Mathématiques

-

Equations différentielles

Frédéric Menan

fmenan@cesi.fr

Table des matières

1 Introduction

1.1 Exemples d'applications des équations différentielles

Mécanique

Principe Fondamental de Dynamique (Newton)

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F$$

Exemple 1

Ressort de longueur L et de raideur fixé en x=0

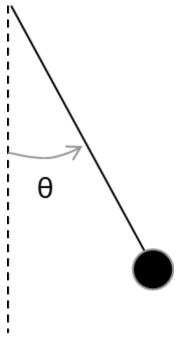
$$F(x) = -k.(x - L)$$

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} + k.(x - L) = 0$$

Exemple 2

Pendule simple de longueur L

$$L.\frac{d^2\theta}{dt^2} + g.sin\theta = 0$$



Mécanique (Réf TI-A652)

Système mécanique comportant en parallèle un amortisseur de coefficient d'amortissement visqueux c, ressort de raideur k sur lesquels repose une masse m

Force F(t) imposée au système

Déplacement x de la masse m :

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} + c.\frac{dx}{dt} + k.x = F(t)$$

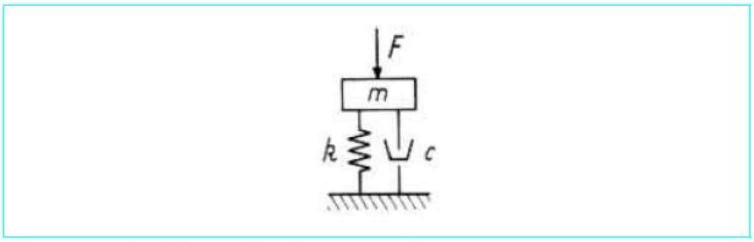
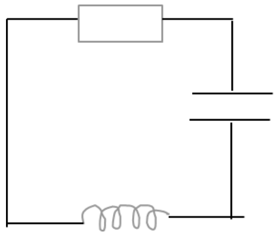


Figure 1 – Système mécanique amortisseur + ressort

Electricité

Circuit RLC

$$\begin{cases} LC\dfrac{d^2U}{dt^2} + R.C.\dfrac{dU}{dt} + U = E \\ \end{cases}$$



Chimie

Réaction A+B→C

A, B et C ont pour concentration a,b,c

$$-\frac{da}{dt} = -\frac{db}{dt} = \frac{dc}{dt}$$

Ecologie

Evolution d'espèces en compétition : modèle de type prédateurs-proies

Population de proies de concentration N cohabite avec une population de prédateurs de concentration P :

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = N.(a - bP) \\ \dfrac{dP}{dt} = P.(cN - d) \end{cases}$$

a : taux de natalité des proies

d : taux de mortalités des prédateurs

b et c : constantes empiriques représentation interaction proie/prédateur

Médecine

https://interstices.info/modeliser-la-propagation-dune-epidemie/

2 Équations à variables séparables

Définition

$$a(x) = b(y).y'$$

avec

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Résolution

$$\int a(x)dx = \int b(y)dy$$

3 Equations différentielles linéaires à coefficients constants du premier ordre

3.1 EDL du 1er ordre

$$a(x).y'(x) + b(x).y(x) = f(x)$$

3.2 Equations du 1er ordre à coefficients constants sans second membre

$$a.y'(x) + b.y(x) = 0$$

Solution générale d'une EDL 1er ordre à coefficients constants sans second membre

$$a.y'(x)+b.y(x)=0 \leftrightarrow y(x)=k.e^{-\frac{b}{a}.x}$$

3.3 EDL du 1er ordre à coefficients constants avec second membre

$$a.y'(x) + b.y(x) = f(x)$$

Solution générale d'une EDL 1er ordre à coefficients constants avec second membre

$$a.y'(x)+b.y(x)=f(x) \leftrightarrow y(x)=y_s(x)+y_p(x)$$

$y_s(x)$ *Solution générale de l'équation sans second membre*

$y_p(x)$ *Solution particulière de l'équation avec second membre*

3.4 Résolution

1. Calculer la solution générale $y_s(x)$ de l'équation sans second membre
2. Analyse du second membre : f(x) est une fonction usuelle ?

OUI : $y_p(x)$ a une forme connue (voir Figure 1).

Second membre	Exemple de solution particulière
$f(x) = C$ avec C constante	Si $b \neq 0$, $y_p(x) = \frac{C}{b}$ Si $b = 0$, $y_p(x) = \frac{C}{a}.x$
$f(x) = P(x)$ P polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$	$y_p(x) = Q(x)$ Q polynôme de degré p tel que Si $b \neq 0$, $p = n$ Si $b = 0$, Q est de la forme $a_1.x + a_2.x^2 + \cdots + a_{n+1}.x^{n+1}$
$f(x) = P(x).e^{sx}$ P polynôme de degré n et s réel	$y_p(x) = Q(x).e^{sx}$ Q polynôme de degré p tel que Si $s \neq \left(-\frac{b}{a}\right)$ alors $p = n$ Si s= $\left(-\frac{b}{a}\right)$, Q est de la forme $a_1.x + a_2.x^2 + \cdots + a_{n+1}.x^{n+1}$

$f(x) = A.\cos(\omega x + \varphi) + B.\sin(\omega x + \varphi)$ ω réel non nul	$y_p(x) = C.\cos(\omega x + \varphi) + D.\sin(\omega x + \varphi)$

Figure 1.

NON : Méthode de variation de la constante

1. On prend $y_s(x)=k.e^{-\frac{b}{a}.x}$ et on considère que k dépend de x : $y_s(x)=k(x).e^{-\frac{b}{a}.x}$
2. On calcule y'(x) puis on résout l'équation avec second membre

Remarque : La valuation (val) d'un polynôme Q(x) est le degré du monôme de Q non-nul de plus bas degré. Ainsi, si val(Q) = 1 , cela signifie que le terme constant du polynôme Q est nul. Exemple : Q(x) = $x^3 + 2x$ est de valuation 1, tandis que Q(x) = $x^5 + 3x^4$ est de valuation 4.

4 Equations différentielles linéaires à coefficients constants du 2nd ordre

4.1 EDL du second ordre

$$a(x).y''(x) + b(x).y'(x) + c(x).y(x) = f(x)$$

4.2 Equations du second ordre à coefficients constants sans second membre

$$a.y''(x) + b.y'(x) + c.y(x) = 0$$

Solution générale d'une EDL 2nd ordre à coefficients constants sans second membre

Soit

$$y(x)=k.e^{r.x}$$

Alors $a.r^2.e^{r.x}+b.r.e^{r.x}+c.e^{r.x}=0 \rightarrow a.r^2+b.r+c=0$: équation caractéristique associée à (1)

- Si les racines r_1 et r_2 sont réelles, alors

$$y_s(x)=A.e^{r1.x}+B.e^{r2.x}$$

- Si $r_1=r_2$, alors

$$y_s(x)=(A.x+B).e^{r1.x}$$

- Si r_1 et r_2 sont complexes, alors

$$y_s(x)=(A.\cos(\beta x)+B.\sin(\beta x)).e^{\alpha.x}$$

avec $r_1=\alpha+i\beta$ et $r_2=\alpha-i\beta$

4.3 Equations du second ordre à coefficients constants avec second membre

$$a.y''(x) + b.y'(x) + c.y(x) = f(x)$$

y(x) est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

Second membre	Exemple de solution particulière
$f(x) = P(x)$ P polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$	$y_p(x) = Q(x)$ Q polynôme de degré p tel que Si $c \neq 0, p = n$ Si $c = 0$ et $b \neq 0$, Q est de la forme $a_1.x + a_2.x^2 + \cdots + a_{n+1}.x^{n+1}$ Si $c = 0$ et $b = 0$, Q est de la forme $a_2.x^2 + \cdots + a_{n+2}.x^{n+2}$
$f(x) = P(x).e^{sx}$ P polynôme de degré n et s réel	$y_p(x) = Q(x).e^{sx}$ Si s n'est pas racine de l'équation caractéristique, $p = n$

	Si s est racine simple de l'équation caractéristique, Q est de la forme $a_1.x + a_2.x^2 + \cdots + a_{n+1}.x^{n+1}$ Si s est racine double de l'équation caractéristique, Q est de la forme $a_2.x^2 + \cdots + a_{n+2}.x^{n+2}$
$f(x) = A.\cos(\omega x + \varphi) + B.\sin(\omega x + \varphi)$ ω réel non nul	Si $j\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $y_p(x) = C.\cos(\omega x + \varphi) + D.\sin(\omega x + \varphi)$ Si $j\omega$ est racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution sous la forme $y_p(x) = x.(C.\cos(\omega x + \varphi) + D.\sin(\omega x + \varphi))$

Figure 2.

5 Exercices

5.1 Exercice. Equation à variables séparables

Résoudre l'équation

$$y' = e^{x+y}$$

avec

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Correction

$$y' = e^{x+y}$$

$$y'e^{-y} = e^{x}$$

$$\int e^{-y}dy = \int e^{x}dx$$

$$-e^{-y} = e^{x} + k$$

Avec k réel

$$-y = \ln(-e^{x} - k)$$

$$y = \ln(-\frac{1}{e^{x} + k})$$

6 Références bibliographiques

[1], [2], [3], [4]

[1] J. Quinet et J. Quinet, *Equations différentielles*, 6. éd. in Cours élémentaire de mathématiques supérieures / J. Quinet, no. T. 4. Paris: Dunod, 1999.

[2] S. Belhaj et A. Ben Aïssa, *Mathématiques pour l'informatique: cours et exercices corrigés licence 1 & 2 informatique*. Paris: Vuibert, 2013.

[3] M. ARROU-VIGNOD, « cours Département RT de l'IUT de Velizy », 2007. Disponible sur: http://www.unit.eu/cours/iutenligne/EDL_CoeffConstants.pdf

[4] J. Vélu, *Mathématiques générales: cours et exercices corrigés*. Malakoff (Hauts-de-Seine): Dunod, 2020.