Menan

fmenan@cesi.fr

01/2025

Table des matières

1 Quelques questions à se poser avant de démarrer tout type de jeu

Qu'est-ce qui différencie le jeu de l'oie, les échecs, les jeux de cartes, les dominos……….etc. ?

On peut se poser les questions suivantes :

1.1 La situation initiale est-elle due au hasard ou définie à l'avance ?

- A un jeu de cartes comme le poker, les cartes qu'ont chaque joueur sont définies par le hasard.
- Aux dominos, les dominos possédés par chaque joueur en début de partie relèvent du hasard.
- Aux échecs, aux dames, la situation initiale est déterminée sans aucun hasard.

1.2 Est-ce que chaque coup contient une part de hasard ou pas ?

- Au jeu de l'oie, chaque coup est décidé par le lancer de dés, chaque joueur se contente d'avancer son pion en fonction du résultat. Les mathématiques ne seront pas d'une grande utilité….
- Aux échecs, aux dames, aux dominos, chaque coup est décidé par le joueur en fonction d'une *stratégie*.

1.3 Est-ce que chaque joueur joue en même temps ou est-ce que chaque joueur joue chacun son tour ? Notion de jeu statique (ou simultané) et de jeu dynamique (ou séquentiel)

- Quand chaque joueur joue en même temps, on parle de jeu statique (ou simultané).
- Quand chaque joueur joue chacun son tour, on parle de jeu dynamique (ou séquentiel).

1.4 Est-ce que les joueurs peuvent discuter de leur stratégie initiale et donc « collaborer » ou est-ce que les joueurs ne sont pas informés de la stratégie de l'autre ? Notion de jeu coopératif ou non coopératif

- On parle de jeu non coopératif quand les deux joueurs ne peuvent pas communiquer entre eux.
- On parle de jeu coopératif si les joueurs peuvent échanger et « s'allier » avant de s'engager dans le jeu.

1.5 Est-ce que les joueurs connaissent le choix de l'adversaire avant de joueur ou pas ? Notion de jeu à information parfaite ou imparfaite

- Quand chaque joueur connait exactement le choix des autres joueurs, on parle de jeu à information parfaite, ou complète (exemple : les échecs)
- Quand un joueur doit décider d'un coup sans connaitre le choix des autres joueurs, on parle de jeu à information imparfaite (exemple : « pierre, papier, ciseaux »)

1.6 Est-ce que tous les gains d'un joueur sont les pertes de l'autre ? Notion de jeu à somme nulle ou à somme non nulle

- Dans un jeu à somme nulle, les bénéfices d'un joueur sont égaux aux pertes de l'autre joueur. Il n'y a donc qu'un seul gagnant, ce gagnant percevant l'ensemble des gains possibles du jeu. Les jeux à somme nulle sont des cas particuliers de jeux à somme constante, où la somme des gains perçus par les joueurs est la même dans toutes les configurations possibles du jeu
- Sinon on parle de jeu à somme non nulle

Remarque

On entrevoit la différence entre les jeux de hasard sans aucune stratégie possible et où les mathématiques ne seront pas d'une grande aide (jeu de l'oie par exemple où à la fois la situation initiale et chaque coup sont totalement dus au hasard), des jeux où malgré une situation initiale aléatoire, une stratégie est possible en cours de jeu (dominos, cartes……..).

On va maintenant aborder la théorie des jeux orientée sur la **prise de décision**.

Les premiers travaux remontent à Zermelo et Borel dans la première moitié du XXe siècle. Cette discipline prend son essor avec Von Neumann & Morgenstern dans les années 1940. Leur objectif était de mieux comprendre et donc de mieux modéliser le fonctionnement des systèmes économiques. Puis John Nash en 1950 y apporte une pierre angulaire avec sa notion d'équilibre de Nash.

Dans cette partie, on aborde des jeux à 2 joueurs même si l'équilibre de Nash vaut pour n joueurs. Chaque joueur sera confronté à plusieurs choix. Chaque joueur devra faire son choix sans connaitre le choix de l'autre joueur. Par contre, les joueurs connaissent parfaitement les pertes et gains possibles en fonction de l'issue du jeu (en fonction du choix des deux joueurs).

Dans le module 4, on traitera d'autres types de jeux où les propriétés des entiers et donc l'arithmétique se révèle intéressante.

2 Stratégie

Une stratégie est un plan d’actions spécifiant l’ensemble des décisions que doit prendre le joueur au cours du jeu.

2.1 Stratégie pure

Une stratégie pure est un des choix que peut faire chaque joueur.

Exemple 1

Deux joueurs jouent en même temps et ne peuvent communiquer entre eux.

Chaque joueur doit choisir la lettre A ou B.

Chaque case correspond au gain du joueur 1 et au gain du joueur 2 : si le choix est (A,A), le joueur 1 gagne 6 et le joueur 2 gagne 5. Si le choix est (B,A), le joueur 1 gagne 2 et le joueur 2 gagne 3.

Le tableau ci-dessous est aussi appelé matrice des payoffs (gains en anglais).

Pour chaque joueur, A est une stratégie pure et B est une stratégie pure.

		Joueur 2	
		A	B
Joueur 1	A	(6,5)	(6 ;6)
	B	(2 ;3)	(11 ;4)

2.2 Stratégie mixte

Une stratégie prenant en compte des probabilités, et mêlant une ou plusieurs stratégies pures est appelée *stratégie mixte*.

Exemple 2

Considérons le jeu ci-dessous. On parle du jeu des matching pennies car il peut se faire avec des pièces de monnaie (pennies).

		Joueur 2	
		A	B
Joueur 1	A	1,-1	-1,1
	B	-1,1	1,-1

2 joueurs doivent choisir chacun la lettre A ou la lettre B.

Si les joueurs choisissent la même lettre, A gagne 1 et B perd 1.

Si les joueurs choisissent une lettre différente de l’autre, A perd 1 et B gagne 1.

Si le joueur 2 joue trop souvent B, le joueur 1 pourra s’adapter et jouer tout le temps B afin de gagner plus souvent. Le joueur 2 va s’en rendre compte et jouera A pour gagner, mais alors le joueur 1……etc.

Il n’existe pas de stratégie pure qui puisse apporter un gain certain aux joueurs. Chaque joueur doit jouer A ou B avec la même probabilité de 50%. On parlera de *stratégie mixte*. Chaque stratégie pure est associée à une probabilité de jouer telle ou telle stratégie, ou pour être plus concret, à un pourcentage de fois où il faudrait joueur cette stratégie.

3 Équilibre de Nash (John Nash 1950)

Un équilibre de Nash est un ensemble de stratégies (une par joueur) tel qu'aucun joueur ne peut obtenir un gain supplémentaire en changeant unilatéralement de stratégie.

Une autre définition équivalente est de dire qu'un équilibre de Nash est un ensemble de stratégies (une par joueur) tel que la stratégie de chaque joueur est une meilleure réponse aux stratégies des autres.

Théorème

Tout jeu statique fini admet au moins un équilibre de Nash (éventuellement en stratégies mixtes).

Figure 1 : John Forbes Nash (1928-2015) https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Nash/

La (très courte) thèse de doctorat de John Nash

http://web.archive.org/web/20150608125658/http://www.princeton.edu/mudd/news/faq/topics/Non-Cooperative_Games_Nash.pdf

Revenons à l'Exemple 1

Chaque joueur veut maximiser son gain, peu importe l'impact sur les gains de l'autre joueur.

On voit que le joueur 2 a intérêt à choisir la lettre B car quel que soit le choix du joueur 1, il remporte plus de gains que s'il avait choisir A (si le joueur 1 choisit A ou B, dans les deux cas le joueur 2 a intérêt à choisir B). Si le joueur 1 suppose que le choix de B sera rationnel, c'est-à-dire qu'il fera le choix que l'on vient de présenter, alors le joueur 1 sait que le joueur 2 va choisir B. Dans ce cas, le joueur gagne 6 s'il choisit A et 11 s'il choisit B. Il va bien sûr choisir B.

Finalement, si chaque joueur effectue un choix rationnel, le choix sera toujours (B,B). On dira qu'il existe un équilibre de Nash en stratégie pure pour chaque joueur.

Remarque

Dans l'Exemple 1, si le joueur 2 change sa stratégie pour A et que le joueur 1 ne change rien, B gagnera 3 au lieu de 4. Si le joueur 1 change sa stratégie pour A et que le joueur 2 ne change rien, A gagnera 6 au lieu de 11. A l'issue du jeu, aucun joueur n'aurait donc préféré jouer autrement.

L'équilibre de Nash peut ainsi se définir de la façon suivante : une fois que l'on a joué et que le résultat est connu, si chaque joueur estime avoir joué de la meilleure façon possible (s'être le mieux adapté compte-tenu du choix que l'autre joueur était amené à faire), ou encore dit autrement si aucun joueur ne regrette sa stratégie, alors il existe un équilibre de Nash.

Exemple 3

Soit le jeu ci-dessous.

		Joueur 2	
		A	B
Joueur 1	A	(7,3)	(7,4)
	B	(3,4)	(10,5)

On voit que le joueur 2 a intérêt à choisir B car cette stratégie lui apportera toujours un gain plus élevé que la stratégie A, quel que soit le choix du joueur 1 (on dit que A est une stratégie strictement dominée et c'est parfois avec cette approche qu'on peut trouver l'équilibre de Nash, on parle de méthode de la dominance itérée quand on « élimine » successivement les stratégies dominées). En effet, si le joueur 1 joue A, le joueur 2 gagne 3 en jouant A et 4 en jouant B. Si le joueur 1 joue B, le joueur 2 gagnera 4 en jouant A et 5 en jouant B. Si le joueur 1 anticipe ce comportement et joue de façon rationnelle (Nash suppose que les joueurs jouent de façon rationnelle), le joueur 1 va choisir B pour gagner 10. Il existe donc un équilibre de Nash pour ce jeu : (B,B).

Une fois le jeu fini, aucun joueur ne regrette sa stratégie compte-tenu du choix de l'autre joueur. Si le joueur 1 avait choisi A il aurait gagné 3 au lieu de 10. Si le joueur 2 avait choisi A, il aurait gagné 4 au lieu de 5.

Remarque

L'existence d'au moins un équilibre de Nash est certaine seulement si on accepte de prendre en compte les stratégies mixtes, c'est-à-dire les stratégies basées sur des choix qui se feront avec une distribution de « hasard » décidée à l'avance.

La notion de stratégie mixte est donc importante et doit être détaillée.

Dans le jeu des matching pennies, une stratégie mixte consisterait à choisir A avec une probabilité de X ($0 \leq X \leq 1$) et choisir B avec une probabilité de 1-X. Si X=0.3, on choisirait A 3 fois sur 10 et B 7 fois sur 10. Ou imaginons lancer à chaque fois un dé à 10 faces dont 3 faces seraient A et 7 faces seraient B. Mais le joueur 2 se rendra vite compte du déséquilibre dans les choix de A et B effectués par le joueur 1, et adaptera sa stratégie. Le gain du joueur 1 se verra diminué et il devra revoir sa stratégie. S'il fixe X=0.6, l'autre joueur se rendra vite compte du déséquilibre entre les choix de A et B du joueur, adaptera encore sa stratégie et le gain du joueur 1 se verra diminué. On constate que les deux joueurs doivent fixer X=0.5 et choisir avec la même probabilité A ou B.

Ainsi pour avoir un équilibre de Nash en stratégies mixtes, il faut que les stratégies donnent la même espérance de gain au joueur. Soient p_1 la probabilité avec laquelle le joueur 1 joue A et p_2 la probabilité avec laquelle le joueur 2 joue A.

Le joueur 1 peut espérer gagner, en jouant A :

$$p_2 \times 1 + (1 - p_2) \times (-1) = 2.p_2 - 1$$

Le joueur 1 peut espérer gagner, en jouant B :

$$p_2 \times (-1) + (1 - p_2) \times 1 = 1 - 2\,p_2$$

Ainsi, A et B donnent la même espérance de gain au joueur 1 si et seulement si : $2.p_2 - 1 = 1 - 2p_2 \Leftrightarrow p_2 = 0.5$. De la même manière, on peut montrer que le joueur 2 ne peut jouer une stratégie mixte à l'équilibre que si $p_1 = 0.5$. Finalement, on observe un seul équilibre de Nash en stratégies mixtes, donné par $p_1 = p_2 = 0.5$.

Soirée ciné

« Un homme d'exception » de Ron Howard sur la vie de John Forbes Nash.

http://www.allocine.fr/film/fichefilm_gen_cfilm=28384.html

3.1 Le cas des jeux à somme nulle : minimax, maximin, théorème du minimax

Exemple 4

Les joueurs 1 et 2 choisissent en même temps A1, A2 ou A3 pour le joueur 1 et B1, B2 ou B3 pour le joueur 2. Dans les 9 cases du tableau, on donne le gain obtenu par le joueur 1.

		Joueur 2		
		B1	B2	B3
Joueur 1	A1	4	-3	-1
	A2	5	3	2
	A3	6	0	-4

Figure 2. Gains du joueur 1 en fonction des choix de A et B.

Quels sont les gains minimaux pour le joueur 1 ?

- s'il choisit A1, ce sera -3€
- s'il choisit A2, ce sera 2€
- s'il choisit A3, ce sera -4€

Par conséquent, pour le joueur 1, le plus grand gain minimal est 2€. On parle de maximin : le maximum des gains minimums.

Tel que le jeu est présenté « combien le joueur 2 doit-il donner au joueur 1 ? », on se dit que le joueur 2 va adopter une position défensive : il va tenter de minimiser sa perte (cette hypothèse reste discutable : un joueur est-il toujours raisonnable ou un joueur est-il parfois un peu joueur ?....).

Quels sont les pertes maximales pour le joueur 2 ?

- s'il choisit B1, ce sera 6€
- s'il choisit B2, ce sera 3€
- s'il choisit B3, ce sera 2€

Par conséquent, pour le joueur 2, la plus petite perte maximale est 2€. On parle de minimax : le minimum des maximums.

On voit que le minimax est égal au maximin : 2€.

Ainsi, si 1 tente de maximiser ses gains, et si 2 tente de minimiser ses pertes, le choix portera toujours sur A2 pour 1 et B3 pour 2, et on aura la valeur 2€ comme résultat du jeu.

Si dans un jeu à somme nulle et information complète, le minimax est égal au maximin, alors on dit que le jeu présente *un point-selle, ou point d'équilibre, ou valeur du jeu*. Le jeu est dit déterminé et il existe une stratégie pure.

Exemple 5

Considérons le jeu ci-dessous.

		Joueur 2		
		Pierre	Papier	Ciseaux
Joueur 1	Pierre	0	-1	1
	Papier	1	0	-1
	Ciseaux	-1	1	0

Pour 1, le maximin est -1. Pour 2, le minimax est 1.

Le maximin est différent du minimax, donc il n'y a pas de point-selle et donc pas de stratégie pure.

Mais alors comment gagner ? En jouant toujours pierre, papier ou ciseau, on peut se dire que une fois sur trois on gagnera, une fois sur trois on perdra et une fois sur trois on fera égalité. Mais l'autre joueur va vite réaliser notre stratégie... On doit utiliser une stratégie mixte et jouer pierre, papier ou ciseaux avec une probabilité de 1/3 pour chacun.

Il n'existe pas de stratégie pure pour ce jeu. Chaque joueur doit jouer pierre, papier ou ciseaux avec la même probabilité de 1/3.

<u>Théorème du minimax</u>

Pour un jeu fini à deux joueurs, à somme nulle et à nombre fini de stratégies pures, il existe une situation stable une situation où aucun des deux joueurs n'aurait d'intérêt à changer sa stratégie mixte si l'autre ne la change pas valeur V représentant la quantité moyenne gagnée par le joueur A et perdue par le joueur B, si les deux agissent de manière rationnelle, c'est-à-dire en cherchant à optimiser leurs gains.

Le théorème du minimax est antérieur aux travaux de Nash. Il en constitue finalement un cas particulier concernant les jeux à somme nulle et à deux joueurs. Nash a ainsi étendu ce théorème au cas des jeux à somme non nulle mais aussi pour n joueurs.

Exemple 6 (issu de l'ouvrage « Dilemmes de prisonniers et stratégies dominantes ». La théorie des jeux. Jordi Deulofeu. Collection « le monde est mathématique » 2019)

Considérons le jeu ci-dessous.

Chaque joueur écrit deux nombres. Le joueur 1 écrit 1 ou 8. Le joueur 2 écrit 2 ou 7.

- Si les deux nombres écrits ont la même parité, A gagne la valeur en euros du nombre qu'il a écrit.
- Si les deux nombres écrits n'ont pas la même parité, B gagne la valeur en euros du nombre qu'il a écrit.

		Joueur 2	
		7	2
Joueur 1	1	1	-2
	8	-7	8

Quels sont les gains minimaux pour le joueur 1 ? S'il choisit 1, ce sera -2€. S'il choisit 8, ce sera -7€. Par conséquent, le maximin est -2€.

Quels sont les pertes maximales pour le joueur 2 ? S'il choisit 7, ce sera 1€. S'il choisit 2, ce sera 8€. Par conséquent, le minimax est 1€.

Il n'y a pas de point d'équilibre car minimax et maximin sont différents, donc pas de stratégie pure. En effet, si le joueur 1 se dit que le joueur 2 devrait jouer 7 pour minimiser ses pertes, alors il choisira 1. Mais le joueur 2 se doute que le joueur 1 va avoir ce raisonnement, alors le joueur 2 choisira 2 pour gagner 2€. Mais si le joueur 1 se doute que le joueur 2 se doute que le joueur 1 va avoir ce raisonnement, alors le joueur 1 choisira 8 pour gagner 8€ On voit qu'il n'y a pas d'équilibre à ce jeu.

Qu'en est-il d'une stratégie mixte ?

Le joueur 1 dispose de deux stratégies : écrire 1 ou 8. Soit p la probabilité d'écrire 8.

Si le joueur 2 choisit d'écrire 7, l'espérance de gain pour le joueur est $G = (1-p) \times 1 + p \times (-7) = 1 - 8p$

Si le joueur 2 choisit d'écrire 2, l'espérance de gain pour le joueur est $G = (1-p) \times (-2) + p \times 8 = 10p - 2$

La résolution du système formé par les deux équations ci-dessus donne $G = -1/3$ et $p = 1/6$.

La même démarche donne pour le joueur 2 donne $G = 1/3$ et $p = 4/9$ (probabilité de jouer 2).

La stratégie mixte est donc pour le joueur 1, de jouer aléatoirement 1 avec une probabilité de 5/6 et 8 avec une probabilité de 1/6. Pour le joueur 2, ce sera de jouer aléatoirement 2 avec une probabilité de 4/9 et 7 avec une probabilité de 5/9.

Jouer 1 avec une probabilité de 5/6 consisterait par exemple à lancer un dé à six faces où 5 faces seraient numérotées « 1 » et une seule face serait numérotée « 8 ».

Avec cette stratégie, le joueur 1 peut « espérer » perdre 1/3€ à chaque partie et le joueur 2 peut espérer gagner 1/3€ à chaque partie (on est bien sur un jeu à somme nulle, les deux espérances sont opposées).

On a un point d'équilibre en stratégie mixte car si un des deux joueurs change sa stratégie, le gain de l'autre joueur augmentera.

4 Psychologie, dilemmes, stratégies coopératives et non-coopératives

Les jeux qui relèvent du conflit pur d'un côté (les gains d'un joueur sont les pertes de l'autre), et ceux qui relèvent de la coopération pure d'un autre côté (chaque joueur a intérêt à coopérer pour maximiser ses gains) sont deux extrêmes où les mathématiques, nous venons de le voir, sont d'une grande aide et pourront souvent prédire le comportement de chaque joueur.

Les choses sont rarement aussi simples………

Bien souvent, les gains du gagnant ne correspondent pas totalement aux pertes du perdant (le jeu n'est pas toujours à somme nulle).

Parfois, un des joueurs peut tirer plus de bénéfice au conflit qu'à la coopération, alors que fera-t-il ?

Exemple 7

Dans le cadre de conflits entre groupes ennemis (nations, coalitions de nations, ……), on a édité des « conventions » à respecter et des « règles strictes d'engagement ». On voit que pour rendre les pertes de chaque camp « soutenables », une nuance de coopération a été infusée dans le conflit. On s'engage à ne pas utiliser certaines armes, à ne pas attaquer la population civile……..etc.

Exemple 8

La négociation commerciale est un exemple typique de conflit/coopération. L'un veut acheter le moins cher possible, l'autre veut vendre le plus cher possible : il y a conflit. Mais chacun veut que la vente se produise : il va bien falloir coopérer….

Exemple 9

Deux personnes jouent en même temps et ne peuvent pas communiquer.

La matrice des gains est donnée ci-dessous.

Cherchons l'équilibre de Nash du jeu. Par sécurité le joueur 1 a tout intérêt à choisir B car il gagne plus qu'en choisissant A, quel que soit le choix du joueur 2. Par le même raisonnement, on voit que le joueur 2 a tout intérêt à choisir B car il gagne plus qu'en choisissant A quel que soit le choix du joueur 1. L'équilibre de Nash est donc (B,B).

		Joueur 2	
		A	B
Joueur 1	A	(3,3)	(1,4)
	B	(4,1)	(2,2)

Pourtant si les deux joueurs s'entendaient avant de jouer, ou se faisaient « confiance », ils choisiraient (A,A) pour obtenir chacun 3 au lieu de 2 ! C'est aussi un équilibre mais on dit que cet équilibre est « sous-optimal ».

Les joueurs sont confrontés à ce qu'on appelle un dilemme : la stratégie individuelle (choisir B) est en conflit avec l'intérêt collectif et au final, son propre intérêt.

Dans la pratique il est observé qu'environ 80% des joueurs 1 choisissent B. Ainsi la plupart des joueurs ne coopèrent pas et « s'assurent » un gain de 2.

4.1 Dilemme du prisonnier

Melvin Dresher et Merrill Flood, en 1950, proposent un jeu de ce format pour tester les récents travaux de Nash. Albert Tucker nommera ce jeu le dilemme du prisonnier par l'exemple concret qu'il a calqué dessus . Il s'énonce

« Deux hommes, accusés d'avoir conjointement violé la loi, sont détenus séparément par la police. Chacun est informé que :

1) Si l'un des deux avoue et l'autre non, le premier aura une récompense d'une unité alors que le second aura une condamnation de deux unités.

2) Si les deux avouent, chacun aura une condamnation d'une unité.

En même temps, chacun a de bonnes raisons de croire que :

3) Si aucun des deux n'avoue, chacun repartira libre. »

		Joueur 2	
		A	B
Joueur 1	A	(-1,-1)	(1,-2)
	B	(-2,1)	(0,0)

La stratégie d'aveu (A) est une stratégie dominante pour les deux prisonniers. Il y a donc un seul équilibre de Nash (A,A). En coopérant, chaque prisonnier pourrait repartir libre.

Exemple 10 : exemple de dilemme du prisonnier

https://huntsman.usu.edu/learntwice/articles/the-dark-night-and-prisoners-dilemma

4.2 Jeux de coordination

Exemple 11 : matching game

Un jeu de coordination très simple est présenté ci-dessous. C'est un jeu de coordination pure. Chaque joueur a intérêt à se coordonner avec l'autre.

		Joueur 2	
		A	B
Joueur 1	A	(1,1)	(0,0)
	B	(0,0)	(1,1)

Dans ce jeu il y a deux équilibres de Nash : (A,A) et (B,B), et on observe en effet que la majorité des joueurs choisissent A.

Ce jeu très simple pointe tout de même un concept très intéressant, celui de *point focal*. Pourquoi est-ce que la plupart des joueurs choisissent A alors qu'ils pourraient choisir B ? Parce qu'il semble plus simple de choisir le premier équilibre qui apparait dans le jeu. Parce que A est placé avant B dans l'alphabet et que nous avons l'habitude de considérer les choses (lettres, chiffres) « dans l'ordre ».

Exemple 12 : point focal

Imaginez le jeu suivant. Deux personnes doivent se rencontrer à Angoulême pour un rendez-vous. Si elles choisissent le même lieu de rendez-vous, elles gagnent chacune 1. Si elles ne choisissent pas le même lieu, elles ne gagnent rien.

On suppose que ces personnes connaissent bien la ville et ont l'habitude d'y évoluer.

Il y a tellement de lieux possibles, et donc tellement de choix possibles, que la matrice des pay-offs ne tiendrait pas sur cette page !

Et pourtant, on pourrait faire le test, combien de personnes vont répondre des lieux emblématiques comme l'Hôtel de Ville ?

Exemple 13 : point focal

Ce lundi vous devez retrouver, devant l'école, un élève d'une autre classe pour vous échanger des documents. Vous ne pouvez pas vous coordonner à l'avance sur l'heure de rendez-vous. Si chacun choisit la même heure, vous gagnez tous les deux les précieux documents. Sinon, pas de gain.

Il y a beaucoup d'heures possibles sur une journée ! Et pourtant, il est prévisible que la plupart des joueurs choisiraient la pause du matin ou la pause déjeuner.

Ce concept de point focal fait donc appel à une culture commune, des points communs, une vision commune de l'espace, du temps ou de tout autre concept.

On doit ce concept à Schelling, dans les années 1960.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Thomas_Schelling#Le_Point_focal

4.3 Jeu de la chasse au cerf

Exemple 14 : la chasse au cerf

Le jeu de la chasse au cerf est également un jeu de coordination mais contrairement au jeu précédent, un conflit apparait entre se coordonner pour maximiser ses gains, et faire un autre choix qui assurera un gain quel que soit le choix de l'autre joueur.

		Joueur 2	
		A	B
Joueur 1	A	(4,4)	(0,1)
	B	(1,0)	(1,1)

Raisonnons sur le joueur 1, le cas sera le même pour le joueur 2. Le joueur 1 a tout intérêt à jouer A car si le joueur 2 joue aussi A, les deux ont un gain de 4. Mais si le joueur 1 joue A et que pour n'importe quelle raison, le joueur 2 joue B, alors le joueur 1 ne gagne rien.

La tentation est alors grande de s'assurer un gain mini de 1 en jouant B. En jouant B, quel que soit le choix de l'autre joueur, le joueur 1 est certain de gagner 1. C'est moins que le gain de 4, mais c'est un gain certain…..

Ce jeu admet deux équilibres de Nash en stratégie pure (A,A) et (B,B) et un équilibre en stratégie mixte (chaque joueur joue A avec une probabilité de ¼ et B avec une probabilité de ¾ pour un gain espéré de 1).

Remarque

Jean-Jacques Rousseau en 1755 a très tôt postulé ce problème dans son « Discours sur l'origine et les fondements de l'inégalité parmi les hommes » : « s'agissait-il de prendre un cerf, chacun sentait bien qu'il devait pour cela garder fidèlement son poste ; mais si un lièvre venait à passer à la portée de l'un d'eux, il ne faut pas douter qu'il ne le poursuivit sans scrupule, et qu'ayant atteint sa proie il ne se souciât fort peu de faire manquer la leur à ses compagnons ». C'est pour cela que ce jeu est appelé « chasse au cerf ».

Applications

On voit dans le jeu de la chasse au cerf un problème récurrent du travail en équipe ou des sports d'équipe : la jouer « solo » pour s'assurer un gain, ou se coordonner avec tout le monde mais avec un résultat qui n'a plus une réussite garantie et dépend de l'adhésion de tout le groupe. On pense au joueur de football qui veut briller auprès des recruteurs, du public, de son entraineur en multipliant les actions individuelles pour s'assurer un gain d'image personnel, mais qui ne fera pas gagner le match à toute l'équipe….

Le jeu de la chasse au cerf trouve aussi des applications en économie. Quand une entreprise s'assure d'un minimum de gains en ne respectant pas de contraintes sociales ou environnementales, en ne se coordonnant pas sur des politiques nationales ou internationales bénéfiques pour tous, elle court le lièvre…….

4.4 Jeu de la bataille des sexes

On peut aussi citer le jeu de la bataille des sexes qui trouvent des applications en socio-économie.

Dans ce type de jeu, chaque joueur veut imposer son choix mais tient avant tout à ce qu'en fin de compte, les deux joueurs fassent le même choix.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Jeu_de_la_guerre_des_sexes

4.5 Jeu de la poule mouillée

Exemple 15 : jeu de la poule mouillée

		Joueur 2	
		A	B
Joueur 1	A	(4,4)	(0,1)
	B	(1,0)	(1,1)

Un grand classique : le premier qui cède a perdu !

Les applications ? deux voitures qui roulent l'une vers l'autre, qui cèdera en premier ? La guerre froide, la crise des missiles de Cuba en 1962

Pour aller plus loin : le jeu du faucon et de la colombe, comportement animal et théorie des jeux

https://isyeb.mnhn.fr/sites/isyeb/files/documents/Theorie_des_jeux-minipoly.pdf

5 Conclusion et ouverture

Les interactions politiques, sociales, économiques, commerciales, la coexistence des espèces animales sont rarement assimilables à des jeux de conflit pur à somme nulle ou à des jeux de coopération pure ou de coordination pure.

La théorie des jeux, brièvement présentée dans ce cours, fournit un cadre mathématique permettant de décrire toutes ces interactions. Finalement, à travers la notion de « jeux », toutes les interactions que l'on vient de citer sont en fait analysées sous l'angle de la « prise de décision ».

5.1 Liens web

Apports théoriques

- https://perso.liris.cnrs.fr/marc.plantevit/ENS/GameTheory/CM/3_NashEquilibrium.pdf
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Thomas_Schelling#Le_Point_focal

Jeux divers

- https://fr.wikipedia.org/wiki/Jeu_de_la_guerre_des_sexes
- https://isyeb.mnhn.fr/sites/isyeb/files/documents/Theorie_des_jeux-minipoly.pdf
- http://web.archive.org/web/20150608125658/http:/www.princeton.edu/mudd/news/faq/topics/Non-Cooperative_Games_Nash.pdf

Un peu de détente

- https://huntsman.usu.edu/learntwice/articles/the-dark-night-and-prisoners-dilemma
- http://www.allocine.fr/film/fichefilm_gen_cfilm=28384.html

5.2 Références historiques, notions diverses

John Nash, Jeu des matching pennies, Jeu de la poule mouillée, Jeu de la bataille des sexes, Dilemme du prisonnier

6 Exercices

6.1.1 Jeu à stratégie pure

Réf [1]

Deux associés Marie et Georges veulent ouvrir un restaurant à un croisement de routes dans la banlieue d'une grande ville. Marie veut que le restaurant soit situé le plus bas possible en altitude et Georges veut qu'il soit situé le plus haut possible. Pour se décider ils organisent un jeu. Marie choisit une autoroute (A1, A2, A3) et Georges choisit une des routes C1, C2, C3 perpendiculaires aux autoroutes. On donne ici l'altitude finale du restaurant en fonction des choix de chaque joueur.

		Marie		
		A1	A2	A3
Georges	C1	470	1050	600
	C2	540	600	930
	C3	320	280	710

Quelle attitude sera retenue si chaque joueur cherche à satisfaire au mieux ses intérêts ? donner un nombre sans unité

Indice : pour Marie, quel choix lui fait risquer la plus faible altitude quel que soit le choix de Georges ? Et pour Georges ?

Réponse

540m

Pour Marie, le choix A1 lui fait risquer une altitude jusqu'à 540m. Le choix A2 lui fait risquer une altitude de 1050m. Le choix A3 lui fait risquer une altitude de 930m. Si elle est prudente, elle choisira A1.

Pour Georges, le choix C1 lui assure une altitude d'au moins 470m. Le choix C2 lui assure une altitude d'au moins 540m. le choix C3 lui assure une altitude d'au moins 280m. S'il est prudent il choisira C2.

On a un point d'équilibre. Si un des joueurs change sa stratégie sans que l'autre ne change, il diminue ses gains. En effet si Georges change pour C1 et C2, il diminue son altitude à 470 ou 320m. Si Marie choisit A2 ou A3, son altitude augmente pour 600 ou 930m.

6.1.2 Les pizzas

2 entreprises, « pizzas top » et « pizzas délices » se disputent les parts de marché des pizzas surgelées.

Elles hésitent chacune sur leur positionnement marketing : bas de gamme pas cher mais pas très bon, milieu de gamme ni trop cher et mangeable, et haut de gamme cher mais de meilleur goût.

Un sondage montre les parts de marché X% que l'entreprise « pizzas top » ferait en fonction des choix de chacune. Bien sûr, l'autre entreprise ferait 100-X% parts de marché.

		« Pizzas délices »		
		Bas de gamme	Milieu de gamme	Haut de gamme
« Pizzas top »	Bas de gamme	40%	48%	35%
	Milieu de gamme	54%	49%	46%
	Haut de gamme	35%	49%	30%

Cocher la bonne réponse

1/ Il existe une stratégie pure. Le point d'équilibre est 49%

2/ Il n'existe pas de stratégie pure pour ce jeu.

3/ Il existe une stratégie pure. Le point d'équilibre est 46%

4/ Il existe une stratégie pure. Le point d'équilibre est 35%

Indice : les deux entreprises ont chacune intérêt à choisir quoi, compte-tenu de ce que devrait choisir l'autre ?

Réponse : Il existe une stratégie pure. Le point d'équilibre est 46%

Pour « pizzas top », quel que soit le choix de « pizzas délices », le gain maxi sera si elle choisit « milieu de gamme ». Si son choix est rationnel, elle devrait donc choisir « milieu de gamme »

Pour « pizzas délices », quel que soit le choix de « pizzas top », la perte mini sera si elle choisit « haut de gamme ». Si son choix est rationnel, elle devrait donc choisir « haut de gamme »

L'équilibre de ce jeu est (milieu de gamme, haut de gamme)

6.1.3 Les pizzas 2

2 entreprises, « pizzas top » et « pizzas délices » se disputent les parts de marché des pizzas surgelées.

Elles hésitent chacune sur leur positionnement marketing : bas de gamme pas cher mais pas très bon, milieu de gamme ni trop cher et mangeable, et haut de gamme cher mais de meilleur goût.

Un sondage montre les parts de marché X% que l'entreprise « pizzas top » ferait en fonction des choix de chacune. Bien sûr, l'autre entreprise ferait 100-X% parts de marché.

Cocher la bonne réponse

		« Pizzas délices »		
		Bas de gamme	Milieu de gamme	Haut de gamme
« Pizzas top »	Bas de gamme	33%	15%	65%
	Milieu de gamme	45%	57%	48%
	Haut de gamme	42%	20%	70%

1/ Il existe une stratégie pure. Le point d'équilibre est 57%

2/ Il n'existe pas de stratégie pure pour ce jeu

3/ Il n'existe pas d'équilibre de Nash pour ce jeu

4/ Il existe une stratégie pure. Le point d'équilibre est 45%.

Indice : les deux entreprises ont chacune intérêt à choisir quoi, compte-tenu de ce que devrait choisir l'autre ?

Réponse

4/ Il existe une stratégie pure. Le point d'équilibre est 45%.

« Pizzas top » obtient au moins 15% des parts de marché en choisissant « bas de gamme », 45% des parts de marché en choisissant « milieu de gamme », 42% des parts de marché en choisissant « haut de gamme ». Si son choix est rationnel, elle devrait donc choisir « milieu de gamme ».

Si « Pizzas délices » choisit « bas de gamme », « Pizzas top » obtiendra jusqu'à 45%, 57% si elle choisit « milieu de gamme » et 70% si elle choisit « haut de gamme ». Si son choix est rationnel, elle devrait donc choisir « bas de gamme ».

Le meilleur choix pour les deux entreprises donne le même résultat : 45%, ce qui est le point d'équilibre du problème.

7 Références bibliographiques

[1], [2], [3]

[1] J. Deulofeu, *Dilemmes de prisonniers et stratégies dominantes: la théorie des jeux*. in Le monde est mathématique, no. 7. Paris: RBA France, 2013.

[2] N. Eber, *Théorie des jeux*, 4e éd. in Les topos. Malakoff: Dunod, 2018.

[3] J. F. Nash, « Equilibrium Points in n-Person Games. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America », vol. 36, n° 1, p. 48-49, 1950, Disponible sur: https://www.jstor.org/stable/88031