Mathématiques

-

Intégrales multiples

Frédéric Menan

fmenan@cesi.fr

Table des matières

1 Rappels sur les Intégrales simples

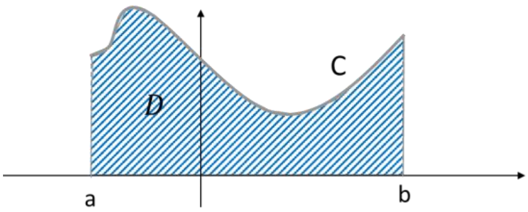
Soit f une fonction continue et positive sur [a ; b]

On appelle D le domaine du plan limité par la courbe C représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équation x =a et x = b.

On appelle intégrale de la fonction f sur [a ;b] l'aire A du domaine D en unités d'aire.

On note

$$A = \int_a^b f(x)dx$$



1.1 Propriétés

1.1.1 Comparaison

Soient f et g deux fonctions continues *et positives* sur [a,b].

Si pour tout x de [a,b], f(x) ≤ g(x), alors

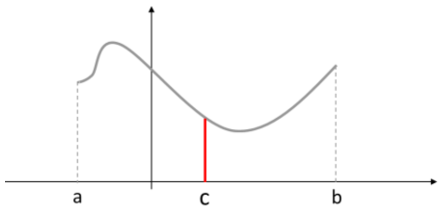
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

1.1.2 Relation de Chasles

Soit f une fonction continue et positive sur [a,b].

Soit c compris entre a et b, alors

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$



1.1.3 Valeur moyenne µ d'une fonction

$$\mu.(b-a) = \int_a^b f(t)dt$$

1.1.4 Inégalités de la moyenne

Soit f une fonction définie sur [a, b], continue positive sur [a, b].

Soient 2 réels m et M tels que pour tout x de [a, b], on a m ≤ f(x) ≤ M

Alors m ≤ µ ≤ M avec µ valeur moyenne de f sur [a, b].

1.2 Calcul d'intégrale

1.2.1 Calcul d'intégrale avec primitive

Soit f fonction continue positive sur [a,b] et F une de ses primitives. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$$

1.2.2 Calcul d'intégrale avec un changement de variable

Soit Φ fonction continue et dérivable sur [α,β].

Soit f fonction continue sur un intervalle contenant Φ[α,β].

On a :

$$\int_\alpha^\beta (f(\Phi(x)).\Phi'(x).dx = \int_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(\beta)} f(u).du$$

Exemple

$$I = \int_0^{\pi/2} sin^2x.cosx.dx$$

Soit u(x)=sinx, on a alors du=cosx.dx et :

$$I = \int_0^1 u^2.du = \left[\frac{1}{3}.u^3\right]_0^1 = 1/3$$

1.2.3 Intégration par parties

$$\int_a^b u(t).v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Exemple

$$I = \int_0^{\pi/2} x.cosx.dx$$

Soient : u(x)=x et u'(x)=1 ; v(x)=sin x et v'(x)=cos x

Alors en appliquant la formule d'IPP :

$$I = [x.sinx]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx.dx = \frac{\pi}{2} - 0 - [-cosx]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Quand utiliser l'IPP ?

Quand l'intégrale de u'v est plus facile à calculer que l'intégrale de uv',

Ce qui est le cas pour le produit de :

- Polynôme par sinus ou cos (u = polynôme)
- Polynôme par log (u = log)
- e^x par sinus ou cos

2 Intégrales doubles

2.1 Intégrale double sur un pavé de $\mathbb{R}^2$

La variable x varie entre a et b, la variable y entre c et d.

$$P = [a; b] \times [c; d]$$

Le domaine d'intégration P est un rectangle, car les bornes de x et y sont constantes.

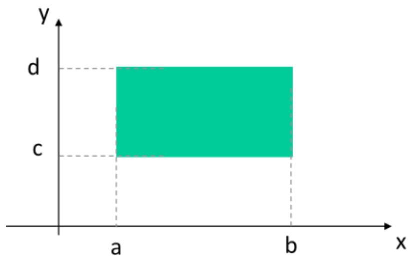


Figure 1. Domaine d'intégration de type pavé

Attention : sur la Figure 1, on n'a pas tracé l'intégrale de la fonction f sur P. La surface indiquée est le domaine d'intégration P.

L'intégrale de la fonction f sur P est un **volume**, de base P et a comme surface supérieure la courbe de la fonction f.

Soit f fonction continue

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \to f(x, y) \end{cases}$$

L'intégrale de f sur le domaine P est notée

$$\iint_P f(x, y) dxdy$$

2.2 Intégration sur certaines parties bornées de $\mathbb{R}^2$

Lorsque le domaine d'intégration Δ n'est pas un rectangle (par exemple Figure 2), les bornes de y varient en fonction de x (on peut aussi dire que les bornes de x varient en fonction de y).

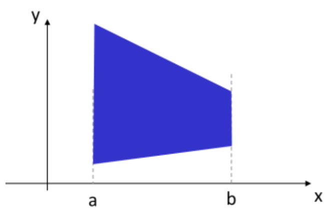


Figure 2. Domaine d'intégration de type partie bornée

On peut alors écrire le domaine d'intégration comme ceci :

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

φ_1 et φ_2 sont deux fonctions continues de [a,b] dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de [a,b], $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$

Ou comme cela :

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \Phi_1(c) \leq x \leq \Phi_2(d) \quad c \leq y \leq d\}$$

Φ_1 et Φ_2 sont deux fonctions continues de [a,b] dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de [a,b],

$$\Phi_1(c) \leq \Phi_2(d)$$

2.3 Théorème de Fubini

Enoncé 1 (intégration par piles)

Soient deux réels a et b tels que $a \leq b$, et φ_1 et φ_2 deux fonctions continues par morceaux de [a,b] dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de [a,b], $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$.

Soit le domaine

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

Soit f une fonction continue sur Δ, alors

$$\boxed{\iint_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx}$$

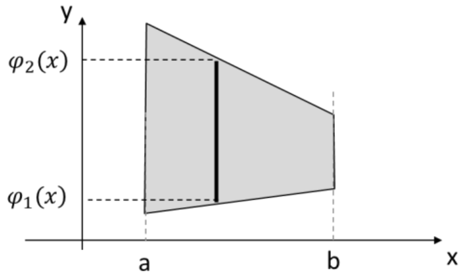


Figure 3. Intégration par piles

Enoncé 2 (intégration par tranches)

Soient deux réels c et d tels que $c \leq d$, et Φ_1 et Φ_2 sont deux fonctions continues par morceaux de [a,b] dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de [a,b], $\Phi_1(x) \leq \Phi_2(x)$.

Soit le domaine

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \Phi_1(y) \leq x \leq \Phi_2(y) \quad c \leq y \leq d\}$$

Soit f une fonction continue sur Δ, alors

$$\boxed{\iint_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\Phi_1(y)}^{\Phi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy}$$

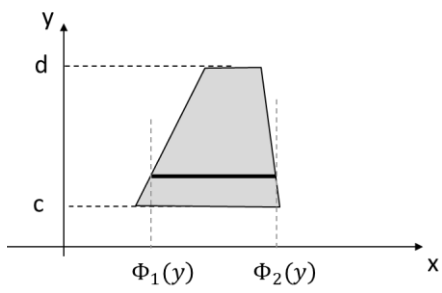


Figure 4. Intégration par tranches

Ce théorème, extrêmement utile, permet de transformer une intégrale double en la succession de deux intégrales simples.

Suivant que l'on intègre par-rapport à y en premier, ou par-rapport à x en premier, on parle d'intégration par piles ou par tranche.

Exemple

$$I = \iint (x^2 + y^2)dxdy$$

P=[-1,1]x[0,1]

$$I = \frac{4}{3}$$

Calcul sur Python

```
import numpy as np
from scipy import integrate
f = lambda y, x: x**2+y**2
integrate.dblquad(f, -1, 1, 0, 1)
```

Exemple

Soit

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq x^2\}$$

$$I = \iint_{\Delta} (1 + xy)dxdy = \int_0^1 \left[y + x.\frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2} dx = \int_0^1 \left(x^2 + x.\frac{x^4}{2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{12}\right]_0^1$$

$$I = \frac{5}{12}$$

Calcul sur Python

```
import numpy as np
from scipy import integrate
f = lambda y, x: 1+x*y
hfun = lambda x : x**2
integrate.dblquad(f, 0, 1, 0, hfun)
```

Exemple

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (xy + z) dxdydz$$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[xyz + \frac{z^2}{2} \right]_0^1 dxdy \right)$$

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2} \right) dxdy \right) = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} + \frac{1}{2} y \right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Calcul sur Python

```
import numpy as np
from scipy import integrate
f = lambda z, y, x: x*y+z
integrate.tplquad(f, 0,1,0,1,0,1)
```

ATTENTION : pour appliquer le théorème de Fubini, il faut que le domaine D soit tel que sa frontière n'est coupée qu'en au plus deux points pour tout droite parallèle à l'axe Oy (intégration par piles) ou l'axe Ox (intégration par tranches).

La figure ci-dessous montre un domaine d'intégration où le théorème de Fubini n'est pas applicable.

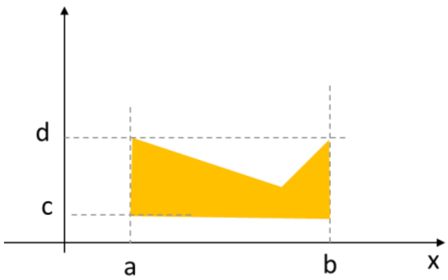


Figure 5. Exemple de domaine d'intégration où le théorème de Fubini n'est pas applicable

En effet si l'on applique le théorème de Fubini sur le domaine Δ =[a,b]x[c,d] et que l'on calcule

$$\iint_\Delta f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_d^c f(x,y)dy \right) dx$$

alors le domaine d'intégration utilisé ne sera pas celui de la Figure 5, mais celui de la Figure 6.

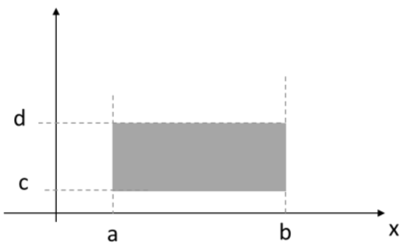


Figure 6

2.4 Cas particulier : fonction h(x,y) de la forme $\boldsymbol{h(x,y) = f(x).g(y)}$

On applique le théorème de Fubini

$$\iint_d h(x,y)dxdy = \iint_D f(x)g(y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y)\,dy\right)dx$$

Comme f(x) ne dépend pas de y, on peut sortir f(x) de l'intégrale en y, donc

$$\iint_D f(x)g(y)dxdy = \int_a^b f(x)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)dx$$

Comme $\int_c^d g(y)\,dy$ ne dépend pas de x, on peut la sortir de l'intégrale en x.

On obtient finalement, si la fonction h(x,y) est de la forme $h(x,y) = f(x).g(y)$

$$\boxed{\iint_d h(x,y)dxdy = \iint_D f(x)g(y)dxdy = \int_c^d g(y)dy\,.\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx\,.\int_c^d g(y)dy}$$

Remarque : il est très courant que les intégrales rencontrées en sciences physiques et sciences pour l'ingénieur permettent ce calcul.

Exemple

Calculer sur $D = [0,1] \times [0,2]$

$$I = \iint_D (1+x)dxdy$$

Par le théorème de Fubini, et sachant que la fonction est de la forme $h(x,y) = f(x).g(y)$, on a

$$I = \iint_D (1+x)dxdy = \int_0^1 (1+x)dx \int_0^2 dy = 3$$

Calcul sur Python

```
import numpy as np
from scipy import integrate
f = lambda y, x: 1+x
integrate.dblquad(f, 0, 1, 0, 2)
```

3 Intégrales triples

3.1 Intégrale triple sur un pavé de $\mathbb{R}^3$

La définition est la même que pour une intégrale double.

Le domaine d'intégration est un volume.

L'intégrale de f sur P pavé de $\mathbb{R}^3$ est

$$\iiint_P f(x,y)dxdy$$

3.2 Intégrale triple sur une partie bornée de $\mathbb{R}^3$ délimitée par deux surfaces situées l'une au-dessus de l'autre ou une surface fermée

On peut, comme pour les intégrales doubles, intégrer « par piles » ou « par tranches ».

4 Calcul d'intégrales avec changement de variables

4.1 Définitions

Sous certaines conditions, on peut effectuer un changement de variable pour faciliter le calcul d'une intégrale multiple.

Soient U et U' deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Soit la fonction $\Phi : U \to U'$ bijection de classe C^1 dont la réciproque est aussi de classe C^1. Soit Ω partie bornée de $\mathbb{R}^n$.

Soit f : $\Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ continue, alors

Si n=2

$$\iint_{\Phi(\Omega)} f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega} f \circ \phi(\mathrm{u},\mathrm{v}).\mathrm{J}.\mathrm{dudv}$$

Si n=3

$$\iiint_{\Phi(\Omega)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega} f \circ \phi(\mathrm{u},\mathrm{v},\mathrm{w}).\mathrm{J}.\mathrm{dudvdw}$$

On appelle matrice jacobienne la matrice :

$$\phi(u,v) = (x;y)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

J est le déterminant de la matrice jacobienne :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

4.2 Exemples, changements de variables usuels

4.2.1 Changement de variables affine

$$\begin{cases} x = a.u + b.v \\ y = c.u + d.v \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Ainsi,

$$dxdy = (ad - bc)dudv$$

4.2.2 Changement de variables polaire

$$\begin{cases} x = \rho.\cos\theta \\ y = \rho.\sin\theta \end{cases}$$

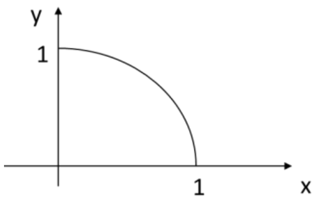
$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho.\sin\theta \\ \sin\theta & \rho.\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

$$dxdy = \rho d\rho d\theta$$

Exemple

$$I = \iint_D (x + y)dxdy$$

Avec $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\,; x > 0\,; y > 0\}$



$$I = \iint_\Omega (\rho.\cos\theta + \rho.\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

Avec $\Omega = \left\{(\rho, \theta) | 0 < \rho < 1; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}$

$$I = \int_0^1 \rho^2 d\rho\,.\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\theta + sin\theta)d\theta = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1.\,[sin\theta - cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

4.3 Changement de variables pour les intégrales triples

On considère le changement de variables ci-dessous :

$$\begin{cases} x = a(u, v, w) \\ y = b(u, v, w) \\ z = c(u, v, w) \end{cases}$$

Les fonctions a, b et c sont dérivables sur le domaine d'intégration.

La matrice jacobienne est alors :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial a}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial a}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial b}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial b}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial b}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial c}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial c}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial c}{\partial w}(u,v,w) \end{pmatrix}$$

Comme pour les intégrales doubles, on appelle J le déterminant de la matrice jacobienne.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial a}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial a}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial b}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial b}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial b}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial c}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial c}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial c}{\partial w}(u,v,w) \end{vmatrix}$$

4.3.1 Changement de variables affine

$$\begin{cases} x = a.u + b.v + c.w \\ y = d.u + e.v + f.w \end{cases}$$

4.3.2 Changement de variables cylindrique

$$\begin{cases} x = r.cos\theta \\ y = r.sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

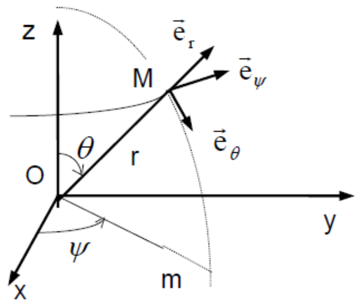
Matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r.\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r.\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = r$$

4.3.3 Changement de variables sphérique

$$\begin{cases} x = r.\sin\theta.\cos\Psi \\ y = r.\sin\theta.\sin\Psi \\ z = r.\cos\theta \end{cases}$$



Avec

$$0 \leq r \leq R$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \Psi \leq 2\pi$$

Matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\,.\cos\Psi & r.\cos\theta\,.\cos\Psi & -r.\sin\theta\,.\sin\Psi \\ \sin\theta\,.\sin\Psi & r.\cos\theta\,.\sin\Psi & r.\sin\theta\,.\cos\Psi \\ \cos\theta & -r.\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = r.\sin\theta\,.\sin\theta\,.\sin\Psi\,.r.\sin\theta\,.\sin\Psi + r.\cos\theta\,.\cos\Psi\,.r.\sin\theta\,.\cos\Psi\,.\cos\theta \\ + \cos\theta\,.r.\cos\theta\,.\sin\Psi\,.r.\sin\theta\,.\sin\Psi + r.\sin\theta\,.r.\sin\theta\,.\cos\Psi\,.\sin\theta\,.\cos\Psi$$

$$J = r^2.sin^2\theta.\sin\theta\,.sin^2\Psi + \mathrm{r}^2.\cos^2\theta\cos^2\Psi.\sin\theta + \mathrm{r}^2.\cos^2\theta sin^2\Psi.\sin\theta \\ + r^2.sin^2\theta.\cos^2\Psi.\sin\theta$$

$$J = r^2.\sin\theta\,.(sin^2\theta.sin^2\Psi + \cos^2\theta\cos^2\Psi + \cos^2\theta sin^2\Psi + sin^2\theta.\cos^2\Psi)$$

$$J = r^2.\sin\theta\,.(sin^2\Psi + \cos^2\Psi) = r^2.\sin\theta$$

Elément d’intégration

$$dV = Jdxdydz = r^2.\sin\theta\,.drd\theta d\Psi$$

4.3.4 Exemple

$$I = \iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$D = \{1 < x^2+y^2+z^2 < 4\}$$

Coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = r.\cos\phi\,.\cos\theta \\ y = r.\cos\phi\,.\sin\theta \\ z = r.\sin\phi \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\phi\,.\cos\theta & -r.cos\phi.sin\theta & -r.sin\phi cos\theta \\ \cos\phi\,.\sin\theta & r.\cos\phi\, cos\theta & -r.sin\phi sin\theta \\ \sin\phi & 0 & r.cos\phi \end{vmatrix}$$

Avec $\Omega = \left\{1 < r < 2; 0 < \theta < 2\pi; -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}\right\}$

$$I = \iiint_\Omega \frac{1}{r}.r^2.cos\,\phi.drd\theta d\phi = \int rdr\,.\int d\theta\,.\int cos\phi d\phi = 6\pi$$

5 Intégrale sur un arc curviligne

5.1 Définition

Soient :

- Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$
- $\Gamma \subset \Omega$ un arc de courbe défini par

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Les fonctions f et g sont continues et dérivables par morceaux

- Un champ de vecteurs $\vec{V}$ défini par :

$$\begin{cases} \Omega \to \mathbb{R}^2 \\ M(x,y) \to \vec{V}(M) = P(x,y).\vec{\imath} + Q(x,y).\vec{\jmath} \end{cases}$$

On appelle intégrale curviligne de $\vec{V}$ sur l'arc orienté Γ l'intégrale

$$I = \int_a^b \left(P\big(f(t),g(t)\big).f'(t) + Q\big(f(t),g(t)\big).g'(t)\right).dt$$

On utilise deux notations.

Notation différentielle

On a $dx = f'(t)dt$ et $dy = g'(t)dt$

$$I = \int_a^b P(x,y).dx + Q(x,y).dy$$

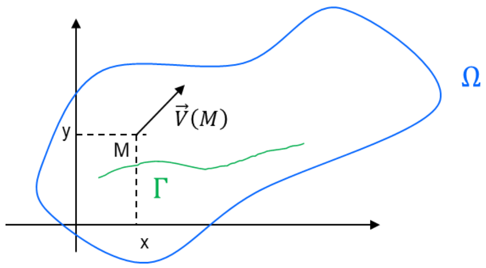
$\omega = P(x,y).dx + Q(x,y).dy$ est appelée forme différentielle.

Notation vectorielle

$$d\vec{M} = dx.\vec{\imath} + +dy.\vec{\jmath} + dz.\vec{k}$$

$$I = \int_\Gamma \vec{V}(M).d\vec{M}$$

I : circulation du champ de vecteurs $\vec{V}$ le long de Γ.



Exemple

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$$

$$\vec{V}(M) = yz.\vec{\imath} + zx.\vec{\jmath} + xy.\vec{k}$$

$dx = -\sin t\,.\,dt\,;\, dy = \cos t\,.\,dt\,;\, dz = dt$

$$I = \int_0^{2\pi} (-\sin^2(t)\,.\,t + t.\cos^2(t) + \cos(t)\sin(t))\,.\,dt$$

$$I = \int_0^{2\pi} \left(t.\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right).\,dt$$

Remarque

Si Γ est la réunion de n arcs, on a :

$$\int_\Gamma \omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$$

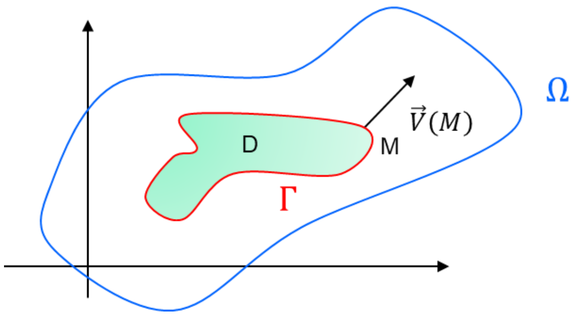
5.2 Formule de Green-Riemann

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$, limitée par une courbe fermée Γ, continue.

Soit un champ de vecteurs $\vec{V}$ continue et dérivable et défini par :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ M(x,y) \to \vec{V}(M) = P(x,y).\vec{\imath} + Q(x,y).\vec{\jmath} \end{cases}$$

$$\boxed{\int_\Gamma \vec{V}(M).d\vec{M} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy}$$



Exemple

Soit D le disque de centre I(0,1) et de rayon 1. On peut paramétrer le cercle Γ par le système

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$$

Soit le champ de vecteurs $\vec{V}: M = (x, y) \to -yx^2.\vec{\imath} + xy^2.\vec{\jmath}$

On calcule

$$I = \int_{\Gamma} \vec{V}(M).\overrightarrow{dM}$$

$$\begin{cases} dx = -\sin t \,.\, dt \\ dy = \cos t \,.\, dt \end{cases}$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \big((1 + \sin t)cos^2 t.\sin t + \cos t\,.\,(1 + \sin t)^2.\cos t\big)dt$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} (2cos^2 t.sin^2 t + 3.cos^2 t.\sin t + cos^2 t)dt = \frac{3\pi}{2}$$

$$\begin{cases} R(x, y) = -yx^2 \\ Q(x, y) = xy^2 \end{cases}$$

$$I = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right) dxdy = \iint (y^2 + x^2)dxdy$$

On pose

$$\begin{cases} x = \rho.\cos\theta \\ y = \rho.\sin\theta \end{cases}$$

$$I = \iint_{D\prime} \rho^2.\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| d\rho d\theta = \iint_{D\prime} \rho^3.d\rho d\theta$$

Choix de D’

$$x^2 + (y - 1)^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 < 1$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 - 2\rho.\sin\theta < 0$$

$$\Leftrightarrow \rho - 2\sin\theta < 0$$

$$D' = \{(\rho,\theta), 0 < \theta < \pi \ et \ 0 < \rho < 2sin\theta\}$$

$$I = \int_0^{\pi}\int_0^{2sin\theta} \rho^3.d\rho d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

6 Intégrales de surface

6.1 Formule de Stokes

Soit une surface S de bord Γ.

Soit un champ de vecteurs $\vec{V}$ de classe C^1 défini sur un ouvert U contenant S et Γ, et tel que

$$\vec{V}(x,y,z) = P(x,y,z).\vec{\imath} + Q(x,y,z).\vec{\jmath} + R(x,y,z).\vec{k}$$

Alors

$$\int_{\Gamma} \vec{V}(M).\overrightarrow{dM} = \iint_{S} \overrightarrow{rot}\left(\vec{V}(M)\right).\vec{n}.dS$$

Avec $\vec{n}$ normale à dS au point M.

6.2 Formule de Green-Ostrogradsky

$$\oiint_{S} \vec{V}.\vec{n}.dS = \iiint_{V} div(\vec{V})dxdydz$$

7 Exercices

7.1.1 Exercice : intégrale double

Calculer

$$I = \iint_D x^2 dxdy$$

Avec $D = [1; 2] \times [0; 3]$

Correction

$$I = \iint_D x^2 dxdy = \int_0^3 \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 dy = \int_0^3 \frac{7}{3}.dy = \left[\frac{7y}{3}\right]_0^3 = 7$$

Python

```
import numpy as np
from scipy import integrate
f = lambda y, x: x**2
integrate.dblquad(f, 1, 2, 0, 3)
```

7.1.2 Exercice : intégrale double

Calculer

$$I = \iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy$$

Avec $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \big| \, x^2 + y^2 \leq 1\}$

Correction

On représente le domaine D par un disque de rayon 1 centré sur l'origine du repère.

$$I = \iint \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy \; sur \; D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \big| \, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

En passant en polaires, on obtient :

$$I = \int \int_{x^2+y^2\leq 1} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy = \int \int_{0<r<1, 0<\theta<2\pi} \frac{1}{1 + r^2} rdrd\theta$$

$$I = \int_{0<r<1} \frac{1}{1 + r^2} rdr \int_{,0<\theta<2\pi} 1 \, d\theta = \pi ln(2)$$

7.1.3 Exercice : intégrale double

Calculer

$$I = \iiint_D (xy^2 + 2z)dxdydz$$

$$D = [1;2] \times [5;9] \times [0;3]$$

Correction

$$I = \iiint_D (xy^2 + 2z)dxdydz = 942$$

```
import numpy as np
from scipy import integrate

f = lambda x,y,z: x*y**2+z*2

integrate.tplquad(f, 1,2,5,9,0,3)
```

7.1.4 Exercice : intégrale double

Calculer :

$$I = \iint_D (1 + x)dxdy$$

Où

$$D = [0,1] \times [0,2]$$

Correction

Par le théorème de Fubini, et sachant que la fonction est de la forme $h(x, y) = f(x).g(y)$, on a

$$I = \iint_D (1 + x)dxdy = \int_0^1 (1 + x)dx \int_0^2 dy = 3$$

7.1.5 Exercice : intégrale double

$$I = \iint_\Delta (1 + xy)dxdy$$

Avec Δ= $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq x^2\}$

Calculer

$$I = \int_0^1 \left[y + x.\frac{y^2}{2}\right]_0^{x^2} dx = \int_0^1 \left(x^2 + x.\frac{x^4}{2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{12}\right]_0^1$$

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq x^2\}$$

$$I = \frac{5}{12}$$

```
import numpy as np
from scipy import integrate

f = lambda y, x: 1+x*y
hfun = lambda x : x**2

integrate.dblquad(f, 0, 1, 0, hfun)
```

7.1.6 Exercice : intégrale double

Calculer

$$I = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y\,) dxdy$$

Correction

$$I = 8/3$$

```
import numpy as np
from scipy import integrate

f = lambda y, x: 1+3*x+y
hfun = lambda x : 2-2*x

integrate.dblquad(f, 0, 1, 0, hfun)
```

7.1.7 Exercice : intégrale double

$$I = \iint_D x.e^y dxdy$$

$$D = [1;2] \times [3;5]$$

Correction

$$I = \int_1^2 xdx\,.\int_3^5 e^y dy = \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right).(e^5 - e^3) = \frac{3}{2}.(e^5 - e^3) \approx 192$$

```
import numpy as np
from scipy import integrate

f = lambda y, x: x*np.exp(y)
```

```
integrate.dblquad(f, 1, 2, 3, 5)
```

7.1.8 Exercice : intégrale double

Calculer

$$I = \iint_D \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} dxdy$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Correction

$$I = \iint_D \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} dxdy$$

On va opérer un changement de variable

$$\begin{cases} x = \rho.\cos\theta \\ y = \rho.\sin\theta \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho.\sin\theta \\ \sin\theta & \rho.\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

$$dxdy = \rho d\rho d\theta$$

Le domaine D a pour nouvelle définition

$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$I = \iint_D \frac{(\rho\cos\theta)^2}{9} + \frac{(\rho\sin\theta)^2}{4} \rho d\rho d\theta = \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{(\cos\theta)^2}{9} + \frac{(\sin\theta)^2}{4} d\theta$$

$$\int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}$$

$$\cos(2a) = cos^2a - sin^2a = 2cos^2a - 1 = 1 - 2sin^2a$$

Donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{(\cos\theta)^2}{9} + \frac{(\sin\theta)^2}{4} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{9}.\frac{(1 + \cos(2\theta))}{2} + \frac{1}{4}.\frac{(1 - \cos(2\theta))}{2} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}.\int_0^{2\pi} \frac{1}{9}.(1 + \cos(2\theta)) + \frac{1}{4}.(1 - \cos(2\theta)) d\theta$$

$$=\frac{1}{2}.\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{9}+\frac{1}{4}+\cos(2\theta)\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)d\theta=\frac{1}{2}.\left[\frac{\theta}{9}+\frac{\theta}{4}\right]_{0}^{2\pi}=\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{4}$$

Finalement,

$$I=\frac{1}{4}.\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{4}\right)$$

Python

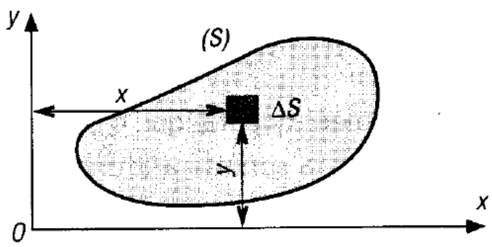
```
import numpy as np
from scipy import integrate
a=3
b=2

f = lambda y, x: x**2/a**2+y**2/b**2
hfun = lambda x : np.sqrt(1-x**2)
print('l integrale calculée est sur 1/4 d ellipse','ATTENTION')
integrate.dblquad(f, 0, 1, 0, hfun)
```

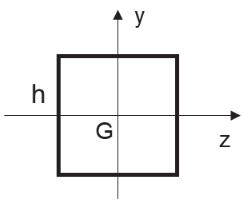
7.1.9 Exercice : résistance des matériaux, moment quadratique

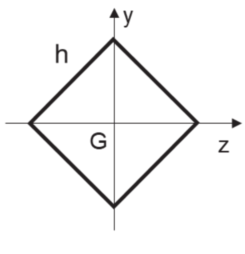
On dispose d'une poutre à section carré de côté h. On la dispose soit en carré, soit en losange.

1/ Calculer le moment quadratique I_{Gz} par-rapport à l'axe de chaque section

$$I_{Gz}=\iint_{S}y^2ds$$







Question bonus orientée Résistance des Matériaux :

2/ Le seul calcul du moment quadratique permet-il de conclure ?

Correction

Section « en carré » :

$$I_{Gz}=\iint_{D}y^2\,dzdy=\frac{h^4}{12}$$

Avec

$$D=\{z;y\}\in\mathbb{R}^2/-\frac{h}{2}\le z\le\frac{h}{2}et-\frac{h}{2}\le y\le\frac{h}{2}$$

Section « en losange » :

$$I_{Gz} = 4.I$$

Avec I l'intégrale d'un quart de losange telle que

$$I = \iint_D y^2\, dzdy$$

Avec

$$D = \{z; y\} \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq z \leq \frac{h}{\sqrt{2}} et\ 0 \leq y \leq -z + \frac{h}{\sqrt{2}}$$

$$I = \int_0^{\frac{h}{\sqrt{2}}} \left(\int_0^{-z+\frac{h}{\sqrt{2}}} y^2 dy \right) dz = \frac{h^4}{48}$$

2/ Le seul calcul du moment quadratique permet-il de conclure ?

Section « en carré » :

$$\sigma_{max} = -\frac{M_f . y_{\max}}{I_{Gz}}$$

Avec

$$y_{\max} = \frac{h}{2}$$

Donc

$$\sigma_{max} = -M_f . \frac{6}{h^3}$$

Section « en losange » :

$$\sigma_{max} = -\frac{M_f . y_{\max}}{I_{Gz}}$$

Avec

$$y_{\max} = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

Donc

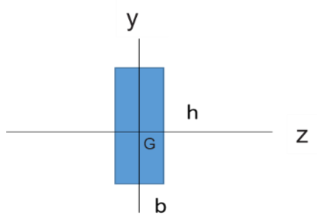
$$\sigma_{max} = -M_f . \frac{6\sqrt{2}}{h^3}$$

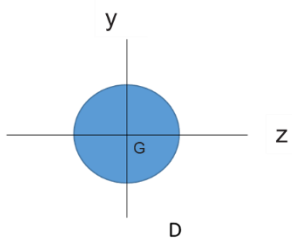
La contrainte maximale sera plus forte dans la section posée « en losange » malgré un moment quadratique égal à la section carrée.

7.1.10 Exercice : moment quadratique d'une section

Déterminer l'expression de I_{Gz} le moment quadratique en G par-rapport à l'axe z pour les deux géométries ci-dessous à l'aide de la formule

$$I_{Gz} = \iint y^2dydz$$





Correction

$$I_{Gz} = \iint z^2dydz = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2dydz = b.\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = b.\left(\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{24}+\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{24}\right)$$

$$I_{Gz} = \frac{b.h^3}{12}$$

$$I_{Gz} = \iint r^2sin^2\theta.dS = \iint r^2sin^2\theta.rdrd\theta = \int_0^R\int_0^{2\pi} r^2sin^2\theta.rdrd\theta$$

$$cos^2\theta = \frac{1-cos2\theta}{2}$$

$$I_{Gz} = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R.\left[\frac{1}{2}.(\theta-\frac{sin2\theta}{4})\right]_0^{2\pi} = \frac{R^4}{4}.\frac{2\pi}{2} = \frac{\pi R^4}{4}$$

7.1.11 Exercice : intégrale triple

Calculer l'intégrale

$$I = \iiint (xy+z)dxdydz$$

Sur le domaine P = [0,1] x [0,1] x [0,1]

Correction

$$I = \frac{3}{4}$$

Python

```
import numpy as np
from scipy import integrate
f = lambda z, y, x: x*y+z
integrate.tplquad(f, 0,1,0,1,0,1)
```

7.1.12 Exercice : volume d'une sphère

Soit un point M(x,y,z) dans une sphère de rayon R.

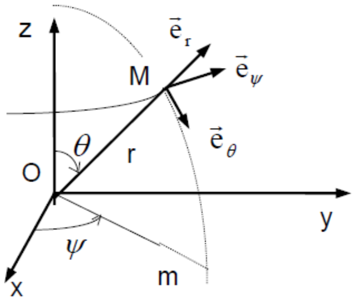
Le volume de la sphère est donné par :

$$V = \iiint_D dV = \iiint_D dxdydz$$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

On propose le changement de repère suivant :

$$\begin{cases} x = r.\sin\theta.\cos\Psi \\ y = r.\sin\theta.\sin\Psi \\ z = r.\cos\theta \end{cases}$$



Avec $0 \leq r \leq R$ $0 \leq \theta \leq \pi$ $0 \leq \Psi \leq 2\pi$

Matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} \sin\theta.\cos\Psi & r.\cos\theta.\cos\Psi & -r.\sin\theta.\sin\Psi \\ \sin\theta.\sin\Psi & r.\cos\theta.\sin\Psi & r.\sin\theta.\cos\Psi \\ \cos\theta & -r.\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = r.\sin\theta.\sin\theta.\sin\Psi.r.\sin\theta.\sin\Psi + r.\cos\theta.\cos\Psi.r.\sin\theta.\cos\Psi.\cos\theta \\ + \cos\theta.r.\cos\theta.\sin\Psi.r.\sin\theta.\sin\Psi + r.\sin\theta.r.\sin\theta.\cos\Psi.\sin\theta.\cos\Psi$$

$$J = r^2.sin^2\theta.\sin\theta.sin^2\Psi + \mathrm{r}^2.\cos^2\theta\cos^2\Psi.\sin\theta + \mathrm{r}^2.\cos^2\theta sin^2\Psi.\sin\theta \\ + r^2.sin^2\theta.\cos^2\Psi.\sin\theta$$

$$J = r^2.\sin\theta.(sin^2\theta.sin^2\Psi + \cos^2\theta\cos^2\Psi + \cos^2\theta sin^2\Psi + sin^2\theta.\cos^2\Psi)$$

$$J = r^2.\sin\theta.(sin^2\Psi + \cos^2\Psi) = r^2.\sin\theta$$

On obtient comme élément d'intégration

$$dV = Jdxdydz = r^2.\sin\theta.drd\theta d\Psi$$

Question

Déterminer l'expression du volume d'une sphère de rayon R.

Correction

$$V = \iiint r^2 . \sin\theta\, . dr d\theta d\Psi$$

$$V = \int_0^R r^2 dr \, . \int_0^\pi \sin\theta . d\theta \, . \int_0^{2\pi} d\Psi = \frac{R^3}{3} . [-\cos\pi]_0^\pi . 2\pi = \frac{R^3}{3} . 2\pi . (1+1) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

7.1.13 Exercice : volume d'un cylindre

Déterminer par intégration le volume d'un cylindre de hauteur h, rayon R

Correction

$$V = \iiint r dr d\theta dz$$

$$V = \int_0^R r dr \, . \int_0^{2\pi} d\theta \, . \int_0^h dz = \frac{R^2}{2} . 2\pi . h = \pi R^2 h$$

7.1.14 Exercice : température moyenne

La pièce ci-dessous mesure 6m de long et 4m de large.

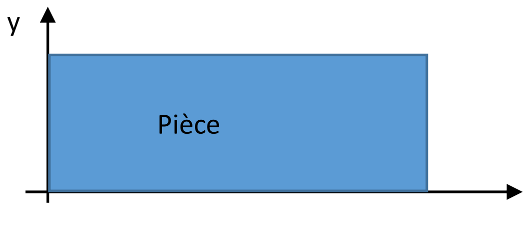
Sur les murs définis par $x = 0$, $y = 0$ et $x = 6$, elle est contact avec d'autres pièces, chauffées à 19°C.

Sur le mur défini par $y = 4$, elle est contact avec l'extérieur.

La pièce est très mal isolée avec l'extérieur, où la température est très inférieure à 19°C.

On propose d'exprimer le champ de température T en un point (x,y) de la pièce par :

$$T(x,y) = 19 - \frac{y}{2}$$



1/ Décrire le champ de température T(x,y). Est-il cohérent avec les données du problème ?

2/ Calculer la température moyenne dans la pièce.

Correction

1/ Proche du mur extérieur la température est plus faible car la pièce est mal isolée

Donc pour y=0 on peut supposer T=19 et pour y=4 on peut supposer T=17.

On choisit une T qui ne dépend pas de x car les murs x=0 et x=6 sont eux aussi à 19°C

2/

$$T_{moy} = \frac{1}{S}.\iint 19 - \frac{y}{2}.dxdy = \frac{1}{24} \times 6 \times \left[19y - \frac{y^2}{4}\right]_0^4 = \frac{1}{4}.(19 \times 4 - 4) = 18$$

7.1.15 Exercice. Matériaux « sandwichs »

Les matériaux « sandwichs » sont des matériaux composés d'une âme centrale entourée de deux peaux, ou semelles. Ils présentent un excellent rapport poids/résistance et poids/rigidité en flexion.

On propose dans cet exercice de retrouver les valeurs données ci-dessous concernant la rigidité et la résistance en flexion de trois sandwichs de différentes épaisseurs.

<u>Questions</u>

La figure ci-dessous donne les rapports entre la rigidité en flexion (moment quadratique Iz) d'une poutre d'épaisseur t et celle d'un sandwich d'épaisseur 2t et 4t.

Retrouver les rapports de 7 et 37 donnés.

Properties	Solid material	Core thickness t	
	2t	4t	8t
Stiffness	1.0	7.0	37.0
Flexural strength	1.0	3.5	9.2
Weight	1.0	1.03	1.06

Doc. HEXCEL

Techniques de l'ingénieur AM5141

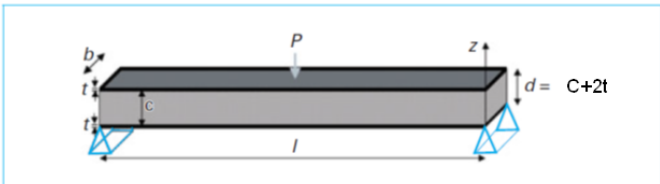


Figure 21 – Poutre sandwich sur deux appuis chargée au centre

8 Références bibliographiques

[1]

[2]

[1] J. Quinet et J. Quinet, *Géométrie*, 6. éd. in Cours élémentaire de mathématiques supérieures / J. Quinet, no. T. 5. Paris: Dunod, 1991.

[2] G. Serane, *Mathématiques de la physique appliquée à l'usage des candidats au certificat de T.M.P est élèves-ingénieurs et des ingénieurs*. Paris: DUNOD, 1965.

https://www.geogebra.org/graphing