Mathématiques

-

Séries entières

Séries de Fourier

Frédéric Menan

fmenan@cesi.fr

Table des matières

1 Séries entières

1.1 Introduction

Tracer sur Geogebra la fonction

$$x \to \sin x$$

Sur l'intervalle [-2;10] puis tracer les polynômes suivants :

$$x \to x - \frac{x^3}{3!}$$

$$x \to x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$x \to x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$x \to x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

Que remarque-t-on ?

1.2 Séries entières à variable complexe

1.2.1 Définition

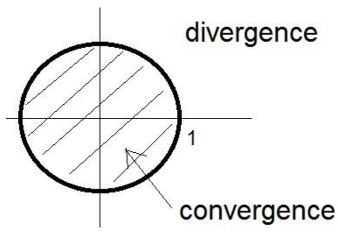
Une série entière de variable complexe z est une série dont le terme général est de la forme

$$Un(z)= a_n.z^n$$

où (a_n) est un nombre réel ou complexe indépendant de z, ou une suite indépendante de z.

1.3 Disque / rayon de convergence

1.3.1 Exemple

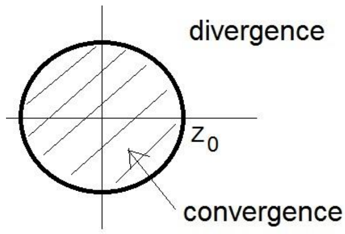


Soit $U_n(z) = z^n$. Pour tout n, on a $a_n = 1$.

Σz^n converge ssi $|z|<1$ (voir chapitre séries)

Pour les valeurs de z comprises dans le disque ci-contre du plan complexe, Σz^n converge.

1.3.2 Lemme d'Abel



Soit z_0 complexe non nul tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée.

Soit $\Sigma a_n z^n$ une série entière.

Pour tout z complexe tel que $|z| < |z_0|$, alors la série $\Sigma a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration

Si la suite ($a_n.z_0^n$) est bornée, alors ∃ M>0 : ∀ entier n, $|a_n.z_0^n| \leq M$ (M indépendant de n).

Or ∀ z, $|a_n.z^n| = |a_n.z_0^n|.\ |z / z_0|^n$, donc $|a_n.z^n| \leq M.|z / z_0|^n$

Si $|z| < |z_0|$, alors la série $\Sigma M.|z / z_0|^n$ est une série géométrique convergente, car $|z / z_0| < 1$.

D'après le théorème de comparaison, $\Sigma a_n.z^n$ est absolument convergente.

1.3.2.1 Rayon de convergence

Soit $\Sigma a_n.z^n$ une série entière. On appelle rayon de convergence de la série entière le nombre

$$R = \sup \{ \rho \in IR^+ \text{ tel que } (a_n.\rho^n) \text{ soit bornée } \}$$

Remarque: sup = borne supérieure

1.3.3 Disque de convergence

Si R < +∞, le disque de centre O de rayon R est appelé disque de convergence, noté D(O, R).

1.3.4 Conditions de convergence d'une série entière

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\Sigma a_n.z^n$

Si R=0, $\Sigma a_n.z^n$ converge seulement pour z=0.

Si R est un réel non nul, $\Sigma a_n.z^n$ converge absolument pour tout complexe z tel que $|z|<R$ et diverge pour tout complexe z tel que $|z|>R$.

Si $\Sigma a_n.z^n$ converge absolument pour tout complexe z, on dit que R=+∞.

1.3.5 Détermination du rayon de convergence

Proposition 1

Soit $\Sigma a_n.z^n$ série entière de rayon de convergence R.

- S'il existe z_0 complexe tel que ($a_n.z_0^n$) soit bornée, en particulier si $\Sigma a_n.z_0^n$ est convergente, alors $R \geq |z_0|$
- S'il existe z_1 complexe tel que la série $\Sigma a_n.z_1^n$ ne converge pas absolument, en particulier si $\Sigma a_n.z_1^n$ diverge, alors $R \leq |z_1|$

Proposition 2 : règle de d'Alembert pour les séries entières

On considère une série entière et un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $a_n \neq 0$

Si

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

existe, le rayon de convergence de la série entière $\Sigma a_n.z^n$ est R = 1/L.

Remarque

1/L = 0 si L = +∞ 1/L = +∞ si L = 0

Démonstration

On pose $Un(z)=a_n.z^n$

Si L ϵ IR^{+*}, alors

$$\left|\frac{U_{n+1}(z)}{U_n(z)}\right| = \left|\frac{a_{n+1}.z^{n+1}}{a_n.z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.|z| \to L.|z|\ quand\ n \to +\infty$$

Cas 1

- Si $|z| < 1/L$ alors $L.|z|<1$ donc $\Sigma Un(z)$ converge absolument donc (proposition 1) $R \geq 1/L$
- Si $|z| > 1/L$ alors $L.|z|>1$ donc $\Sigma|Un(z)|$ diverge donc ∀ z tel que $|z| > 1/L$, on a (proposition 1) $R \leq |z|$ donc $R \leq 1/L$

Donc R = 1/L

Cas 2 : si L = 0, lim $\left|\frac{U_{n+1}(z)}{U_n(z)}\right| = 0.|z| = 0$ pour tout z complexe donc pour tout z complexe, $\Sigma a_n.z^n$ converge absolument donc R = **+∞**

Cas 3 : si L=+∞, si z ≠ 0, $\left|\frac{U_{n+1}(z)}{U_n(z)}\right| \to +\infty$ donc $\Sigma a_n.z^n$ diverge donc R = 0

Exemple

$Un(z)=z^n/n!$ ($a_n = 1/n!$).

$|U_{n+1}(z)/U_n(z)|=|z|/(n+1)$ tend vers 0 quand n tend vers ∞, donc par la règle de d'Alembert, $\Sigma U_n(z)$ converge absolument pour tout z et on écrira que pour tout z,

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

1.4 Série entière d'une variable réelle

Une série entière d'une variable réelle est une série dont le terme général est de la forme

$$Un(x)= a_n.x^n$$

où (a_n) est une suite indépendante de x. (a_n) ϵ IR ou **C**.

Le rayon de convergence de $\Sigma a_n.x^n$ est par définition le rayon de convergence de $\Sigma a_n.z^n$ où z ϵ **C.**

L'intervalle ouvert]-R ; R[sera appelé intervalle ouvert de convergence.

- Si $|x| < R$ alors $\Sigma a_n.x^n$ converge absolument.
- Si $|x| > R$ alors $\Sigma a_n.x^n$ diverge.

Exemple 1

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Si x=1, Σ1/n diverge ; Si x=-1, $\Sigma(-1)^n / n$ converge. S est définie sur Ds=[-1;1[et R=1

1.4.1 Continuité, dérivation terme à terme et intégration terme à terme

Soit $\Sigma a_n.x^n$ une série entière de rayon de convergence R avec R>0.

On pose, pour x ϵ]-R,R[

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$$

Alors : la fonction S est continue sur]-R,R[.

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$ converge pour x = R, alors S est définie et continue sur]-R , R]

S est de classe C^1 sur]-R,R[et ∀ x ϵ]-R,R[on a :

$$S'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n . a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n$$

La série entière $\Sigma n.a_n.x^{n-1}$ appelée série dérivée a aussi pour rayon de convergence R

∀ x de]-R,R[

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n . \int_0^x t^n dt = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n . \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

La série $\Sigma a_n.x^{n+1} / (n+1)$ a même rayon de convergence R

1.5 Application 1 : développement en série entière d'une fonction

1.5.1 Notion de fonction « développable en série entière »

Soit f une fonction à variables réelles définie sur un intervalle ouvert contenant 0.

On dit que f est développable en série entière au voisinage de 0 s'il existe un réel r > 0 et une suite de coefficients a_n telle que ∀ x ϵ]-r , r[,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Si cette suite (a_n) existe, on va montrer qu'elle se calcule à l'aide des dérivées de f.

A quelle condition f sera-t-elle développable en série entière ?

1.5.2 Condition suffisante pour que f soit développable en série entière

1.5.2.1 Compléments d'analyse : formule de Taylor Lagrange

- Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b] à valeurs dans IR, dérivable sur]a,b[, alors il existe un c de]a,b[tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c).(b-a)$$

- Théorème de Rolle

Soit f de [a,b] dans IR, continue sur [a,b], dérivable sur]a,b[et telle que f(a)=f(b), alors il existe un réel c de]a,b[tel que

$$f'(c) = 0$$

- Formule de Taylor Lagrange

Les deux théorèmes précédents permettent d'établir la formule de Taylor Lagrange :

Soit n un entier naturel, f une fonction de classe C^{n+1} sur [a,b], alors il existe un c de]a,b[tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a).f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}.f''(a) + \frac{(b-a)^n}{n!}.f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.f^{(n+1)}(c)$$

1.5.2.2 Condition suffisante pour que f soit développable en série entière

Appliquons la formule de Taylor Lagrange à une fonction f entre 0 et x :

Il existe un c entre 0 et x tel que :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^n}{n!}.f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.f^{(n+1)}(c)$$

Par conséquent, soit f une fonction de classe C^{∞} sur un intervalle contenant 0.

On suppose qu'il existe une constante M > 0 : ∀ x ϵ]-r , r[et ∀ n ϵ IN, on ait $|f^{(n)}(x)| \leq M$

Alors :

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left| f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n \right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.M = 0$$

Donc ∀ x ϵ]-r , r[on a :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k = f(x)$$

et f est développable en série entière.

Remarque : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n$est appelée la série de Taylor associée à f.

1.5.3 Conclusion

Soit f fonction de I de IR → IR où I est un intervalle contenant 0.

On suppose que

- f est indéfiniment dérivable sur I
- il existe une constante M telle que pour tout n de IN, et pour tout x de I, $|f^{(n)}(x)| \leq M$.

Alors f est développable en série entière, la série de Taylor associée à f est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k=f(x)$$

1.5.4 Quelques méthodes de développement d'une fonction en série entière

- Pour une fonction de la forme $\frac{1}{x-a}$

on remarquera que

$$\frac{1}{x-a}=-\frac{1}{a}.\frac{1}{1-x/a}$$

donc pour tout réel x avec |x|<|a|, on a

$$\frac{1}{x-a}=-\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n$$

- Pour une fonction du type,

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}$$

On remarquera que cette fonction peut se décomposer en éléments simples.

Exemple :

$$\frac{1}{(1-x)(2+x)}=\frac{\frac{1}{3}}{1-x}+\frac{\frac{1}{3}}{2+x}=\frac{1}{3}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{x}{2}}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-x}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{1+\frac{x}{2}}$$

- Pour une fonction du type, $(\cos x)^3$

On procèdera par linéarisation en remarquant que $(cosx)^3=\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}cosx$

- Pour une fonction du type, ln(1+x)

On peut procéder par dérivation ou intégration, en remarquant que

$$\ln(1+x)=\int_0^t\frac{dt}{1+t}$$

On connait le développement en série entière de 1/1+t, que l'on peut ensuite intégrer. Ainsi

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

1.6 Application 2 : résolution d'équations différentielles

On voit que les séries entières sont bien adaptées à la dérivation. En cela elles constituent un outil puissant pour la résolution d'équations différentielles.

Exemple : soit l'équation (E) : $x^2.(1-x).y'' - x.(1+x).y' + y = 0$

On recherche les solutions développables en série entière, donc de la forme $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour x ϵ]-R;R[

Dans ce cas,

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n.\,a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1).\,n.\,a_n x^{n-2}$$

y est solution de (E) ssi, ∀ x de]-R;R[,

$$x^2.\,(1-x).\sum_{n=2}^{\infty}(n-1).\,n.\,a_n x^{n-2} - x.\,(1+x).\sum_{n=1}^{\infty} n.\,a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1).\,n.\,a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty}(n-1).\,n.\,a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} n.\,a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n.\,a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[n.\,(n-1) - n + 1].\,a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n)^2.\,a_n.\,x^{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)^2.\,a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)^2.\,a_{n-1} x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)^2.\,(a_n - a_{n-1})x^n + a_0 = 0$$

Chaque coefficient est nul donc $a_0 = 0$, et $(n-1)^2.(a_n - a_{n-1}) = 0$ donc $a_n = a_{n-1}$ pour tout n ≥ 2

$$y = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} x^n = a_1.\,x.\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = a_1.\,x.\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Donc, si |x| < 1,

$$y = a_1.\,x.\frac{1}{1-x}$$

Pour R=1, $y = a_1.\,x.\frac{1}{1-x}$ est solution de (E).

1.7 La fonction exponentielle complexe

Rappels sur les complexes : pour z=x+i.y, (x,y) réels, $e^z = \exp(z) = e^x.e^{iy} = e^x.(\cos y + i.\sin y)$ donc

∀ z complexe,

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

En particulier, pour x ϵ IR,

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n . x^n}{n!}$$

$$e^{-ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n . x^n}{n!}$$

$$e^{ix} + e^{-ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n (1 + (-1)^n) . x^n}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n . x^{2n}}{(2n)!} = 2\cos(x)$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2.\mathrm{i}.\sin(x)$$

2 Séries de Fourier

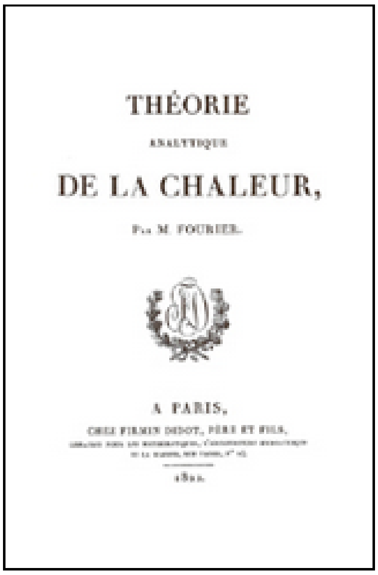
2.1 Un peu d’histoire

Début 19ème siècle : Fourier propose d’approcher une fonction par des séries trigonométriques pour résoudre l’équation de la chaleur

Fin 20ème siècle : essor des séries de Fourier pour le domaine du numérique : traitement du signal, images, communications……

https://interstices.info/la-decomposition-en-series-de-fourier/

Figure 1. Joseph Fourier (1786-1830) (domaine public)



THÉORIE

ANALYTIQUE

DE LA CHALEUR,

PAR M. FOURIER.

A PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,

[1]

Les séries de Fourier sont des séries de fonctions d’un type particulier et servent à étudier les fonctions périodiques. Une fonction périodique quelconque sera ainsi exprimée comme une combinaison linéaire de fonctions périodiques simples, de la forme cos(nx) ou sin(nx), appelée série de Fourier.

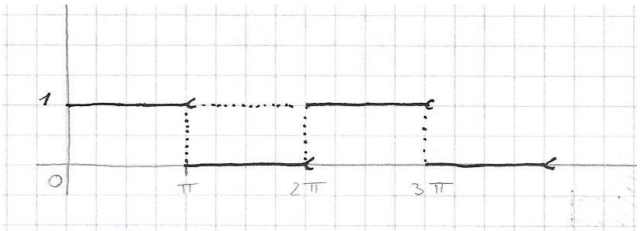
2.2 Notion de fonction périodique

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Le nombre T est une période de f si f(t+T) = f(t) pour tout réel t. Si f admet une période T non nulle, on dit que f est périodique.

Si la fonction f n'est pas une constante, alors il existe une période T>0 telles que toutes les périodes θ de f soient telles que θ=k.T avec k entier. Le nombre T est appelé la période de f.

2.2.1 Exemple d'introduction

Soit la fonction f 2π-périodique : $f(t) = \begin{cases} 1\ si\ t \in [0, \pi[\\ 0\ si\ t \in [\pi, 2\pi[\end{cases}$



$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t).dt = \frac{1}{2}$$

Pour n ≥1

$$a_n(f) = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t).\cos(n\omega t).dt$$

Avec ω=2π/T=1 donc

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t).\cos(nt).dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nt).dt = 0$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt).dt = \frac{1}{n.\pi}.(-\cos(n\pi) + 1) = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

Soit p entier,

$$b_n(f) = 0\ si\ n = 2p$$

$$b_n(f) = \frac{2}{(2p+1).\pi}\ si\ n = 2p+1$$

La série de Fourier de f est :

$$\mathrm{S(f)(t)} = 1/2\ +\ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2}{(2p+1)\pi}.\sin((2p+1)t)$$

2.3 Série trigonométrique

On appelle **série trigonométrique** une série dont le terme général est de la forme

$$U_n(t) = a_n.\cos(n\omega t)+b_n.\sin(n\omega t)$$

ω est une constante appelée la **pulsation**, a_n et b_n sont des réels indépendants de t.

2.3.1 Ecriture réelle

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t)$$

2.3.2 Ecriture harmonique

Les fonctions $H_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t)$ sont appelées les **harmoniques** de la série.

Le premier harmonique est appelé le **fondamental**.

Si $a_n \neq 0$ et $b_n \neq 0$ on peut aussi écrire

$$H_n(t) = A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ (**amplitude**)

$\cos(\varphi_n) = \frac{a_n}{A_n}$ (φ_n : **phase**)

La série trigonométrique peut alors s'écrire sous sa forme dite **harmonique**

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

2.3.3 Ecriture complexe

Soit une série trigonométrique

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \cos n\omega t + b_n . sin n\omega t$$

On rappelle les formules d'Euler :

$$cosx = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \,; sinx = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

Par conséquent,

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \cos n\omega t + b_n . sin n\omega t = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + b_n . \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2}$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right) . e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right) . e^{-in\omega t}$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right).e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right).e^{-in\omega t}$$

Finalement, une série trigonométrique peut aussi s'écrire sous la forme dite **complexe** ci-dessous

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n.e^{in\omega t}$$

Avec pour tout n > 0,

$$c_0 = a_0$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

2.4 Série de Fourier d'une fonction T-périodique

Soit une fonction f : IR → IR continue ou continue par morceaux et T-périodique. Soit $\omega = \frac{2\pi}{T}$

On cherche les coefficients a_n et b_n tels que, ∀ t ϵ IR :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t)$$

2.4.1 Recherche de a_0

On peut écrire

$$\int_0^T f(t)dt = \int_0^T a_0\, dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t)\, dt$$

$$= a_0 T + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^T \cos(n\omega t)dt + b_n \int_0^T sin(n\omega t)dt$$

Or, en rappelant que $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\int_0^T \cos(n\omega t)dt = \left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^T = 0$$

$$\int_0^T sin(n\omega t)dt = \left[\frac{-\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^T = 0$$

donc

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

a_0 est la valeur moyenne de f sur une période.

2.4.2 Recherche de a_n et b_n

Soit n ϵ IN*. Calculons :

$$\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

$$\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \int_0^T \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\omega t) + b_k sin(k\omega t)\right)\cos(n\omega t)\,dt$$

$$\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \int_0^T a_0\cos(n\omega t)\,dt + \int_0^T \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\omega t) + b_k sin(k\omega t)\right)\cos(n\omega t)\,dt$$

Or

$$\int_0^T \cos(n\omega t)dt = 0$$

$$\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \int_0^T \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\omega t) + b_k sin(k\omega t)\right)\cos(n\omega t)\,dt$$

En intégrant terme à terme

$$\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(n\omega t)\,dt + b_k\int_0^T \sin(k\omega t)\cos(n\omega t)\,dt$$

On définit les intégrales $I_k = \int_0^T \cos(k\omega t)\cos(n\omega t)\,dt$ et $J_k = \int_0^T \sin(k\omega t)\cos(n\omega t)\,dt$

$$I_k = \frac{1}{2}\int_0^T \cos((k+n)\omega t) + \cos((k-n)\omega t)\,dt$$

Si k≠n, alors I_k=0

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

- Si k=n, alors

$$I_n = \frac{1}{2}\int_0^T (\cos(2n\omega t) + 1)dt = \frac{T}{2}$$

Par ailleurs,

$$J_k = \int_0^T \sin(k\omega t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T \sin((k+n)\omega t) + \sin((k-n)\omega t)\,dt = 0$$

Finalement, on a

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt$$

On montre également que

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)dt$$

2.4.3 Série de Fourier d'une fonction T-périodique

Si f est T-périodique et continue ou continue par morceaux, alors on peut écrire, pour tout $t_0 \in IR$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t0}^{to+T} f(t)dt$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{t0}^{t0+T} f(t)\cos(n\omega t)dt$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{t0}^{t0+T} f(t)\sin(n\omega t)dt$$

Les nombres $a_0(f)$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont appelés coefficients de Fourier de f et sont indépendants de t_0.

La série trigonométrique construite avec ces coefficients :

$$a_0(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(f).\cos(k\omega t) + b_k(f).\sin(k\omega t)$$

s'appelle la série de Fourier de la fonction f.

La somme partielle de la série de Fourier de f, de rang n, est :

$$S_n(f)(t) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} a_k(f).\cos(k\omega t) + b_k(f).\sin(k\omega t)$$

Si la série de Fourier est convergente en t, on pose :

$$S(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f).\cos(n\omega t) + b_n(f).\sin(n\omega t)$$

2.4.4 Série de Fourier complexe d'une fonction T-périodique

La série de Fourier complexe de f est la série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f).e^{in\omega t}$$

avec

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t).e^{-in\omega t}.dt$$

2.4.5 Autre écriture de la série de Fourier d'une fonction T-périodique

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + b_n.sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)$$

Cette série peut s'écrire sous la forme

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n.cos\left(\frac{2\pi}{T}nt + \varphi_n\right)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

$$\cos(\varphi_n) = \frac{a_n}{A_n}$$

Remarque : $\varphi_n = \pi$ si a_n<0

2.4.6 Théorème de Dirichlet

Soit une fonction f périodique dont on a défini les coefficients de Fourier, on a alors deux questions :

1. La série de Fourier de f converge-t-elle ?

2. Si oui, converge-t-elle vers f ? (autrement dit, soit f une fonction périodique qui admet une série de Fourier, f est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?)

Un des principaux résultats permettant de répondre à ces questions est le théorème de Dirichlet.

2.4.6.1 Notion préliminaire : limites

Soit f une fonction et a un réel. On note

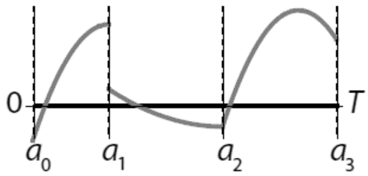
$$f(a^+) = \lim_{t \to a^+} f(t)$$

$$f(a^-) = \lim_{t \to a^-} f(t)$$

2.4.6.2 Notion préliminaire : fonction de classe C^1 par morceaux

Soit f : [a,b] → IR. f est de classe C^1 par morceaux si et seulement si il existe une suite finie $(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ telle que $a_0<a_1<\ldots<a_n$ et :

- ∀ i entier entre 0 et n-1, f et f' sont continues sur $]a_i ;a_{i+1}[$
- ∀ i entier entre 0 et n-1, f et f' admettent des limites à droite en a_i notées $f(a_i+)$ et $f'(a_i+)$
- ∀ i entier entre 1 et n, f et f' admettent des limites à gauche en a_i notées $f(a_i-)$ et $f'(a_i-)$

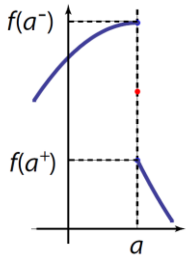


Soit f : IR → IR et T-périodique. On dit que f est de classe C^1 par morceaux si et seulement si sa restriction sur une période est de classe C^1 par morceaux.

2.4.6.3 Théorème de Dirichlet

Soit f fonction T-périodique, de classe C^1 par morceaux.

Alors la série de Fourier associée à f est convergente en chaque point t de IR et



$$S(f)(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f).\cos(n\omega t) + b_n(f).\sin(n\omega t) = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$$

En particulier, si f est continue au point t, alors

$$S(f)(t) = f(t)$$

On dit alors que f est développable en série de Fourier au point t.

2.4.7 Formule de Bessel Parseval

Soit f une fonction T-périodique, continue par morceaux de IR dans IR, alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2(f) + b_n^2(f)$ est convergente et on a :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt = a_0^2(f) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2(f) + b_n^2(f)$$

3 Exercices

3.1.1 Exercice : séries entières et équations différentielles

On propose de chercher la fonction y développable en série entière au voisinage de 0, solution de l'équation différentielle

$$x^2.y'' + 4xy' + 2y = e^x$$

On cherche ainsi une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n$$

Q1/ Donner l'expression de la série $y'(x)$, dérivée de y(x) par-rapport à x

Q2/ Donner l'expression de la série $y''(x)$ dérivée seconde de y(x) par-rapport à x

On rappelle que la série entière associée à la fonction exponentielle est

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.x^n$$

Q3/ En injectant l'expression de y'(x) et y''(x) dans l'équation différentielle, montrer que

$$(n^2 + 3n + 2).a_n = \frac{1}{n!}$$

Q4/ En déduire que

$$a_n = \frac{1}{(n+2)!}$$

Q5/ En déduire que

$$y(x) = \frac{1}{x^2}.\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Q6/ En déduire que

$$y(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Correction

On propose de chercher la fonction y développable en série entière au voisinage de 0, solution de l'équation différentielle

$$x^2.y'' + 4xy' + 2y = e^x$$

On cherche ainsi une solution de l'équation sous la forme d'une série entière donnée par

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n$$

Q1/ Donner l'expression de la série $y'(x)$, dérivée de y(x) par-rapport à x

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n . a_n . x^{n-1}$$

Q2/ Donner l'expression de la série $y''(x)$ dérivée seconde de y(x) par-rapport à x

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n . (n-1) . a_n . x^{n-2}$$

On rappelle que la série entière associée à la fonction exponentielle est

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} . x^n$$

Q3/ En injectant l'expression de y'(x) et y''(x) dans l'équation différentielle, montrer que

$$(n^2 + 3n + 2) . a_n = \frac{1}{n!}$$

On obtient

$$x^2 . \sum_{n=0}^{\infty} n . (n-1) . a_n . x^{n-2} + 4x . \sum_{n=0}^{\infty} n . a_n . x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} . x^n$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} n . (n-1) . a_n . x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4n . a_n . x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n . x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} . x^n$$

Donc

$$n . (n-1) . a_n + 4n . a_n + 2a_n = \frac{1}{n!}$$

Donc

$$(n^2 - n + 4n + 2) . a_n = \frac{1}{n!}$$

On a bien

$$(n^2 + 3n + 2) . a_n = \frac{1}{n!}$$

Q4/ En déduire que

$$a_n = \frac{1}{(n+2)!}$$

$$(n^2 + 3n + 2) = (n + 1)(n + 2)$$

Donc

$$a_n = \frac{1}{(n + 2)(n + 1)n!}$$

Donc

$$a_n = \frac{1}{(n + 2)!}$$

Q5/ En déduire que

$$y(x) = \frac{1}{x^2} . \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

La fonction y est a pour expression

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + 2)!} . x^n = \frac{1}{x^2} . \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + 2)!} . x^{n+2} = \frac{1}{x^2} . \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Q6/ En déduire que

$$y(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

On sait que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} . x^n$$

Donc

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1 - x$$

1 et x sont les termes pour n=0 et n=1

Donc

$$y(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

3.1.2 Exercice : série de Fourier d'une fonction paire

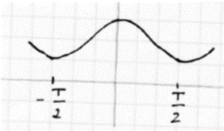
1. Ecrire la série de Fourier d'une fonction f paire.
2. Appliquer le résultat obtenu à la fonction $f(t) = \left|\sin(t)\right|$ (avec f π-périodique)

Correction

Si f est paire

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt$$

En prenant $t_0 = -\frac{T}{2}$



Pour $n \geq 1$

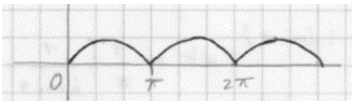
$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos n\omega t\,dt = \frac{4}{T}.\int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega t\,dt$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin n\omega t\,dt = 0$$

La série de Fourier s'écrit

$$S(f)(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos n\omega t$$

$$f(t) = |\sin t|$$



$T = \pi$ et $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t|dt = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n(f) = \frac{4}{\pi}.\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,.\cos 2nt\,dt = \frac{4}{\pi}.\frac{1}{2}.\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(2n+1)\,t - \sin(2n-1)\,t)dt$$

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}.\left[\frac{-\cos(2n+1)\,t}{2n+1} + \frac{\cos(2n+1)\,t}{2n-1}\right]_0^{\pi/2}$$

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}.\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right) = -\frac{4}{\pi.(4n^2-1)}$$

$$b_n(f) = 0$$

$$S(f)(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi.(4n^2-1)}.\cos 2nt$$

3.1.3 Exercice : série de Fourier d'une fonction impaire

1. Ecrire la série de Fourier d'une fonction f impaire.
2. Appliquer le résultat obtenu à la fonction $f(t) = t$ pour tout t ϵ]-1;1[avec f 2-périodique et f(1)=f(-1)=0

Correction

$$a_0(f) = \frac{1}{T}.\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = 0$$

Pour tout n,

$$a_n(f) = \frac{2}{T}.\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\,dt = 0$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}.\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t\,dt = \frac{4}{2}.\int_{0}^{1} t.\sin n\omega t\,dt$$

Par integration par parties,

$$b_n(f) = \frac{2}{n\pi}.(-1)^{n+1}$$

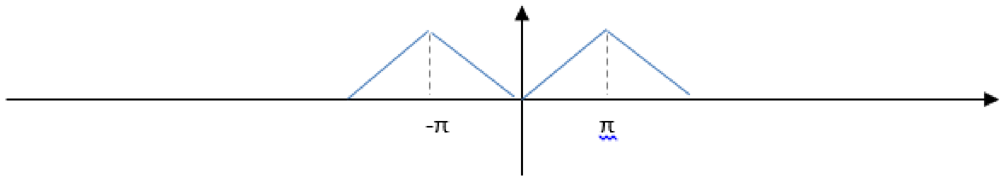
$$\boxed{S(f)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)\sin n\omega t = \frac{2}{\pi}.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.\sin n\pi t}$$

3.1.4 Exercice : fonction triangle

Soit la fonction f 2π-périodique définie par : pour tout t ϵ [-π , π]

$$f(t) = |t|$$

1. Représenter la fonction f sur l'intervalle [-2π , 2π]
2. La fonction est-elle paire ou impaire ?
3. En déduire les coefficients de Fourier de f
4. En déduire la série de Fourier de f



Correction

on a ω=2π/T=1

La fonction f est paire donc $b_n(f)=0$

Coefficients de Fourier a_0 et a_n

$$a_0(f) = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt = \frac{\pi}{2}$$

Pour n≥1

Par intégration par parties,

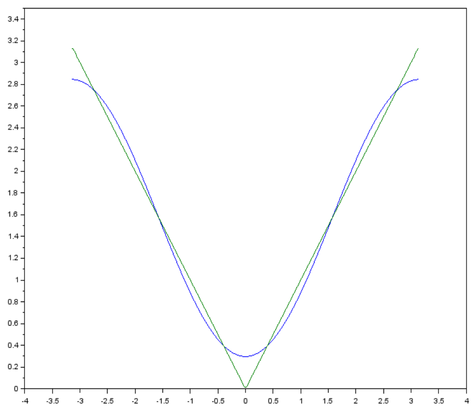
$$a_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t).\cos(n\omega t).dt = \frac{4}{2\pi}\int_0^{T/2} t.\cos(nt).dt = \frac{2}{\pi}\left(\left[t.\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}.dt\right)$$

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right] = \begin{cases} 0 \; si\; n = 2p \\ \dfrac{-4}{\pi.(2p+1)^2} \; si\; n = 2p+1 \end{cases}$$

Série de Fourier associée à f

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) = \frac{\pi}{2} - \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{4}{\pi.(2p+1)^2}\cos((2p+1)t)$$

Pour n=3 et n=50



3.1.5 Exercice : autre écriture d'une série de Fourier

Soit une série trigonométrique de la forme

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + b_n.sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)$$

1. Montrer que cette série peut s'écrire sous la forme

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n.cos\left(\frac{2\pi}{T}nt + \varphi_n\right)$$

Avec

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\cos(\varphi_n) = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

$$\sin(\varphi_n) = \frac{-b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

2. Montrer alors que

$$\varphi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Correction

Soit une série trigonométrique de la forme

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + b_n.sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)$$

1. On a

$$c_n.cos\left(\frac{2\pi}{T}nt + \varphi_n\right) = c_n.\left(cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right).cos(\varphi_n) - sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right).sin(\varphi_n)\right)$$

Comme

$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$; $\cos(\varphi_n) = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$; $\sin(\varphi_n) = \frac{-b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$

Alors

$$c_n.cos(\varphi_n) = a_n$$

et

$$-c_n.sin(\varphi_n) = b_n$$

2.

$$tan(\varphi_n) = \frac{\sin(\varphi_n)}{cos(\varphi_n)} = \frac{-b_n}{a_n}$$

3.1.6 Exercice : coefficients de Fourier exponentiels

Soit la fonction f : IR → IR 2π-périodique définie par

∀ x ϵ]- π ; π]

$$f(x) = e^x$$

Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de f.

Correction

Soit la fonction f : IR → IR 2π-périodique définie par ∀ x ϵ]- π ; π] $f(x) = e^x$

Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de f.

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t).e^{-in\omega t}.dt$$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}.\int_{-\pi}^{\pi} e^t.e^{-int}.dt$$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}.\left[\frac{e^{t.(1-in)}}{1-in}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}.\left(\frac{e^{\pi.(1-in)} - e^{-\pi.(1-in)}}{1-in}\right)$$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}.\frac{1}{1-in}.\left(e^{\pi}.e^{-in\pi} - e^{-\pi}.e^{in\pi}\right)$$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}.\frac{1}{1-in}.(e^{\pi}.(\cos(-n\pi) + isin(-n\pi)) - e^{-\pi}.(\cos(n\pi) + isin(n\pi)))$$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}.\frac{\cos(n\pi)}{1-in}.(e^{\pi} - e^{-\pi}) = \frac{sh\pi}{\pi}.\frac{(-1)^n}{1-in}$$

4 Références bibliographiques

[2], [3], [4], [5], [5], [6], [7], [8], [9]

[1] J. Fourier, « Théorie analytique de la chaleur ». 1822.

[2] J. Quinet et J. Quinet, *Fonctions usuelles*, 6. éd. in Cours élémentaire de mathématiques supérieures / J. Quinet, no. T. 2. Paris: Dunod, 1992.

[3] J. Quinet et J. Quinet, *Equations différentielles*, 6. éd. in Cours élémentaire de mathématiques supérieures / J. Quinet, no. T. 4. Paris: Dunod, 1999.

[4] G. Serane, *Mathématiques de la physique appliquée à l'usage des candidats au certificat de T.M.P est élèves-ingénieurs et des ingénieurs*. Paris: DUNOD, 1965.

[5] J. Quinet et J. Quinet, *Calcul intégral et séries*, 6. éd. in Cours élémentaire de mathématiques supérieures / J. Quinet, no. T. 3. Paris: Dunod, 1996.

[6] Y. Brémont et P. Réocreux, *Mécanique du solide indéformable: cinétique, dynamique cours et exercices résolus classes préparatoires aux grandes écoles, PSI, PSI*, MP, MP*, PT, PT*, premier cycle universitaire*. in Mécanique, no. 3. Paris: Ellipses, 1998.

[7] S. Belhaj et A. Ben Aïssa, *Mathématiques pour l'informatique: cours et exercices corrigés licence 1 & 2 informatique*. Paris: Vuibert, 2013.

[8] J. Vélu, *Méthodes mathématiques pour l'informatique: cours et exercices corrigés*, 5è ed. in Info Sup. Malakoff: Dunod, 2019.

[9] J. Vélu, *Mathématiques générales: cours et exercices corrigés*. Malakoff (Hauts-de-Seine): Dunod, 2020.

https://www.geogebra.org/graphing