Mathématiques

\-

Dénombrement

Probabilités

Variables aléatoires

Lois de probabilités

Frédéric Menan

fmenan@cesi.fr

Table des matières

1 Dénombrement

Concentrons-nous sur les ensembles finis et apprenons des manières de compter les éléments de ces ensembles. Le dénombrement se propose de réaliser cela. On parle aussi d'analyse combinatoire.

1.1 Notion préliminaire : tirage avec ou sans remise

Cette notion est essentielle.

On choisit plusieurs fois de suite un élément parmi les n éléments d'un ensemble.

Si à chaque choix, les n éléments peuvent être choisis, le tirage est dit « avec remise », comme quand on choisit des cartes dans un jeu en remettant à chaque fois la carte tirée pour le prochain choix.

Si à chaque choix, on peut choisir parmi les n éléments moins les éléments déjà choisis, le tirage est dit « sans remise ».

On peut décider de faire des tirages avec ou sans remise : on peut chaque jour porter le même vêtement parmi tous nos vêtements disponibles (la considération de propreté du vêtement n'est pas considérée dans ce cas….). On peut aussi chaque jour de la semaine décider de porter une chemise différente pour aller au travail. La chemise du lundi ne pouvant être choisie les jours suivants, le tirage est sans remise.

Parfois on ne peut pas décider. Quand on choisit des personnes pour son équipe de football, le tirage est nécessairement sans remise….

1.2 Choix successifs

On doit faire n choix successifs.

Il y a p_1 possibilités pour le premier choix, p_2 pour le second choix, p_3 pour le troisième choix, p_n pour le n-ième choix.

Si chaque choix i (i=1…n) est indépendant des autres choix, alors le nombre total de choix possibles est le produit $p_1.p_2\ldots\ldots.p_n$.

On peut démontrer ce résultat par récurrence.

Pour un nombre fini d'ensembles E_1, E_2, ……..,E_n, l'ensemble produit $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ est fini et

$$card(E_1 \times E_2 \ldots \times E_n) = card(E_1).card(E_2) \ldots card(E_n)$$

1.3 p-listes : tirage avec ordre, avec remise

Une p-liste d'éléments d'un ensemble E est une liste ordonnée de p éléments de l'ensemble E, avec remise.

On est face à p choix successifs avec à chaque fois n possibilités (voir paragraphe précédent). On peut donc créer n^p p-listes à partir d'un ensemble de n éléments.

Exemple 1

On doit choisir 4 chiffres entre 0 et 9. On a 9 possibilités pour le premier, 9 pour le second……etc. On peut créer $9\times9\times9\times9=9^4$ listes au total.

1.4 Arrangements : tirage avec ordre, sans remise

On parle aussi de tirage successif.

Contrairement aux p-listes, un élément choisi n'est pas remis dans les choix possibles, il ne peut plus être choisi. 1er choix : n possibilités. 2ème choix : n-1 possibilités car pas de remise….. pème choix : n-p+1 possibilités.

Nombre de p-arrangements dans un ensemble de n éléments :

$$\boxed{A_n^p = n.(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Remarque

Un arrangement de n éléments dans un ensemble de n éléments est appelé une permutation. Le nombre de possibilités est

$$A_n^n = \frac{n!}{(0)!} = n!$$

Exemple 2

Combien de playlists peut-on faire avec 3 chansons X, Y et Z. On a 3 possibilités pour la 1ère chanson, 2 pour la seconde, 1 seule pour la dernière : 3×2×1=3!=6 (XYZ XZY YXZ YZX ZXY ZYX)

1.5 Combinaisons : tirage sans ordre, sans remise

On parle aussi de tirage simultané.

Contrairement aux arrangements, l'ordre n'a pas d'importance.

Exemple 3 : mise en évidence

Prenons un arrangement de 4 lettres parmi 26.

On sait qu'il existe A_{26}^4 arrangements possibles (PAGE, COUP, CHOU, LISA……..)

Pour un arrangement, l'ordre importe donc LISA n'est pas le même résultat que SILA.

Pour une combinaison, l'ordre n'importe pas : LISA et SILA seront le même résultat. Or avec 4 lettres, il y a 4! résultats possibles (LISA, LASI, SILA, AILS………). Pour 4 ! arrangements, correspond une seule combinaison.

Donc le nombre de combinaisons possible est

$$\frac{A_{26}^4}{4!} = \frac{1}{4!}.\frac{26!}{(26-4)!}$$

On nomme ce résultat

$$C_{26}^4 = \frac{26!}{4!.(26-4)!} = \binom{26}{4}$$

Résultat

Nombre de combinaisons de p éléments dans un espace contenant n éléments

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!} = \binom{n}{p}$$

1.6 Synthèse

	Tirage avec ordre (tirage successif) de p éléments parmi n	Tirage sans ordre (tirage simultané) de p éléments parmi n
Avec remise	n^p	$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!} = \binom{n}{p}$
Sans remise	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	

Remarque : on voit que l'enjeu d'un dénombrement consiste en grande partie à repérer dans les conditions du problème si l'on a un tirage avec ou sans ordre et avec ou sans remise.

1.7 Formule du binôme de Newton

Si a et b sont deux réels et n un entier naturel non nul alors

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i . a^{n-i} . b^i$$

La démonstration peut se faire par récurrence.

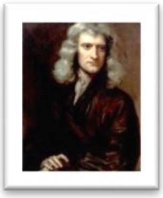


Figure 1. Isaac Newton. Peinture de Sir Godfrey Kneller (1689). (www.phys.uu.nl/~vgent/astrology/images/newton1689.jpg], Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=146431)

Corollaire

En posant a=b=1, $\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$

Théorème

Si card E=n, alors card($\wp$(E))=2^n

1.8 Triangle de Pascal

Lien à visionner : https://www.geogebra.org/m/bbrqfp9n

Activité informatique

Pourquoi ne pas essayer le script SCILAB ci-dessous, voir ce qu'il calcule et le modifier au besoin.

Peut-on calculer la valeur de k du terme en $k.a^{16}.b^{4}$, dans la formule développée de $(a+b)^{20}$

```
// fournit le vecteur ligne des C_n^k, k=0:n
n=20;
C=[1];    // pour n=0
for i=1:n
   C=[C 0]+[0 C]
   disp(C)
end
```

Commandes SCILAB et EXCEL

http://atoms.scilab.org/toolboxes/module_lycee/

Pour l'aide sur une fonction, taper help fonction directement dans SCILAB

SCILAB

Commandes de base utiles pour l'ensemble des modules

- clc : efface la fenêtre de commande
- clf : clears and resets a figure or a frame uicontrol
- clear : suppression des variables

Commandes pour ce module

Module Scilab pour les lycées >> Ensembles

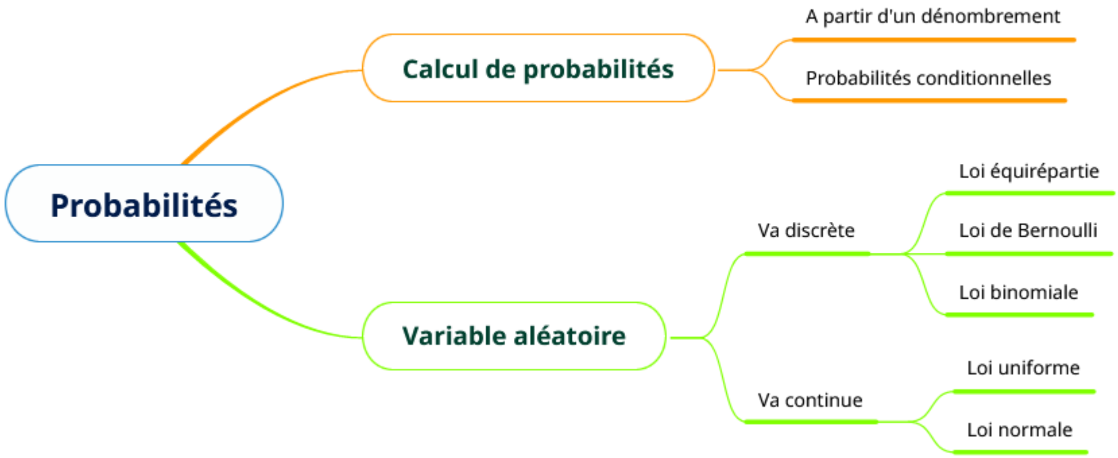
- ajouter — ajoute un élément à un ensemble
- appartient — détermine l'appartenance d'un élément à un ensemble
- complementaire — retourne le complémentaire d'un ensemble dans un autre
- enlever — enlever un élément d'un ensemble
- ensemble — définition d'un ensemble
- inclus — détermine si un ensemble est inclus dans un autre
- intersection — retourne l'intersection de deux ensembles
- jeu_32 — retourne l'ensemble des cartes d'un jeu de 32 cartes
- jeu_52 — retourne l'ensemble des cartes d'un jeu de 52 cartes
- jeu_54 — retourne l'ensemble des cartes d'un jeu de 54 cartes
- jeu_tarot — retourne l'ensemble des cartes d'un jeu de tarot

- tirage_ensemble — fait un tirage aléatoire d'éléments d'un ensemble
- union — retourne l'union de deux ensembles

EXCEL

- COMBIN(nombre, nombre_choisi)

2 Probabilités



2.1 Introduction : le lien entre fréquence d'apparition d'un phénomène et probabilités

Dans ce chapitre, nous allons parler de probabilité d'un résultat lors d'une expérience aléatoire. Malheureusement, une probabilité, ça ne se mesure pas vraiment.

On a envie de définir un chiffre qui serait d'autant plus grand qu'on serait « certain », lorsqu'on effectue une expérience aléatoire, d'obtenir l'issue considérée. On a même envie d'associer 0 à un évènement qui est certain de ne pas se produire (la probabilité d'obtenir 7 si on lance un dé à 6 faces……). Et puis, pourquoi ne pas associer 1 à un évènement certain (la probabilité d'obtenir 1,2,3,4,5 ou 6 si on lance un dé à 6 faces……).

Mais il va nous falloir aller plus loin dans l'idée de ce que peut être une probabilité. Si on lance 60 fois un dé à 6 faces, on se rend compte qu'on devrait obtenir à peu près 10 fois « 1 », 10 fois « 2 », 10 fois « 3 »……. Il serait bien étonnant de trouver exactement 10 apparitions des 6 possibilités, mais on se dit que si on réalise N fois cette expérience avec N très grand, on devrait observer N/6 apparitions de 1, de 2, jusqu'à 6. Raisonner en fréquence d'apparition d'un évènement nous permet déjà de donner un peu de consistance à cette notion de probabilités.

Finalement, on se dira que la probabilité de A, p(A), est le rapport entre le nombre n d'apparitions de A, et le nombre N de fois où on a répété l'expérience aléatoire. Quand N devient très grand, n/N tend vers la probabilité de A.

Proposer un lien entre la fréquence d'apparition d'un évènement et sa probabilité va nous servir à démontrer certaines formules essentielles de ce cours.

<u>Exemple 1</u>

Sur N essais, un évènement improbable devrait se réaliser 0 fois. Or 0/N=0 donc notre idée d'associer la probabilité 0 à un évènement improbable était judicieuse. Sur N essais, si un évènement est sûr de se réaliser à chaque fois, il se réalisera N fois. Or N/N=1 donc notre idée d'associer la probabilité 1 à un évènement certain était également judicieuse.

Exemple 2

On réalise N fois une expérience aléatoire et on note a le nombre de fois où A s'est réalisé.

La probabilité de l'évènement A est donc associée à la fréquence d'apparition a/N.

Le nombre de fois où B s'est réalisé lorsque A s'est réalisé sera noté b (par exemple : A est {2,3,4} pour un lancé de dés et B est l'évènement « chiffre pair ». Quand on obtient 2, A et B se réalisent. Idem si on obtient 4. Si on obtient 3, A se réalise mais pas B). La fréquence d'apparition b/N est donc associée à la probabilité d'avoir B et A, soit $p(B \cap A)$.

La probabilité que B se réalise, sachant que A s'est réalisé, est le nombre de fois où B se réalisera chaque fois que A se réalisera. C'est donc la fréquence d'apparition b/a. On parle de fréquence relative. Or

$$\frac{b}{a} = \frac{b/N}{a/N}$$

On retrouve bien la formule de la probabilité de B sachant A

$$P_A(\mathrm{B}) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$$

Remarque

Parler dès maintenant du lien entre fréquence d'apparition et probabilités, donc du lien entre statistiques et probabilités, permet d'évoquer la notion de statistique inférentielle, bien différente de la statistique descriptive. En statistique inférentielle, on essaie de tirer des conclusions sur une population à partir d'un échantillon aléatoire de cette population. C'est toute la notion de sondage, d'intervalle de confiance….. Cette notion de statistique inférentielle sort du cadre du cours.

2.2 Calculs de probabilités

2.2.1 Définitions

- Ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire : univers Ω
- Evènement élémentaire : élément de Ω
- Evènement : sous-ensemble A de Ω

2.2.2 Probabilité d'un évènement

Soit Ω l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Une probabilité sur Ω est une application P qui à toute partie A de Ω associe le nombre réel P(A) compris entre 0 et 1, appelé probabilité de l'événement A et qui vérifie les conditions suivantes :

- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent ;
- la probabilité de l'événement certain est 1 ;
- la probabilité de l'événement impossible est 0.

Remarque

Revenons à nos fréquences d'apparition. Tout évènement aléatoire, si on fait N essais, devrait se réaliser entre 0 et n fois. Donc sa fréquence d'apparition devrait être comprise et entre 0/N et N/N, soit entre 0 et 1.

2.2.3 Equiprobabilité

Si tous les événements élémentaires d'une expérience ont la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité. On parlera de « dé parfait », « dé non pipé », « pièce parfaite » « boules indiscernables au toucher », « cartes bien battues », « on tire au hasard » etc.

Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, pour tout événement élémentaire ω, p(ω) = 1 / card(Ω).

Par conséquent, pour tout événement A, on a : P(A) = card(A) / card(Ω).

Rappel : Soit un ensemble fini E. Le cardinal de E est le nombre d'éléments de E.

2.2.4 Propriétés

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω, A et B deux événements. On a :

P(A) + P($\bar{A}$) = 1

P(AUB) = P(A) + P(B) – P(A∩B)

2.3 Probabilités conditionnelles

2.3.1 Définition

Soient A et B deux événements (P(A) ≠ 0). On souhaite connaitre la probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé. On appellera cette probabilité « probabilité de B sachant A » et on la notera : $P_A(B)$.

On a :

$$p(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Là aussi les fréquences d'apparition vont nous être bien utiles.

On réalise N fois une expérience aléatoire et on note a le nombre de fois où A s'est réalisé. La probabilité de l'évènement A est donc associée à la fréquence d'apparition a/N. Le nombre de fois où B s'est réalisé lorsque A s'est réalisé sera noté b (par exemple : A est {2,3,4} pour un lancé de dés et B est l'évènement « chiffre pair ». Quand on obtient 2, A et B se réalisent. Idem si on obtient 4. Si on obtient 3, A se réalise mais pas B). La fréquence d'apparition b/N est donc associée à la probabilité d'avoir B et A, soit $p(B \cap A)$. La probabilité que B se réalise, sachant que A s'est réalisé, est le nombre de fois où B se réalisera chaque fois que A se réalisera. C'est donc la fréquence d'apparition b/a. On parle de fréquence relative. Or $\frac{b}{a} = \frac{b/N}{a/N}$. On retrouve bien $p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$.

Remarque : $P_A(A)$= 1

2.3.2 Théorème des probabilités totales

Si {B_1, . . . ,B_n} est une partition de l'univers Ω telle que ∀ i : P(B_i) ≠ 0, alors pour tout événement A :

$$P(A) = P(B_1)\times P_{B1}(A) + \cdots + P(B_n)\times P_{Bn}(A)$$

2.4 Evénements indépendants

Si p(A) ≠ 0, A et B sont indépendants si et seulement si

$$p(B/A) = p(B)$$

Or $p(B/A) = \frac{p(B\cap A)}{p(A)}$, donc A et B sont indépendants si et seulement si

$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

$p(A \cap B)$ est la probabilité d'avoir à la fois l'évènement A et le B.

Dans le cas contraire, A et B sont dits dépendants.

Par extension, Soit P une probabilité définie sur un univers. n événements $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants lorsque pour tout sous-ensemble $\{i_1, \ldots, i_p\}$ de $\{1; \ldots; n\}$, on a : $p(\cap Ai) = \prod p(Ai)$

Remarque

Deux événements sont dits incompatibles quand leur réalisation simultanée est impossible : ils ne peuvent se produire en même temps. Ne pas confondre avec la notion d'évènements indépendants qui peuvent se produire de façon indépendante l'un de l'autre.

Si deux évènements A et B sont incompatibles, alors $p(A \cap B) = 0$.

Si deux évènements A et B sont indépendants, alors $p(B/A) = p(B)$.

2.4.1 Arbres pondérés

Il est courant de représenter les probabilités d'un problème donné à l'aide d'un arbre pondéré.

Exemple 4

Le service informatique d'une entreprise a 30% de tablettes provenant du fournisseur A et 70% de tablettes provenant du fournisseur B. Chez le fournisseur A, le pourcentage de tablettes qui tombe en panne la première année est de 2%. Chez le fournisseur B, le pourcentage de tablettes qui tombe en panne la première année est de 1%. On peut représenter la situation avec l'arbre ci-dessous. Cet arbre permet de facilement visualiser les probabilités en « suivant » un chemin. Par exemple,

$$p(A \cap P) = 0.3 \times 0.02$$

$$p(P) = p(A \cap P) + p(B \cap P) = 0.3 \times 0.02 + 0.7 \times 0.01 = 0.013$$

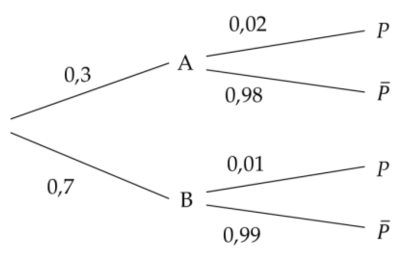


Figure 2. Arbre pondéré

2.4.2 Théorème de Bayes

$$P(A / B) = \frac{P(B / A).P(A)}{P(B)}$$

https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Bayes

2.5 La génération du hasard en informatique

Avez-vous testé les fonctions rand et grand dans SCILAB ?

Que ressort-il ?

2.5.1 Rand sous SCILAB

La première fois qu'elle est exécutée dans une nouvelle session, elle retourne toujours le même nombre ! Pas très aléatoire tout ça...........

```
--> rand
 ans  =

   0.2113249
```

Mais allons plus loin : le second nombre généré est toujours 0.7560439.

```
--> rand
 ans  =

   0.7560439
```

En fait la fonction rand ne génère pas de nombre de façon aléatoire : elle crée une suite de nombres, déterministe c'est-à-dire déterminé à l'avance, qui, pour de nombreuses exécutions, reproduirait les résultats de tirages aléatoires. Mais cette suie de nombres est toujours la même !

La fonction rand est en fait une suite de nombres, cyclique mais où le même nombre revient au bout de nombreux pas.

The generator

The "`uniform`" random number generator is described in "Urand, A Universal Random Number Generator" by Michael A. Malcolm, Cleve B. Moler, Stan-Cs-73-334, January 1973, Computer Science Department, School Of Humanities And Sciences, Stanford University.

It is a linear congruential generator of the form :

x = (a x + c) mod M

where the constants are
a = 843314861
c = 453816693
$M = 2^{31}$

According to the authors, this generator is a full length generator, that is to say, its period is $M = 2^{31}$ = 214748364.

2.5.2 grand sous SCILAB

La fonction grand fournit le même résultat : choisissez 33 à chaque fois, vous gagnerez toujours le premier tirage !

```
--> grand(1,1,"uin",1,60)
 ans  =

   33.
```

On peut pallier ce défaut en modifiant un paramètre initial, la graine ou seed s, mais si s n'est pas choisie de manière parfaitement aléatoire, cela ne changera pas grand-chose au problème.

Get predictable or less predictable numbers

The pseudo random number generators are based on deterministic sequences. In order to get reproducible simulations, the initial seed of the generator is constant, such that the sequence will remain the same from a session to the other. Hence, by default, the first numbers produced by `grand` are always the same.

In some situations, we may want to initialize the seed of the generator in order to produce less predictable numbers. In this case, we may initialize the seed with the output of the `getdate` function:

```
n=getdate("s");
grand("setsd",n)
```

Mais alors comment réellement générer de l'aléatoire en informatique ?

Bonne question !!

Il nous faut, au moment de générer notre nombre aléatoire, nous inspirer de phénomènes tout à fait aléatoires. L'heure et la date sur le PC, la température du microprocesseur, des données diverses sur un site quelconque qui donne la force et la direction du vent, le cours du baril de pétrole, sont aléatoires ou plutôt, cela change tout le temps et les valeurs ne sont jamais les mêmes entre deux sessions de SCILAB.

2.6 Liens web

Calculs de probabilités

- http://tice.inpl-nancy.fr/modules/unit-stat/chapitre1/index.html
- http://rainet.telecom-lille.fr/unit/r02b/index.htm
- http://www.maths-france.fr/Terminale/TerminaleS/Cours/15-probabilites-conditionnelles.pdf
- https://www.youtube.com/watch?v=CQk-yzdeUzQ

Variable aléatoire, loi de probabilité, espérance

- https://youtu.be/X2HYTkxn6oE
- https://www.youtube.com/watch?v=exUb466NDw8

Loi de Bernoulli, loi binomiale

- http://rainet.telecom-lille.fr/unit/r02b/index.htm

Simuler Pi par montecarlo

- https://youtu.be/Xaymy3Blnq4
- https://youtu.be/53bKJhCvDqY

La génération du hasard en informatique

- https://youtu.be/bODkr-BqGHg

Un peu de détente

- https://www.canal-u.tv/video/tele2sciences/kezako_pourquoi_la_tartine_tombe_toujours_du_cote_beurre.9723
- https://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9s_de_Sicherman
- http://www.math93.com/theoreme/probabilites.html

3 Variables aléatoires, lois de probabilités

3.1 Variable aléatoire

On appelle variable aléatoire X sur un univers Ω toute application de Ω vers IR. Une variable aléatoire est donc une fonction qui à un évènement de Ω fait correspondre un nombre.

Exemple : On lance deux dés parfaits distincts et on calcule la somme X obtenue. L'univers est l'ensemble des couples d'éléments de {1;2;3;4;5;6} : card(Ω) = 36. Chaque événement élémentaire a la probabilité : 1 / 36. L'ensemble des valeurs possibles de X est : {2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12}. On désigne par (X = n) l'événement : « la somme obtenue est n ».

3.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit P une probabilité définie sur un univers. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X sur Ω est l'application qui à toute valeur x_i prise par X associe $P(X = x_i)$.

3.3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω. La fonction de répartition de X est l'application F de IR vers [0,1] définie par :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Exemple : On lance deux dés parfaits distincts et on calcule la somme X obtenue. La fonction de répartition est donnée ci-dessous

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 0 & , si\ x < 2; \\ \frac{1}{36} & , si\ 2 \leqslant x < 3; \\ \frac{3}{36} & , si\ 3 \leqslant x < 4; \\ \frac{6}{36} & , si\ 4 \leqslant x < 5; \\ \frac{10}{36} & , si\ 5 \leqslant x < 6; \\ \frac{15}{36} & , si\ 6 \leqslant x < 7; \\ \frac{21}{36} & , si\ 7 \leqslant x < 8; \\ \frac{26}{36} & , si\ 8 \leqslant x < 9; \\ \frac{30}{36} & , si\ 9 \leqslant x < 10; \\ \frac{33}{36} & , si\ 10 \leqslant x < 11; \\ \frac{35}{36} & , si\ 11 \leqslant x < 12; \\ 1 & , si\ 12 \leqslant x. \end{cases}$$

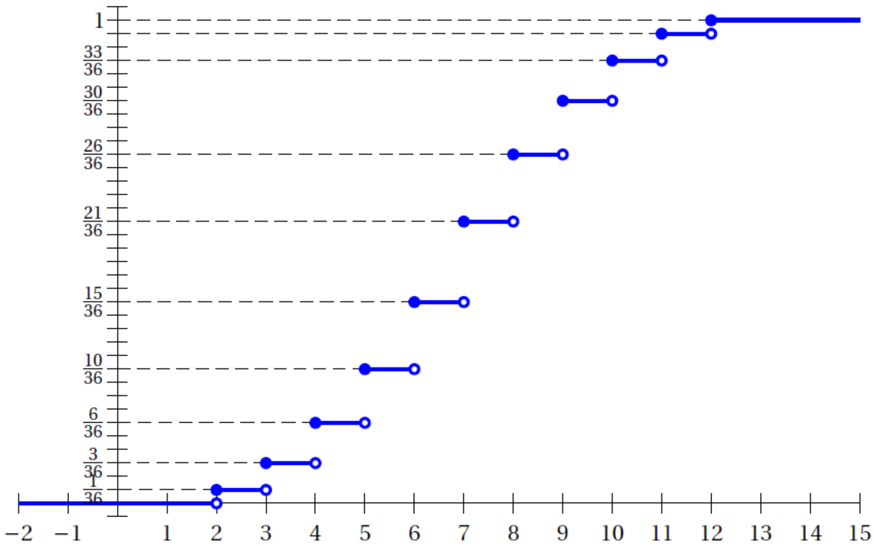


Figure 3. [1]

Remarque :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Remarque : F est une fonction en escalier, définie et croissante sur l'ensemble des réels.

Remarque : la représentation graphique de F est l'équivalent, en probabilités, de la courbe des fréquences cumulées croissantes en statistique.

3.4 Caractéristiques d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \ldots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, \ldots, p_n$.

On appelle espérance mathématique de X le nombre réel, noté E(X), défini par :

$$E(x) = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Soit X une variable aléatoire. On appelle variance de X le nombre réel V(X), défini par

$$V(X) = E(\left(X - E(X)\right)^2)$$

La variance est donc la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

On appelle écart type de X le nombre réel σ(X), défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

La variance étant une moyenne de carrés, on a introduit sa racine carrée pour mieux rendre compte de la dispersion.

Propriétés de l'espérance et de la variance

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω et λ un réel.

E(X + Y) = E(X) + E(Y)

E(X + λ) = E(X) + λ

E(λ.X) = λ.E(X)

E(X − E(X)) = 0

V(X + λ) = V(X)

V(λ.X) = λ^2.V(X)

Formule de König-Huyghens

Soit X une variable aléatoire. On a :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) &= E(X^2 - 2X.E(X) + E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E^2(X) \\ &= E(X^2) - E^2(X) \end{aligned}$$

3.5 Variable aléatoire discrète

Si la variable aléatoire X peut prendre un nombre fini et dénombrable de valeurs dans un intervalle {x_i, i ϵ I} de IR, on dit qu'elle est discrète.

Dans ce cas, $p_i = P(X=xi)$. Les valeurs p_i sont des réels compris entre 0 et 1 et on a : $\Sigma p_i = 1$.

Loi équirépartie

Les valeurs de X ont la même probabilité d'apparition.

Loi binomiale

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve à deux issues possibles. L'issue recherchée est en général appelée succès.

Une expérience (ou un schéma) de Bernoulli est la répétition de n épreuves de Bernoulli, de façon indépendante.

La loi binomiale de paramètres n et p est la loi de probabilité de la variable aléatoire désignant le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli où l'épreuve de Bernoulli a été répétée n fois et où p est la probabilité de succès à une épreuve.

Dans la loi binomiale $B(n,p)$, la probabilité d'échec à une épreuve est : $q = 1- p$. Considérons l'événement $(X = k)$ où $0 \leq k \leq n$. pour réaliser un tel événement, il faut obtenir k succès et $n-k$ échecs. On peut donc choisir les k épreuves parmi n où on aura un succès et pour les $n-k$ épreuves restantes on aura un échec. Il y a donc $\binom{n}{k}$ éventualités qui réalisent l'événement. De plus chaque événement élémentaire inclus dans l'événement $(X= k)$ a pour probabilité : $p^k q^{n-k}$; on en déduit que :

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi binomiale de paramètres n et p.

Pour tout entier k tel que : $0 \leq k \leq n$, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k}.p^k q^{n-k}$$

Espérance et variance : $E(X) = n.p$; $V(X) = n.p.q$

3.6 Variable aléatoire continue

Une variable aléatoire est dite « continue » quand elle peut prendre comme valeurs tous les nombres réels d'un intervalle I de R

3.6.1 Densité de probabilité

Soit f une fonction définie sur I. f est une densité de probabilité si et seulement si :

- f > 0 sur I
- f continue par morceaux sur I
- L'intégrale de f sur I est égale à 1

3.6.2 Probabilité d'un événement

Soit X une variable aléatoire. Si X a comme densité de probabilité la fonction f, alors la probabilité que X soit compris entre 2 réels a et b est donnée par :

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt$$

3.6.3 Fonction de répartition pour une variable aléatoire continue

Pour une variable aléatoire continue, la fonction de répartition, soit la fonction qui à x associe la probabilité que X soit inférieure à x devient :

$$x \to p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

3.6.4 Loi uniforme sur I=[a,b]

La loi uniforme a pour densité de probabilité la fonction :

$$\forall\, t,\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}\ si\ a \leq t \leq b \\ 0\ sinon \end{cases}$$

La fonction de répartition est :

$$p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0\ si\ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}\ si\ a \leq x \leq b \\ 1\ si\ x > b \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

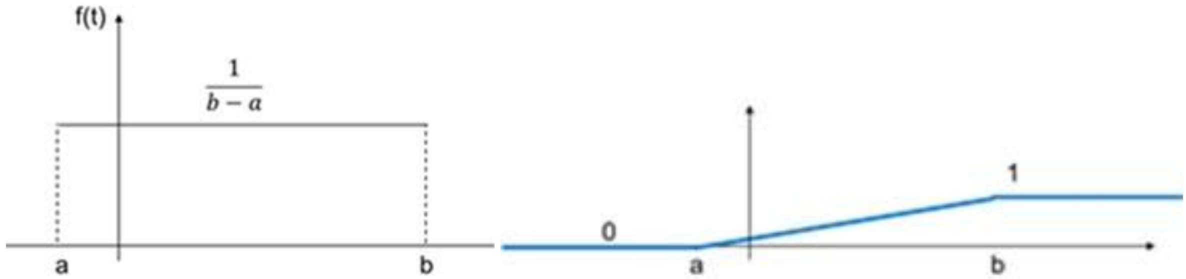


Figure 4. Loi uniforme. Gauche : densité de probabilité. Droite : fonction de répartition

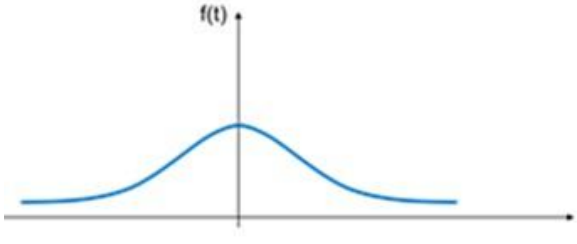
3.6.5 Loi normale centrée réduite

La loi normale centrée réduite N (0,1) est la loi de probabilité dont la densité est la fonction f suivante :

$$\forall\, réel\ t,\ f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-t^2/2}$$

La fonction de répartition est, pour tout réel x :

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-t^2/2}dt$$



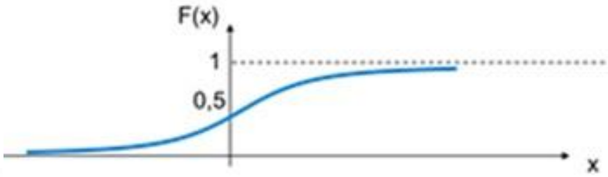
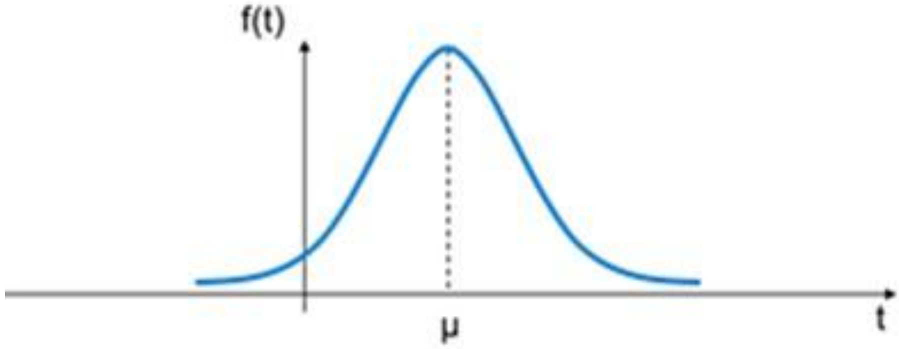


Figure 5. Loi normale centrée réduite. Gauche : densité de probabilité. Droite : fonction de répartition

3.6.6 Loi normale

Une variable aléatoire X suit la loi N (μ, σ²) si et seulement si la variable aléatoire (X − μ) / σ suit la loi normale centrée réduite N (0,1).

μ est l'espérance de N (μ, σ²), σ² est sa variance et σ est son écart-type.



Exploitation d'une loi normale

On souhaite déterminer la probabilité que la variable X soit inférieure à une valeur α donnée : P(X ≤ α).

Si la variable aléatoire X suit la loi N (μ, σ²), alors la variable aléatoire (X − μ) / σ suit la loi normale centrée réduite N (0,1).

En considérant que

$$P(X \leq \alpha) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$$

alors l'étude se ramène à l'exploitation de la loi normale centrée réduite.

4 Exercices

4.1.1.1 Exercice. Pièces de monnaie : espérance

On lance deux pièces de monnaie non truquées. Si les deux pièces font « pile », le gain est de 3 euros. Si les deux pièces font « face », le gain est de 2 euros. Si les deux pièces ne retombent pas du même côté, la perte est de 3 euros. Ce jeu est-il avantageux pour le joueur ?

1/ OUI car à chaque partie on peut « espérer » gagner 0.60€

2/ NON car à chaque partie on peut « espérer » perdre 0.25€

3/ OUI car à chaque partie on peut « espérer » gagner 0.25€

4/ Ni l'un ni l'autre

Réponse

Réponse 2. A chaque partie on peut « espérer » perdre 0.25€. En effet l'espérance est

$$E = \frac{1}{4}.3 + \frac{1}{4}.2 + \frac{1}{2}.(-3) = -0.25$$

L'espérance est négative donc le jeu n'est pas avantageux pour le joueur.

4.1.1.2 Exercice : la courbe en cloche

Extrait de [Une révolution de la théorie des nombres. Gauss. 2018]

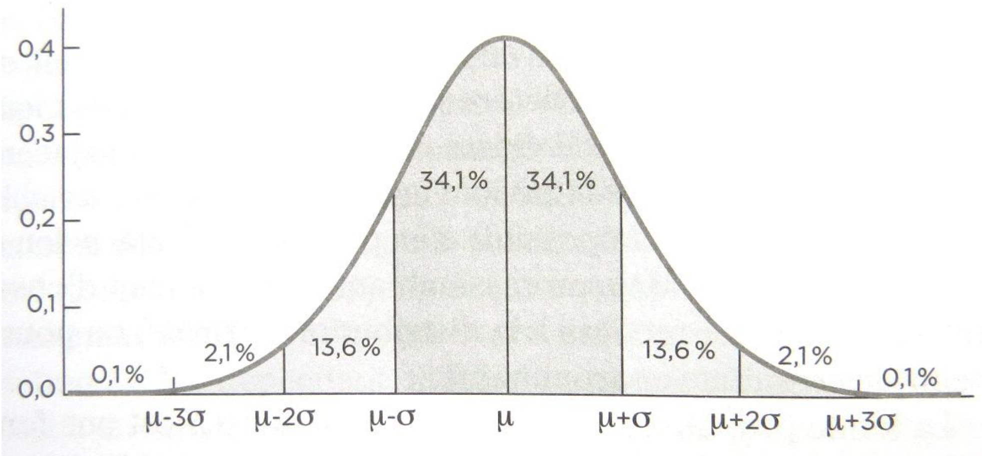
« L'importance de la loi normale, aussi connue sous les noms de distribution gaussienne, de courbe de Gauss ou de courbe en cloche, réside dans sa capacité à décrire de nombreux phénomènes naturels, sociaux et psychologiques.

Elle tire sa légitimité du théorème central limite, selon lequel, dans des conditions très générales, une distribution normale permet de bien approcher la fonction de répartition de la somme de n variables aléatoires indépendantes et de variance non nulle mais finie. Cela se produit quand la somme de ces variables aléatoires et indépendantes est suffisamment élevée.

En statistique, Gauss est connu pour la courbe qui porte son nom, bien qu'il n'en fût pas l'inventeur. […] La distribution normale fut expliquée pour la première fois par Abraham de Moivre (1667-1754) en 1733. Si le nom de Gauss est resté associé à cette loi, c'est surtout parce qu'il en faisait régulièrement usage dans ses analyses de données astronomiques, lorsqu'il dirigeait l'observatoire de Göttingen »

La densité de probabilité d'une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ est donnée ci-dessous.

Démontrer, par le calcul et en détaillant votre raisonnement, les valeurs 34.1%, 13.6%, 2.1% et 0.1% indiquées sur la courbe



4.1.1.3 Exercice : Dés de Sicherman

On lance deux dés distincts et équilibrés. Soit X la somme obtenue.

Les faces des dés sont :

Dé 1 : 1,2,2,3,3,4

Dé 2 : 1, 3, 4 ,5, 6, 8

Remplir le tableau ci-contre

	1	2	2	3	3	4
1						
3						
4						
5						
6						
8						

Calculer la loi de probabilité de X

Correction

	1	2	2	3	3	4
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7

4	5	6	6	7	7	8
5	6	7	7	8	8	9
6	7	8	8	9	9	10
8	9	10	10	11	11	12

N	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
P(x=n)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

4.1.1.4 Exercice : variables aléatoires discrètes, loi équirépartie, fonction de répartition

On lance deux dés distincts et équilibrés. Soit X la somme obtenue.

Le tableau à droite est l'ensemble des résultats possibles:

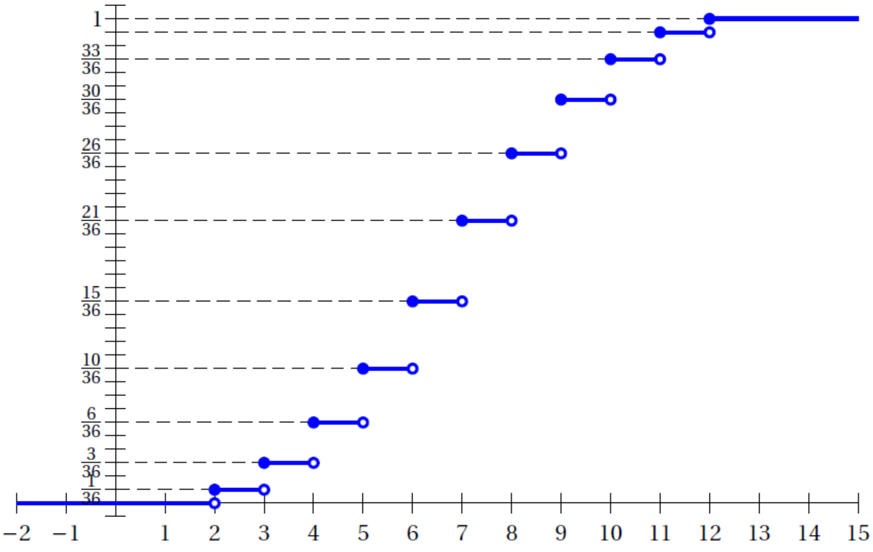
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

1/ Calculer $P(X \leq 6)$

2/ Tracer la fonction de répartition de X

Correction

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , si\ x < 2 ; \\ \frac{1}{36} & , si\ 2 \leqslant x < 3 ; \\ \frac{3}{36} & , si\ 3 \leqslant x < 4 ; \\ \frac{6}{36} & , si\ 4 \leqslant x < 5 ; \\ \frac{10}{36} & , si\ 5 \leqslant x < 6 ; \\ \frac{15}{36} & , si\ 6 \leqslant x < 7 ; \\ \frac{21}{36} & , si\ 7 \leqslant x < 8 ; \\ \frac{26}{36} & , si\ 8 \leqslant x < 9 ; \\ \frac{30}{36} & , si\ 9 \leqslant x < 10 ; \\ \frac{33}{36} & , si\ 10 \leqslant x < 11 ; \\ \frac{35}{36} & , si\ 11 \leqslant x < 12 ; \\ 1 & , si\ 12 \leqslant x. \end{cases}$$



4.1.1.5 Clash of Clans™

Clash of Clans™ est un jeu de stratégie en ligne dont le but est de créer et développer un camp en combattant les autres joueurs. Clash of Clans™ est développé par SUPERCELL.

Exercice : les attaques des autres joueurs : la taille des armées

Le nombre de soldats que contiennent les armées des joueurs suit une loi normale de moyenne 150 et d'écart-type 30. Quelle est la probabilité pour que votre camp soit attaqué par une armée de plus de 200 soldats ?

Exercice : expérience des joueurs d'un clan

Les joueurs peuvent former des clans pour s'allier et affronter d'autres clans. Chaque joueur a une expérience d'espérance $\mu = 200$, d'écart-type 50, suivant une loi normale. On prend un joueur au hasard parmi l'ensemble des joueurs du jeu. Quelle est la probabilité pour que son expérience soit inférieure à 210 ?

Exercice : pièges

Des pièges peuvent être installés pour repousser les ennemis. Ils se déclenchent automatiquement au passage de l'ennemi mais doivent être réactionnés manuellement.

Vous partez en vacances dans une zone sans WIFI et sans réseau mobile. Impossible de vous connecter à votre profil Clash of Clans pour réactionner vos pièges !

Juste avant votre départ, vous actionnez vos deux pièges.

Avec l'expérience, vous avez déduit que chaque jour, un piège a la probabilité p=0.8 de ne pas être actionné par un ennemi.

Xn est le nombre de pièges actionnés au début de la n-ième journée de vacances (n = 0, 1, ….).

a. Combien d'états possède cette chaîne de Markov ?

b. Déterminer les probabilités de transition correspondantes et réaliser le graphe des transitions.

c. Cette chaîne de Markov est-elle absorbante ? Si oui, quel est l'état absorbant et quelle est la distribution limite de cette chaîne ?

d. Ecrire la matrice de transition P

e. Les deux éléments sont en état de fonctionnement à n = 0. Quelle est la distribution du nombre d'éléments en panne après n jours ?

f. Combien de jours seront nécessaires pour passer de 0 à 2 machines en panne ?

CORRECTION

Exercice : les attaques des autres joueurs : la taille des armées (3 pts)

Le nombre de soldats que contiennent les armées des joueurs suit une loi normale de moyenne 150 et d'écart-type 30. Quelle est la probabilité pour que votre camp soit attaqué par une armée de plus de 200 soldats ?

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 150 et d'écart-type 30

On cherche

$$P(X > 200)$$

Or

$$P(X > 200) = P(\frac{X - 150}{30} > \frac{200 - 150}{30})$$

Soit $Y = \frac{X-150}{30}$, alors

$$P(X > 200) = P(Y > 1.67) = 1 - P(Y < 1.67)$$

X suit la loi normale de moyenne 150 et d'écart-type 30 donc Y suit la **loi normale centrée réduite N(0,1)** donc par lecture sur la table de la loi normale centrée réduite

$$P(Y < 1.67) = 0.9525$$

donc

$$P(X > 200) = 1 - 0.9525 = 0.0475$$

Exercice : expérience des joueurs d'un clan (3 pts)

Les joueurs peuvent former des clans pour s'allier et affronter d'autres clans. Chaque joueur a une expérience d'espérance µ = 200, d'écart-type 50, suivant une loi normale. On prend un joueur au hasard parmi l'ensemble des joueurs du jeu. Quelle est la probabilité pour que son expérience soit inférieure à 210 ?

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne 200 et d'écart-type 50

On cherche

$$P(X < 210)$$

Or

$$P(X < 210) = P(\frac{X - 200}{50} < \frac{210 - 200}{50})$$

Soit $Y = \frac{X-200}{50}$, alors

$$P(X < 210) = P(Y < 0.2)$$

X suit la loi normale de moyenne 200 et d'écart-type 50 donc Y suit la loi normale centrée réduite donc par lecture sur la table de la loi normale centrée réduite

$$P(Y < 0.2) = 0.5793$$

Exercice : pièges (4 pts)

a. Combien d'états possède cette chaîne de Markov ?

3 états : 0, 1 et 2 pièges actionnés

b. Déterminer les probabilités de transition correspondantes et réaliser le graphe des transitions.

$$p_{00} = p(A \cap B) = p(A).p(B) = p.p = 0.8^2$$

$$p_{01} = p.(1-p) + p.(1-p) = 2p(1-p) = 2 * 0.8 * (1 - 0.8) = 2 * 0.8 * 0.2$$

$$p_{02} = p(piège\ A\ soit\ actionné) * p(piège\ B\ soit\ actionné) = 0.2^2$$

$$p_{10} = 0$$

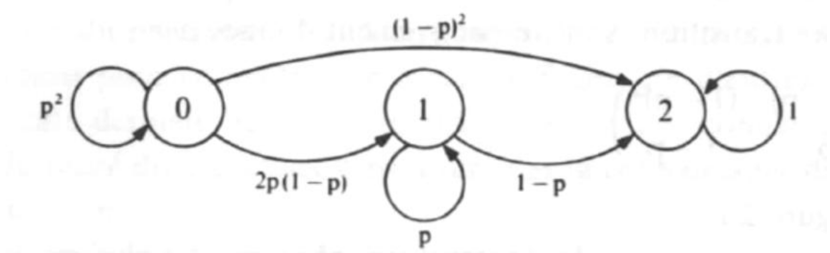
$$p_{20} = 0$$

$$p_{21} = 0$$

$$p_{11} = 0.8$$

$$p_{12} = 0.2$$

$$p_{22} = 1$$



p=0.8

c. Cette chaîne de Markov est-elle absorbante ? Si oui, quel est l'état absorbant et quelle est la distribution limite de cette chaîne ?

Oui, l'état 2 est absorbant. La distribution limite est donc $\pi = (0,0,1)$

d. Ecrire la matrice de transition P

$$P = \begin{pmatrix} p^2 & 2p(1-p) & (1-p)^2 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e. Les deux éléments sont en état de fonctionnement à n = 0. Quelle est la distribution du nombre d'éléments en panne après n jours ?

$$\pi(n) = \pi(0).p^n = (p^{2n}, 2p^n(1-p)^n, (1-p^n)^2)$$

f. Combien de jours seront nécessaires pour passer de 0 à 2 machines en panne ?

$$\begin{cases} n_0 = 1 + p^2.n_0 + 2p(1-p)n_1 \\ n_1 = 1 + p.n_1 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} n_0 = \dfrac{1+2p}{1-p^2} \\ n_1 = \dfrac{1}{1-p} \end{cases}$$

Si $p = 0{,}9$ on a $n_0 = 14{,}7$ et $n_1 = 10$ jours

n0=1+p00.n0+p01.n1=1+p².n0+2p(1-p).n1

n1=1+p10.n0+p11.n1=1+p.n1

Si p=0.8, n0=7.22 jours

4.1.1.6 Exercice. Codage par fréquence d'apparition

Dans la langue française, la fréquence d'apparition des 26 lettres de l'alphabet est connue ou pourrait, avec du codage ou peu de patience, se remesurer à partir d'un texte suffisamment long (pour que le N précédent soit suffisamment grand). Il est courant de crypter un texte en remplaçant par exemple le A par le G, le B par le F, le C par le Z….. Cette technique élémentaire ne résiste cependant pas très longtemps à l'identification des fréquences d'apparitions, si on connait la langue utilisée.

Décrypter le message ci-dessous

b	t	x	r	h	k	b	t	v	w	r	g	a	t	r	w	e	t	g	m	t	d	g	a	w	r	k	j
e	h	z	w	r	j	r	x	q	r	i	k	t	s	t	q	r	m	z	h	m	r	h	u	d	h	v	z
g	s	t	v	r	h	v	l	g	t	z	g	x	r	z	z	t	k	b	v	s	h	m	r	h	q	r	m
w	r	p	d	m	t	z	s	h	m	r	h	q	r	m	w	r	x	d	k	z	r	i	k	t	s	t	k
t	q	g	h	v	b	t	x	t	g	m	t	m	w	d	h	k	b	t	z	d	h	q	w	g	v	w	d
k	i	z	t	x	q	v																					

A	7,47%
B	0,87%
C	3,16%
D	3,98%
E	17,66%
F	1,11%
G	0,77%
H	0,81%
I	7,38%
J	0,60%
K	0,00%
L	5,69%
M	3,04%
N	7,24%
O	5,40%
P	2,76%
Q	1,34%
R	6,33%
S	8,50%
T	7,08%
U	6,83%
V	1,20%
W	0,02%
X	0,37%
Y	0,26%
Z	0,13%

4.1.1.7 Estimer π par Monte Carlo

On développe sous Excel une simulation de Monte-Carlo pour estimer la valeur de π.

Attention : rand n’est plus la fonction EXCEL pour générer un nombre aléatoire. Utiliser maintenant ALEA()

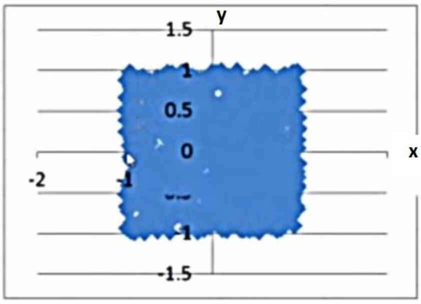
Le principe est le suivant :

1. Excel choisit une valeur comprise entre -1 et 1 pour la variable X.
2. Excel choisit une valeur comprise entre -1 et 1 pour la variable Y.

On obtient un point de coordonnées (X,Y).

Cette opération est répétée 1000 fois et représentée graphiquement.

Le nuage de points de coordonnées (X,Y) obtenu est donné ci-dessous.

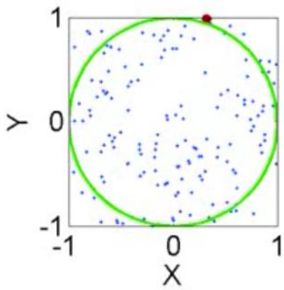


https://www.youtube.com/watch?v=53bKJhCvDqY

Puis

1. Pour chaque point, soit $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$
2. Si $r \leq 1$, alors on donne à la variable Z la valeur 1.
3. Si $r > 1$, alors on donne à la variable Z la valeur 0.

La valeur de Z dépend donc de la position du point de coordonnées (X,Y) par-rapport au cercle vert inscrit dans le carré ci-dessous :



https://www.youtube.com/watch?v=Xaymy3Blnq4

Soit S la somme de tous les Z obtenus :

$$S = \sum_{i=1}^{1000} Z_i$$

On obtient par exemple S = 793. 793 points sont donc tombés dans le cercle.

Or la probabilité de tomber dans le cercle est donnée par

$$p = \frac{Aire\ du\ cercle}{Aire\ du\ carré}$$

Quelle est la valeur de π donnée par cette simulation ? Arrondir à 3 chiffres après la virgule.

Indice : calculer l'aire du cercle et l'aire du carré en fonction de π et r. La probabilité p=793/1000.

Réponse : 3.172

4.1.1.8 Le Chevalier de Méré : au moins un 6

Calculer la probabilité p de faire au moins un 6 en lançant 4 fois un dé parfait.

Arrondir à 3 chiffres après la virgule.

Indice : p = 1 – la probabilité de ne faire aucun 6. On peut ensuite compter le nombre total d'évènements lors de 4 lancés de dés et le nombre d'évènements ne donnant aucun 6.

Réponse

Soit p cette probabilité. On a p = 1 – la probabilité de ne faire aucun 6

Nombre total d'évènements : 6*6*6*6 = 1296

Nombre d'évènements sans 6 : 5*5*5*5=625

Donc

$$p = 1 - \frac{625}{1296} = 0.518$$

On peut aussi dénombrer les évènements avec un seul 6 (4*5*5), les évènements avec deux 6 (6*5*5), les évènements avec trois 6 (4*5) et l'évènement quatre 6

$$p = \frac{4 * 125 + 6 * 25 + 4 * 5 + 1}{1296} = \frac{671}{1296} = 0.518$$

4.1.1.9 Le Chevalier de Méré : au moins un double 6

Calculer la probabilité p de faire au moins une fois un double 6 en lançant 24 fois une paire de dés parfaits. Arrondir à 3 chiffres après la virgule.

Indice : p = 1 – la probabilité de ne faire aucun 6. On peut ensuite compter le nombre d'évènements total lors de 4 lancés de dés et le nombre d'évènements ne donnant aucun 6.

Réponse

Soit p cette probabilité. On a p=1 – la probabilité de ne faire aucun 6

Nombre total d'évènements : 36^{24}

Nombre d'évènements sans double 6 : 35^{24}

Donc

$$p = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.491$$

Autre raisonnement : sur un lancer, probabilité de ne pas faire de double 6 : 35/36

Sur 24 lancers, on multiplie les probabilités : $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ donc

$$p = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$$

4.1.1.10 Probabilités conditionnelles : 3 pièces de monnaie

On lance trois pièces de monnaie bien équilibrées et distinctes. On constate aisément que si on lance trois pièces, il y en a deux qui seront déjà du même côté. Par conséquent, la troisième y sera avec une chance sur deux. Donc il y a une chance sur deux que toutes trois tombent du même côté ?

1/ Vrai

2/ Faux

Indice : pourquoi ne pas simplement réaliser un petit dénombrement ?

Réponse : faux. C'est le paradoxe des pièces de monnaie

Il y a huit possibilités équiprobables (PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF), parmi celles-ci se trouvent deux cas favorables (PPP et FFF). La probabilité vaut donc 2/8, soit 0,25.

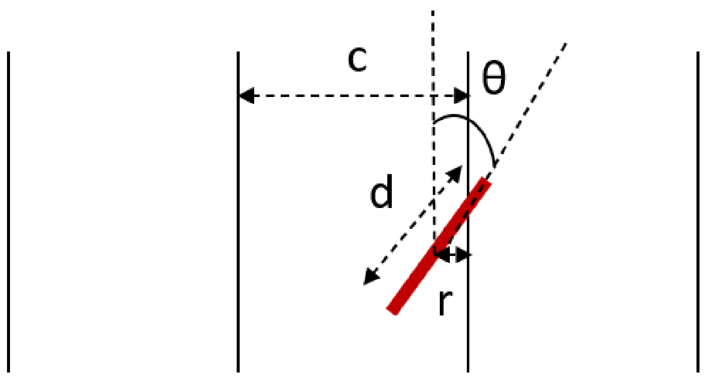
https://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_des_trois_pi%C3%A8ces_de_monnaie

4.1.1.11 L'aiguille de Buffon (Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon (1733))

L'aiguille de Buffon (Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon (1733))

Quelle est la probabilité p pour qu'une aiguille de longueur d jetée sur un parquet régulier de lattes de largeur c>d touche une rainure ?

Soit r la distance entre le centre de l'aiguille et la latte la plus proche, et θ l'angle entre les lattes et l'aiguille.



Q1/ On voit que l'aiguille touche une latte si

1/ $r < d/2.sin\theta$

2/ $r > \frac{d}{2}.sin\theta$

3/ $r < d.cos\theta$

4/ $r > d.sin\theta$

Réponse

$$r < \frac{d}{2}.sin\theta$$

Q2/ Les valeurs possibles de r sont l'intervalle

1/ [0,c/2]

2/ [0,c]

3/ [0,2c]

Réponse

[0,c/2]

Q3/ Les valeurs possibles de θ sont l'intervalle

1/ [0,π/2]

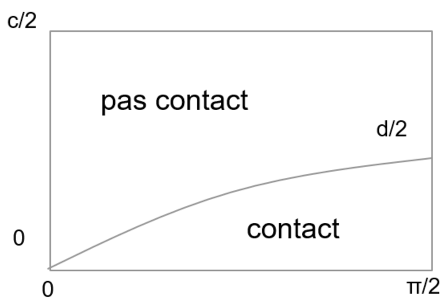
2/ [0,π]

3/ [0,2π]

Réponse

[0,π/2]

On a tracé ci-dessous la fonction $r = \frac{d}{2}.sin\theta$ et indiqué les points (r,θ) où il y a contact et les points (r,θ) sans contact.



Q4/ La probabilité de contact est

1/ $2d/(\pi.c)$

2/ ¼

3/ $\frac{d}{\pi}$

4/ $\frac{d}{c}$

Indice : la probabilité qu'une aiguille touche une latte est l'aire de la surface où les couples (r,θ) donnent le contact divisée par l'aire de la surface totale délimitée par les intervalles de valeurs possibles de r et θ. Une aire sous une courbe est une intégrale.

Réponse

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\frac{d}{2}.sin\theta}{\frac{\pi}{2}.\frac{c}{2}} d\theta = \frac{2d}{\pi.c}$$

Commentaire : en réalisant un grand nombre d'expériences, on peut en déduire la valeur de π avec un sol en parquet et une petite aiguille, et beaucoup de patience……

4.1.1.12 Calcul de probabilités à partir d'un dénombrement : anniversaires

Pour que la probabilité que deux élèves d'une même classe soient nés le même jour soit supérieur à 0.5, il faut un nombre n d'élèves égal à

1/ 366 car il y a 365 jours dans une année

2/ 91

3/ 23

4/ 721 car il est hautement improbable que deux élèves soient nés le même jour alors que la probabilité d'être né un jour donné est de 1/365 soit moins de 0.003

Indice : soit A l'évènement « deux élèves aient leur anniversaire le même jour ».

p(A) = 1-probabilité qu'aucun élève ne soit né le même jour qu'un autre

Si le 1er élève est né le jour A, pour le deuxième élève, la probabilité qu'il ne soit pas né ce jour-là est 364/365 (on néglige les années bisextiles). Pour le troisième élève, la probabilité qu'il ne soit pas né le même jour que les deux premiers élèves est 363/365….etc.

Réponse : 23. C'est le paradoxe des anniversaires (paradoxe car il contredit notre intuition).

https://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_des_anniversaires

Soit A l'évènement « deux élèves aient leur anniversaire le même jour ».

p(A) = 1-probabilité qu'aucun élève ne soit né le même jour qu'un autre

$$p(A) = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-23)!}}{365^{23}} \approx 0.507$$

4.1.1.13 Evènements incompatibles et indépendants

Deux évènements incompatibles sont-ils indépendants ?

1/ OUI

2/ NON

3/ Seulement si l'un deux des deux est improbable

Indice : calculons la probabilité de B sachant que A est réalisé :

$$p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$$

Si les deux évènements sont incompatibles, alors $p(B \cap A) = 0$, donc ?

Réponse : 3/ Seulement si l'un deux des deux est improbable

Soient A et B deux évènements. Calculons la probabilité de B sachant que A est réalisé :

$$p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$$

Si les deux évènements sont incompatibles, alors $p(B \cap A) = 0$, donc $p(B/A) = 0$. Or si les deux évènements sont indépendants, $p(B/A) = p(B)$.

Donc il faut $p(B) = 0$

Si un des deux est improbable, il est de fait incompatible (ils ne peuvent se produire en même temps) et indépendant de l'autre (l'autre se réalisera indépendamment de cet évènement).

Donc deux évènements incompatibles sont indépendants seulement si l'un deux des deux est improbable.

4.1.1.14 La génération du hasard sous SCILAB

Ouvrez SCILAB (version 6.0.2) et exécutez la commande « rand ».

Quel nombre aléatoire avez-vous obtenu ? Donner 7 chiffres après la virgule

Réponse : 0.2113249

Fermez et ouvrez de nouveau SCILAB, puis exécutez la commande « rand ».

Quel nombre aléatoire avez-vous obtenu ? Donner 7 chiffres après la virgule

Réponse : 0.2113249

Fermez et ouvrez de nouveau SCILAB, puis exécutez la commande « rand ».

Quel nombre aléatoire avez-vous obtenu ? Donner 7 chiffres après la virgule

Réponse : 0.2113249

La commande SCILAB « rand » est-elle vraiment une génération de nombre aléatoire ? Plusieurs réponses possibles

1/ cela semble moins évident qu'il n'y parait

2/ oui puisqu'elle s'appelle « rand » comme random en anglais

3/ la fonction rand est en fait une suite de nombres déterministe

Indice : taper « help rand » dans SCILAB

Réponse : 1 et 3.

Reproduisez la démarche avec la commande « grand(1,1,"uin",1,60) ». Ouvrez et exécutez cette commande. Quel nombre aléatoire obtenez-vous ?

Réponse : 33

4.1.1.15 Calcul de probabilités à partir d'un dénombrement : lancer de deux dés

On lance au hasard deux dés en tous points identiques et bien équilibrés.

On donne ci-dessous l'ensemble des 21 résultats possibles du lancer :

{1,1}{2,2}{3,3}{4,4}{5,5}{6,6}{1,2}{1,3}{1,4}{1,5}{1,6}{2,3}{2,4}{2,5}{2,6}{3,4}{3,5}{3,6}{4,5}{4,6}{5,6}

Soient A l'évènement « la somme des deux nombres obtenus est paire » et B l'évènement « la somme des deux nombres obtenus est impaire ».

Cocher les réponses justes

1/ Comme 12 évènements réalisent A, p(A)=12/21

2/ Comme 9 évènements réalisent B, p(B)=9/21

3/ p(A)+p(B)=1

4/ Comme il y autant d'entiers naturels pairs que d'entiers naturels impairs, p(A)=p(B)=0.4

Indice : quel que soit le résultat de l'expérience, est-on sûr d'obtenir l'évènement soit A soit B ? Est-ce que la loi est uniforme ? Qu'est-ce que l'espace des dés discernables ?

Réponse : 3

On a seulement p(A)+p(B)=1 car on obtient soit un nombre pair soit un nombre impair

Les réponses 1 et 2 sont fausses car la loi n'est pas uniforme, chaque évènement parmi les 21 n'a pas la même probabilité de 1/21. En effet, {1,1} est un seul évènement mais {1,2} est en fait deux évènements : un dé fait 1 et l'autre fait 2.

Il faudrait raisonner sur l'espace des dés discernables.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8

3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Sur 36 évènements, on distingue 18 évènements qui donnent un nombre pair donc p(A)=18/36=0.5

Sur 36 évènements, on distingue 18 évènements qui donnent un nombre impair donc p(B)=18/36=0.5

4.1.1.16 Probabilités de deux évènements A et B

Soient A et B deux évènements tels que P(A) = P(B) = 0.9, alors

1/ P(A∩B)≥0.8

2/ P(A∩B)≥0.9

3/ P(A∩B)=0.9

4/ P(A∩B)<0.1

Indice : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Réponse :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Or

$$P(A \cup B) \leq 1$$

Donc

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

Donc

$$P(A \cap B) \geq 0{,}8$$

4.1.1.17 Indépendance de deux évènements

On lance un dé à six faces. On suppose la loi de probabilité uniforme.

Soient les évènements A={1,2,3}, B={2,3,4,5} et C={3,4,5,6}

Cocher les réponses justes

1/ A et B sont indépendants

2/ Les 3 évènements sont indépendants

3/ A et C ne sont pas indépendants

4/ A et B ne sont pas indépendants

Indice : soient A et B deux événements, A et B sont indépendants si et seulement si

$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

Réponse

1 et 3

Soient A et B deux événements, A et B sont indépendants si et seulement si

$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

A∩B est l'évènement {2,3} donc p(A∩B)=1/3

A∩C est l'évènement {3} donc p(A∩C)=1/6

p(A)=1/2 ; p(B)=2/3 et p(A∩B)=1/3 donc on a p(A∩B)=p(A).p(B) donc A et B sont indépendants.

p(C)=2/3 et p(A∩C)=1/6 donc p(A∩C)≠p(A).p(C) donc A et C ne sont pas indépendants.

4.1.1.18 Probabilités conditionnelles : unité de production

Une unité de production comprend deux machines qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Chaque machine a la fiabilité p au cours d'une journée : sa probabilité de tomber en panne au cours d'une journée est 1–p. Dans ce cas, elle sera réparée la nuit et se retrouvera en état de marche le lendemain. Une seule machine peut être réparée à la fois.

Calculer les probabilités suivantes :

- p00 : probabilité qu'au début du jour n, 0 machine soit en panne, sachant qu'au début du jour n-1 aucune machine n'était en panne
- p01 : probabilité qu'au début du jour n, une machine soit en panne, sachant qu'au début du jour n-1 aucune machine n'était en panne
- p10 : probabilité qu'au début du jour n, aucune machine ne soit en panne, sachant qu'au début du jour n-1, 1 machine était en panne
- p11 : probabilité qu'au début du jour n, 1 machine soit en panne, sachant qu'au début du jour n-1 1 machine était en panne

Indice : identifier les scénarios possibles dans chaque cas

Réponse

$$p_{00} = p^2 + 2p(1-p)$$

(les deux machines ne sont pas tombées en panne, ou une des machines est tombée en panne mais a été réparée dans la nuit)

$$p_{01} = (1-p)^2$$

(les deux machines sont tombées en panne)

$$p_{10} = p$$

La machine qui n'était pas en panne n'est pas tombée en panne et l'autre a été réparée dans la nuit

$$p_{11} = 1 - p$$

La machine qui n'était pas en panne est tombée en panne, une seule a pu être réparée dans la nuit

4.1.1.19 Loi de probabilité : Bernoulli

Un tas de cartes contient 3 cœurs et 7 piques.

On réalise 100 tirages avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 10 cœurs ?

1/ 0.10

2/ Environ $1{,}17.10^{-6}$

3/ 0.30

4/ Environ $2{,}56.10^{-1}$

Indice : soit p=0.3 la probabilité d'avoir un cœur pour un tirage. Soit X le nombre de cartes cœurs. X suit une loi de Bernoulli avec n=100 et p=0.3

Réponse

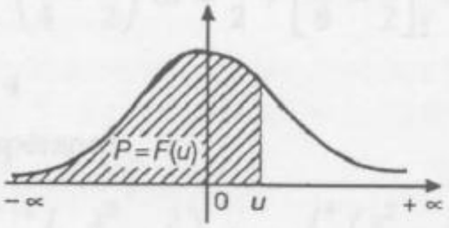
Soit p=0.3 la probabilité d'avoir un cœur pour un tirage. Soit X le nombre de cartes cœurs. X suit une loi de Bernoulli avec n=100 et p=0.3. Donc

$$P(X = 10) = C_{100}^{10}.\,0.3^{10}0.7^{90} \approx 1{,}17.10^{-6}$$

5 Annexes

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Probabilité $F(u)$ d'une valeur inférieure à u



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

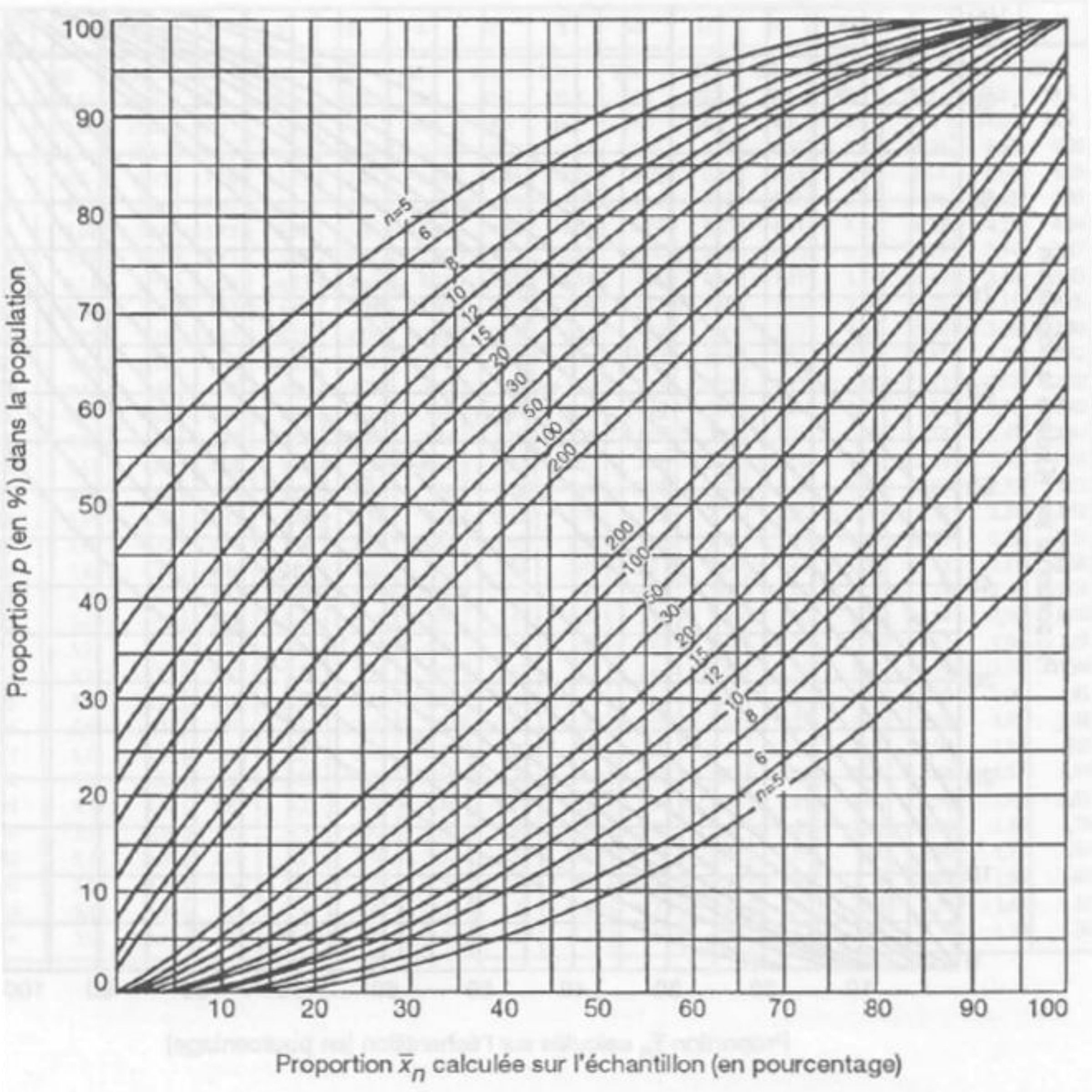
Tables pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$F(u)$	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

Intervalles de confiance pour une proportion p

Intervalle bilatéral de niveau de confiance 0,95

Intervalles unilatéraux de niveau de confiance 0,975



Fractiles d'ordre P de la loi de Student T_ν

ν \ P	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,999	0,9995
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
32	0,256	0,530	0,853	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622
34	0,255	0,529	0,852	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348	3,601
36	0,255	0,529	0,852	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	3,333	3,582
38	0,255	0,529	0,851	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	3,319	3,566
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
70	0,254	0,527	0,847	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
90	0,254	0,526	0,846	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183	3,402
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

6 Références bibliographiques

[1], [2], [3], [4], [5], [6]

[1] V. Bonnet, « COURS DE MATHÉMATIQUES Terminale S ». 2011.

[2] REDER, « Probabilités et statistiques. Cours et Exercices Bordeaux I ». 2002.

[3] M. Samuelides, *Probabilités pour les sciences de l'ingénieur: cours et exercices corrigés*. in Sciences sup. Paris: Dunod, 2014.

[4] J. Fourastié et J.-F. Laslier, *Probabilités et statistique*, 3e éd. Paris: Dunod, 1987.

[5] J. Vélu, *Méthodes mathématiques pour l'informatique: cours et exercices corrigés*, 5è ed. in Info Sup. Malakoff: Dunod, 2019.

[6] J. Vélu, G. Avérous, I. Gilles, et F. Santi, *Mathématiques pour l'informatique: rappels de cours, méthodes, exercices et problèmes avec corrigés détaillés*. in Sciences sup. Paris: Dunod, 2008.