Mathématiques

-

Complexes

Frédéric Menan

fmenan@cesi.fr

Table des matières

1 Forme algébrique

Soit un nombre complexe z. La forme algébrique de z est

$$z = a + i.b$$

avec a et b réels.

a est la partie réelle de z. On note a = Re(z).

b est la partie imaginaire de z. On note b = Im(z).

1.1 Propriétés

Soient z et z' des nombres complexes tels que z=a+i.b et z'=a'+i.b'

$z = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$

$a + i.b = a' + i.b' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$

$z + z' = (a + a') + i(b + b')$

$zz' = (a.a' - b.b') + i.(a.b' + a'.b)$

$k.z = k.a + i.k.b$ pour tout réel k

1.2 Conjugué

Le conjugué du complexe z = a + ib (a et b réels) est le complexe noté $\bar{z}$ défini par :

$$\bar{z} = a - i.b$$

Propriétés : soient z et z' des nombres complexes tels que z=a+i.b et z'=a'+i.b', alors

$z.\bar{z}=a^2+b^2$ $\quad z + \bar{z} = 2a$ $\quad z - \bar{z} = 2ib$ $\quad \overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$

$\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z'}$ $\quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n$ $\quad \overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$

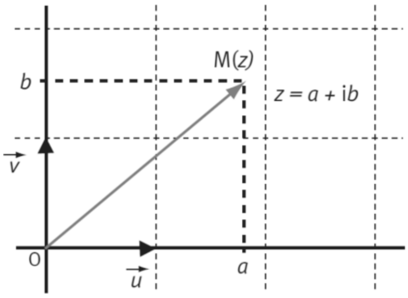
1.3 Equation du second degré à coefficients réels

On a maintenant des racines même si Δ<0. Ces racines sont des nombres complexes. Si Δ<0 alors

$$S = \left\{\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}; \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$$

2 Forme trigonométrique

2.1 (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) repère orthonormé direct du plan.



Au complexe z =a +ib, est associé le point M de coordonnées (a ; b) dans ce repère.

M est le point image de z.

$\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z.

z est l'affixe du point M et du vecteur OM

2.2 Module de z

Le module de z = a+i.b est le réel $|z|$ positif ou nul tel que

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

<u>Interprétation géométrique</u>

Soit M le point d'affixe z et M_1 le point d'affixe z_1, alors $M_1M=|z-z_1|$

<u>Propriétés</u>

$|z|=0 \Leftrightarrow z=0$

$|z.z'| = |z|.|z'|$

$|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$

$|Re(z)| \leq |z|$

$|Im(z)| \leq |z|$

$|1/z| = 1/|z|$

$||z|-|z'|| \leq |z+z'| \leq |z|+|z'|$ $||z|-|z'|| \leq |z-z'|$

2.3 Argument de z

Un argument de z est un réel défini par arg z=$(\vec{u};\overrightarrow{OM}) + 2k\pi$.

L'argument principal de z est l'argument de z qui appartient à l'intervalle]-π , π].

Soit z=x+iy et θ un argument de z.

$$cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

<u>Interprétation géométrique</u>

L'argument principal de z indique l'angle θ entre l'axe des abscisses et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Propriétés

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi$$

Avec k entier.

On peut aisément retrouver ces propriétés à l'aide de la forme exponentielle d'un complexe.

2.4 Forme trigonométrique

La forme trigonométrique d'un complexe z non nul d'argument θ est :

$$z = |z|.(\cos\theta + i.\sin\theta)$$

2.5 Relation forme algébrique / forme trigonométrique

Si

$$a + i.b = r.\cos\theta + i.\sin\theta$$

Alors

$$a = r.\cos\theta\,;\, b = r.\sin\theta$$

3 Forme exponentielle

3.1 Définition

On définit la variable $e^{i\theta}$ telle que

$$e^{i\theta} = cos\theta + i.sin\theta$$

Avec θ réel.

3.2 Définition

La forme exponentielle d'un complexe z non nul d'argument θ est :

$$z=|z|.e^{i\theta}$$

avec |z| module de z.

3.3 Propriétés

$$z_1.z_2=|z_1|.|z_2|.e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

3.4 Formules d'Euler

Par définition, pour tout réel θ,

$$\begin{cases} e^{i\theta} = cos\theta + i.sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i.\sin(-\theta) = e^{i\theta} = cos\theta - i.sin\theta \end{cases}$$

En sommant ces deux égalités membre à membre

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2cos\theta$$

En soustrayant ces deux égalités membre à membre

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i.sin\theta$$

Finalement, on obtient les formules d'Euler

$$\begin{cases} cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

3.5 Formules de de Moivre

On a défini

$$e^{i\theta} = cos\theta + i.sin\theta$$

Donc pour tout entier n,

$$(cos\theta + i.sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i.\sin(n\theta)$$

3.6 Résolution des équations du second degré dans C

L'apparition de l'imaginaire $i^2 = -1$ permet de reprendre les équations du second degré dans le cas où le discriminant Δ est négatif.

Ainsi, soit l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Alors si Δ<0, les racines sont deux solutions complexes conjuguées

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b + i.\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ z_2 = \dfrac{-b - i.\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{cases}$$

4 Exercices

4.1.1 Exercice

Montrer que pour tout complexe z de module ρ et d'argument θ, on a

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} . e^{-i\theta}$$

Correction

$$\frac{1}{z} = \frac{z'}{z.z'} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho} . e^{-i\theta}$$

4.1.2 Exercice

Soit θ un réel. Factoriser l'expression $1 + e^{i\theta}$

Correction

Penser aux formules d'Euler.

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} . \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}} . 2. \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

4.1.3 Exercice

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^6 = -1$$

Correction

Soit

$$z = \rho e^{i\theta}$$

Avec ρ réel positif et θ compris entre 0 et 2π.

$$z^6 = -1$$

$\Leftrightarrow \rho^6 e^{i6\theta} = e^{i\pi}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^6 = 1 \\ 6\theta = \pi + 2k\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{6} \end{cases}$

Avec $k \in \mathbb{Z}$

$$z = e^{\frac{(2k+1)\pi}{6}}$$

4.1.4 Exercice

Déterminer le module et un argument de

$$z_1 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^{30}$$

Correction

$$\left|\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}\right| = \frac{|1 + i\sqrt{3}|}{|1 + i|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

$$\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}[2\pi]$$

Argument :

$$30.\frac{\pi}{12} \Longrightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$z_1 = \left(\sqrt{2}.e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^{30}$$

4.1.5 Exercice

Soit Z un nombre complexe de module 1.

Montrer en utilisant l'écriture exponentielle que Z + 1/Z est un nombre réel.

Correction

En passant par l'écriture exponentielle

$$z + \frac{1}{z} = 2cos\theta$$

4.1.6 Exercice : racine carrée

Calculer la racine carrée de z1 = 5 + 12.i et de z2 = 4.i – 3

Aide : développer et identifier membre à membre : système d'équations

Correction

$$(x + i.y)^2 = (x^2 - y^2) + 2xy.i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\sqrt{5+12i} = 3 + 2i \; ou - 3 - 2i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1; y = 2 \\ x = -1; y = -2 \end{cases}$$

4.1.7 Exercice

Soit θ réel. Montrer que

$$\overline{(e^{\imath\theta})} = e^{-i\theta}$$

Correction

$$\overline{e^{\imath\theta}} = \overline{\cos\theta + \imath.\sin\theta} = \cos\theta - i.\sin\theta = \cos(-\theta) + i.\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$$

4.1.8 Exercice

Soit n un entier naturel et des réels x et y.

Calculer

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(x+ky)$$

Et

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(x+ky)$$

Correction

- si $y=0$, on a immédiatement $A_n = (n+1)\cos x$ et $B_n = (n+1)\sin x$.
- si $y \neq 0$ en posant $S_n = A_n + iB_n$, on a : $S_n = \sum_{k=0}^{n} [\cos(x+ky) + i\sin(x+ky)]$ donc $S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{i(x+ky)}$ qu'on peut écrire : $S_n = e^{ix} \sum_{k=0}^{n} (e^{iy})^k$. Comme $y \neq 0$, on a $e^{iy} \neq 1$ la somme étant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{iy} \neq 1$, on a $S_n = e^{ix} \frac{1 - e^{i(n+1)y}}{1 - e^{iy}}$ d'où $S_n = e^{ix} \frac{e^{i\frac{n+1}{2}y}}{e^{i\frac{y}{2}}} \cdot \frac{(e^{-i\frac{n+1}{2}y} - e^{i\frac{n+1}{2}y})}{(e^{-i\frac{y}{2}} - e^{i\frac{y}{2}})}$ ce qui donne, en utilisant les formules d'Euler : $S_n = e^{ix} e^{i\frac{n}{2}y} \cdot \frac{-2i \sin\frac{n+1}{2}y}{-2i \sin\frac{y}{2}}$ d'où : $S_n = e^{i(x+\frac{n}{2}y)} \frac{\sin\frac{n+1}{2}y}{\sin\frac{y}{2}}$
  comme $A_n = Re(S_n)$ et $B_n = Im(S_n)$, on a : $A_n = \cos(x + \frac{n}{2}y) \frac{\sin(\frac{n+1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}$ et $B_n = \sin(x+\frac{n}{2}y) \frac{\sin\frac{n+1}{2}y}{\sin\frac{y}{2}}$

Exercice 4

4.1.9 Exercice

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.

1/ Déterminer les racines du polynôme

$$P(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z^2 + z + 1$$

En déduire une factorisation de P(z)

2/ Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left|1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right| = n$$

3/ En déduire que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Aide

1/ On voit que $z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z^2 + z + 1$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison z (avec z≠1).

2/ Que donne la factorisation pour z=1 ?

3/ On peut écrire que

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left|1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right| = \prod_{k=1}^{n-1} \left|e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{-ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)\right|$$

De plus, formules d'Euler

$$\sin\frac{k\pi}{n} = -\frac{e^{\frac{-ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}}{2i}$$

Correction

1°) 1 n'étant pas une racine de $P(z)$ en considérant que $P(z)$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1, on obtient $P(z) = \frac{1-z^n}{1-z}$ donc les racines de $P(z)$ vérifient : $\begin{cases} 1-z^n=0 \\ z \neq 1 \end{cases}$ ce sont donc les racines $n^{ièmes}$ de l'unité différentes de 1 donc, ce sont les complexes de la forme : $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![1, n-1]\!]$ on en déduit que $P(z)$ se factorise sous la forme : $P(z) = \prod_{k=1}^{n-1} (z - e^{2i\frac{k\pi}{n}})$.

2°) En calculant $|P(1)|$ avec la relation obtenue ci-dessus, on obtient : $|P(1)| = \left|\prod_{k=1}^{n-1} (1-e^{2i\frac{k}{n}})\right|$ comme le produit des modules est égal au module du produit : $|P(1)| = \prod_{k=1}^{n} |1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}|$
En faisant le même calcul avec $P(z) = z^{n-1} + \dots + 1$, on obtient $|P(1)| = |1 + \dots + 1|$ donc $|P(1)| = n$
d'où : $\prod_{k=1}^{n-1} |1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}| = n$.

3°) En repartant de l'égalité ci-dessus, $\prod_{k=1}^{n-1} |e^{i\frac{k\pi}{n}} (e^{-i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}})| = n$ d'où :
$\prod_{k=1}^{n-1} |e^{i\frac{k\pi}{n}}||-2i||\sin\frac{k\pi}{n}| = n$ or : $|e^{i\frac{k\pi}{n}}| = 1$, $|-2i| = 2$ et $|\sin\frac{k\pi}{n}| = \sin\frac{k\pi}{n}$ car $1 \leq k \leq n-1$ donc $0 < \frac{\pi}{n} \leq \frac{k\pi}{n} \leq \frac{n-1}{n}\pi < \pi$ donc, $\sin\frac{k\pi}{n} > 0$. On obtient alors : $\prod_{k=1}^{n-1} 2\sin\frac{k\pi}{n} = n$
d'où : $2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = n$ donc : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

5 Références bibliographiques

[4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11]

[1] V. Bonnet, « COURS DE MATHÉMATIQUES Terminale S ». 2011.

[2] J. Fourier, « Théorie analytique de la chaleur ». 1822.

[3] *Gauss: une révolution de la théorie des nombres*. Barcelone: RBA Coleccionables, 2018.

[4] J. Quinet et J. Quinet, *Fonctions usuelles*, 6. éd. in Cours élémentaire de mathématiques supérieures / J. Quinet, no. T. 2. Paris: Dunod, 1992.

[5] J. Quinet et J. Quinet, *Equations différentielles*, 6. éd. in Cours élémentaire de mathématiques supérieures / J. Quinet, no. T. 4. Paris: Dunod, 1999.

[6] G. Serane, *Mathématiques de la physique appliquée à l'usage des candidats au certificat de T.M.P est élèves-ingénieurs et des ingénieurs*. Paris: DUNOD, 1965.

[7] J. Quinet et J. Quinet, *Calcul intégral et séries*, 6. éd. in Cours élémentaire de mathématiques supérieures / J. Quinet, no. T. 3. Paris: Dunod, 1996.

[8] Y. Brémont et P. Réocreux, *Mécanique du solide indéformable: cinétique, dynamique cours et exercices résolus classes préparatoires aux grandes écoles, PSI, PSI*, MP, MP*, PT, PT*, premier cycle universitaire*. in Mécanique, no. 3. Paris: Ellipses, 1998.

[9] S. Belhaj et A. Ben Aïssa, *Mathématiques pour l'informatique: cours et exercices corrigés licence 1 & 2 informatique*. Paris: Vuibert, 2013.

[10] J. Vélu, *Méthodes mathématiques pour l'informatique: cours et exercices corrigés*, 5è ed. in Info Sup. Malakoff: Dunod, 2019.

[11] J. Vélu, *Mathématiques générales: cours et exercices corrigés*. Malakoff (Hauts-de-Seine): Dunod, 2020.

https://www.geogebra.org/graphing