# Mathématiques

-

## Matrices pour l'infographie

## Quaternions

Frédéric Menan

fmenan@cesi.fr

11/2024

# Table des matières

**1 MATRICES POUR L'INFOGRAPHIE ..... 3**

1.1 MISE EN EVIDENCE ..... 3
1.2 MATRICES DE PROJECTION ..... 5
1.3 MATRICES DE TRANSFORMATIONS ..... 7
1.4 COMPOSITIONS DE TRANSFORMATIONS ..... 9
1.5 EFFET D'UN CHANGEMENT DE BASE SUR UNE MATRICE DE TRANSFORMATION ..... 13
1.6 INVARIANTS D'UNE MATRICE DE TRANSFORMATION ..... 13
1.7 LIENS UTILES ..... 14

**2 QUATERNIONS ..... 15**

2.1 GENERALITES ..... 15
2.2 ROTATIONS ET QUATERNIONS ..... 17
2.3 ROTATION A L'AIDE DES QUATERNIONS UNITAIRES ..... 17

**3 EXERCICES ..... 19**

3.1 MATRICES POUR L'INFOGRAPHIE ..... 19
3.2 QUATERNIONS ..... 28
3.3 QCM ..... 32

# 1 Matrices pour l'infographie

Toute transformation de l'espace (rotation, changement d'échelle, projection, translation, symétrie...) est un système linéaire d'équations entre le vecteur initial, le vecteur final et les caractéristiques de la transformation (axe, angle, facteur.....). On a vu que tout système linéaire peut être représenté par une matrice, donc les transformations de l'espace peuvent être représentées par des matrices. On peut alors utiliser l'ensemble des méthodes et outils relatifs au calcul matriciel.

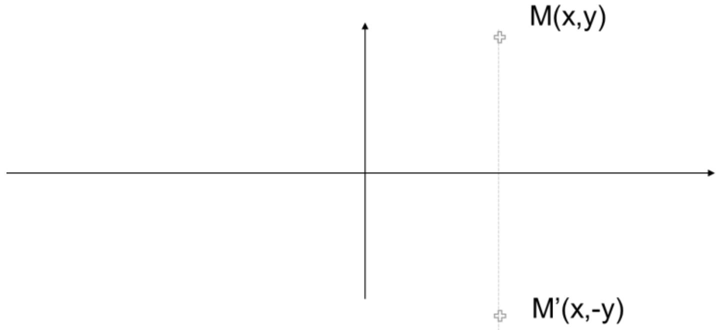
## 1.1 Mise en évidence

Symétrie

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 1 * x + 0 * y \\ y' = 0 * x - 1 * y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$




La symétrie par-rapport à Ox peut être représentée par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Mise en évidence : projection d'un point M du plan sur une droite $D_1$, parallèlement à une droite $D_2$

Dans le repère (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ ) soient M (x,y) et son projeté M' (x',y'). La projection est équivalente à :

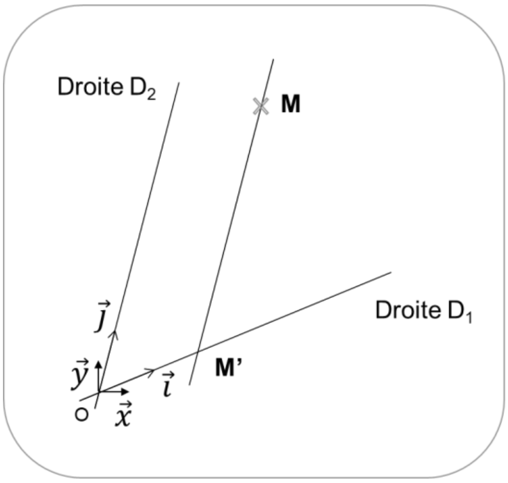
x' = x

y' = 0

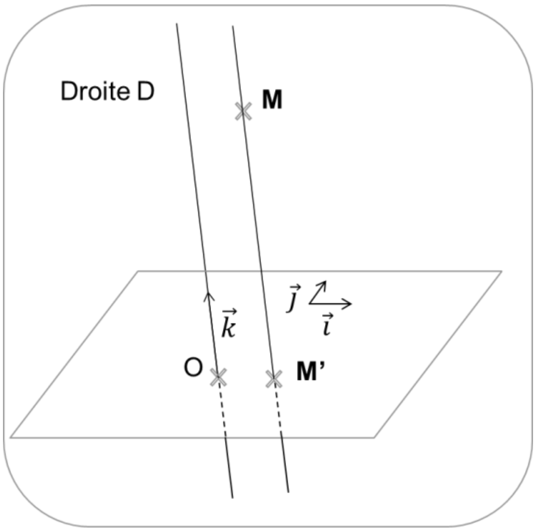
Forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si D1 et D2 sont perpendiculaires, on parle de projection orthogonale




Mise en évidence : projection d'un point M sur un plan (P), parallèlement à une droite D




Dans le repère (O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) :

Soient M (x,y,z) et son projeté M' (x',y',z'). La projection est équivalente à :

x' = x

y' = y

z' = 0

Forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Si D est normale au plan P, on parle de projection orthogonale.

## 1.2 Matrices de projection

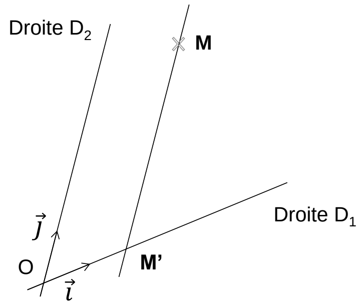
### 1.2.1 Projection d'un point M sur une droite D1, parallèlement à une droite D2

Dans le repère (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ ), soient M (x,y) et son projeté M' (x',y').

La projection est équivalente à : x = x' et y' = 0

Forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



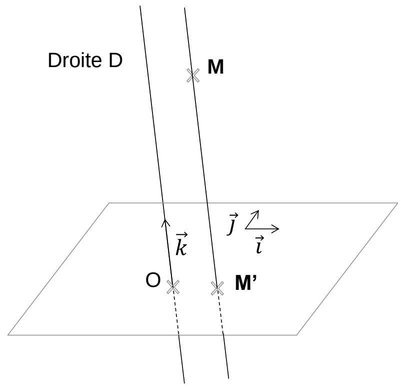

### 1.2.2 Projection d'un point M sur un plan (P), parallèlement à une droite D

Dans le repère (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ , $\vec{k}$), soient M (x,y,z) et son projeté M' (x',y',z'). La projection équivaut à :

x' = x ; y' = y ; z' = 0

Forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$




### 1.2.3 Projection orthographique et Projection perspective

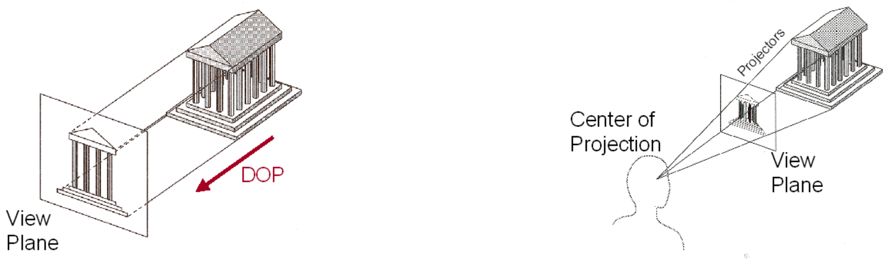
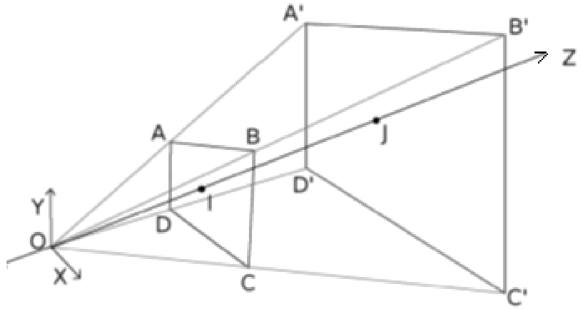



*Figure 1. Gauche : projection orthographique. Droite : projection perspective (http://www.cs.princeton.edu/courses/archive/fall99/cs426/lectures/view/sld016.htm)*

Soient P ($x_p$, $y_p$, $z_p$) les coordonnées du point P dans l'espace et $P_c$ les coordonnées de P sur l'écran, alors

$P_c = M.P$ avec Mp matrice de projection.

On raisonne dans le plan Oxz (Figure 2). On projette P sur le plan z = $z_q$ = $z_{min}$



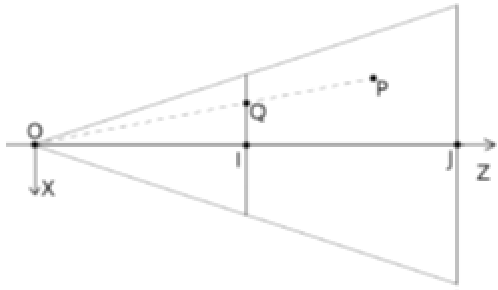




*Figure 2. Projection perspective*

Théorème de Thalès : $\frac{x_p}{x_q} = \frac{z_p}{z_q}$ donc $x_q = x_p.\frac{z_q}{z_p} = x_p.\frac{z_{min}}{z_p}$

Même raisonnement dans le plan OYZ : $y_q = y_p.\frac{z_q}{z_p} == y_p.\frac{z_{min}}{z_p}$

On souhaite ensuite normaliser les coordonnées du projeté de P, càd définir des coordonnées $x_n$, $y_n$, $z_n$ comprises entre 0 et 1 à partir des coordonnées $x_q$, $y_q$, $z_q$.

Soit L = AB. Alors $-L/2 \leq x_q \leq L/2$, donc on peut poser $x_n = \frac{x_q}{L/2}$

De plus, si on définit θ tel que $tan\theta = \frac{L/2}{z_q} = \frac{L/2}{z_{min}}$

Alors $x_n = \frac{x_q}{z_{min}.tan\theta}$

Or $\frac{x_p}{x_q} = \frac{z_p}{z_q}$

Donc on a finalement $x_n = \frac{x_p}{z_p.tan\theta}$

Même raisonnement pour $y_n$ en posant h = CB = L/a avec a = AB/AD

$$y_n = 2\frac{y_q}{h} = a.\frac{y_q}{z_{min}.\,tan\theta} = a.\frac{y_p}{z_p.\,tan\theta}$$

On souhaite également $-1 \leq z_n \leq 1$

Or $z_{min} \leq z_p \leq z_{max}$

Donc on peut écrire $z_n = A + \frac{B}{z_p}$

Avec $A = -\frac{z_{max}+z_{min}}{z_{min}-z_{max}}$ et $B = \frac{2z_{max}z_{min}}{z_{max}-z_{min}}$

En effet on souhaite avoir $z_n = -1$ pour $z_p = z_{min}$ et $z_n = 1$ pour $z_p = z_{max}$

On peut alors écrire la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{tan\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{tan\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit P ($x_p$, $y_p$, $z_p$), alors M.P est le vecteur

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{tan\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{tan\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{tan\theta} \\ \frac{a}{tan\theta} \\ A.z_p + B \\ z_p \end{pmatrix}$$

En divisant les 3 premières coordonnées de ce vecteur par $z_p$, on obtient bien la projection de P en coordonnées normalisées :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{z_p.tan\theta} \\ \frac{a}{z_p.tan\theta} \\ A + \frac{B}{z_p} \\ z_p \end{pmatrix}$$

Remarque : ajouter une composante W au vecteur position de P permet d'être en coordonnées homogènes (voir suite du cours). De plus, garder W = $z_p$ permet de réaliser le test de profondeur.

# 1.3 Matrices de transformations

## 1.3.1 Rotation en coordonnées cartésiennes

<u>Rotation d'angle θ</u>

Soit $\vec{u}$ vecteur tel que

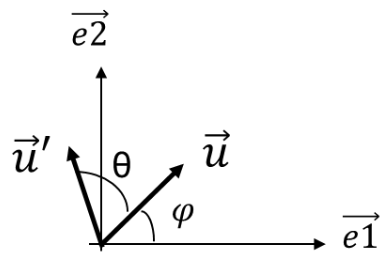
$$\vec{u} = cos\varphi.\overrightarrow{e1} + sin\varphi.\overrightarrow{e2} + u3.\overrightarrow{e3}$$

On tourne $\vec{u}$ d'un angle θ

$$\overrightarrow{u'} = \cos(\theta + \varphi).\overrightarrow{e1} + sin(\theta + \varphi).\overrightarrow{e2} + u3.\overrightarrow{e3}$$

$$\overrightarrow{u'} = \cos\theta.cos\varphi.\overrightarrow{e1} - \sin\theta.sin\varphi.\overrightarrow{e1} + sin\theta.cos\varphi.\overrightarrow{e2} + sin\varphi.cos\theta.\overrightarrow{e2} + u3z.\overrightarrow{e3}$$

$$\overrightarrow{u'} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} cos\varphi \\ sin\varphi \\ u3 \end{pmatrix}$$




Rotation d'angle θ suivant l'axe Ox

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

Rotation d'angle θ suivant l'axe Oy

$$\begin{pmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta \end{pmatrix}$$

Rotation d'angle θ suivant l'axe Oz

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 1.3.2 Changement d'échelle en coordonnées cartésiennes

Changement d'échelle = agrandir ou réduire un repère (pour zoomer ou modifier la taille d'un objet).

$$\begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix}$$

### 1.3.3 Translation

On ne peut pas représenter la translation dans un espace de dimension n avec une matrice de dimension n. Il faut ajouter une dimension, ce sera la notion de coordonnées homogènes.

### 1.3.4 Coordonnées homogènes

Vecteurs à n+1 coordonnées pour un espace de dimension n : les n coordonnées de base + une coordonnée supplémentaire.

Les transformations géométriques sont réalisées à partir de matrices carrées de dimension (n+1) * (n+1).

Intérêt des coordonnées homogènes : comme les translations peuvent s'exprimer par des matrices 4x4, toutes les compositions de transformations correspondent à des produits de matrices.

La n+1ème coordonnée d'un vecteur est 1 pour représenter une position, 0 pour représenter une direction (invariante par translation).

###### 1.3.4.1.1.1 Matrices de transformation en coordonnées homogènes

<u>Translation en coordonnées homogènes</u>

Soit une translation de vecteur (x,y,z) appliquée au vecteur (a,b,c) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Changement d'échelle</u>

Soit un changement d'échelle de facteurs (x,y,z) appliqué au vecteur (a,b,c) :

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x.a \\ y.b \\ z.c \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Matrice de rotation en coordonnées homogènes dans l'espace 3D</u>

Rotation d'angle θ suivant l'axe Ox

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta & 0 \\ 0 & sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

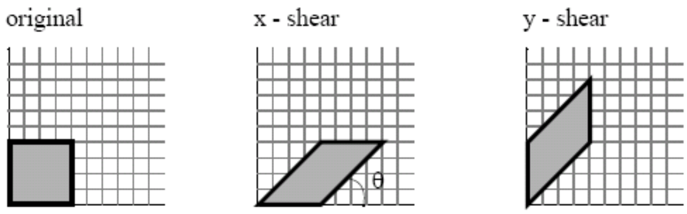
Rotation d'angle θ suivant l'axe Oy

$$\begin{pmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation d'angle θ suivant l'axe Oz

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Matrice de cisaillement en coordonnées homogènes (en 2D)</u>




| <u>x-shear</u> | <u>y-shear</u> |
|---|---|
| $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ |

## 1.4 Compositions de transformations

### 1.4.1 Définition

On désire appliquer une transformation A à un vecteur X puis une transformation B pour obtenir le vecteur final Y. D'après ce qui a été vu on a :

Y' = A.X puis Y = B.Y' , soit encore Y = B.(A.X), ou bien encore **Y = (B.A).X**

Plusieurs transformations successives sont donc représentées par la matrice produit de la matrice de chaque transformation

MAIS elles apparaissent, dans le produit, dans l'ordre inverse de l'ordre d'application des transformations.

### 1.4.2 Formulation transposée

Exemple : translation 3D $\begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix}$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & 0 & Ty \\ 0 & 0 & 1 & Tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ devient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Tx & Ty & Tz & 1 \end{pmatrix}$

Le produit matriciel entre un vecteur et une matrice passe de la forme : Y = A.X, à la forme Y = X.A.

Les compositions de transformations se font en multipliant le vecteur initial par les matrices de transformations dans l'ordre où elles interviennent (et non plus dans l'ordre inverse comme précédemment)..

### 1.4.3 Composition de transformations

On se place en coordonnées cartésiennes.

On veut représenter une rotation R quelconque à partir des matrices de rotation vues précédemment.

#### 1.4.3.1 Solution 1 : décomposer la rotation en 3 rotations autour des axes du repère (angles d'Euler)

[Animation Euler (www.youtube.com/watch?v=5uUiLwPcwuQ)](www.youtube.com/watch?v=5uUiLwPcwuQ)

[Euler Angles University of Pennsylvania (www.youtube.com/watch?v=5uUiLwPcwuQ)](www.youtube.com/watch?v=5uUiLwPcwuQ)

$$\begin{aligned} R_{\phi,\theta,\psi} &= R_{\mathbf{X}}(\phi)R_{\mathbf{Y}}(\theta)R_{\mathbf{Z}}(\psi) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ -\cos\phi\sin\psi + \cos\psi\sin\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\psi\sin\theta & \cos\theta\sin\phi \\ \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\psi\sin\theta & -\cos\psi\sin\phi + \cos\phi\sin\psi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*Figure 3. Thèse Aurélie RICHARD Université de Poitiers 2011 [2]*

Si θ = π/2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -cos\Phi sin\Psi + cos\Psi sin\Phi & cos\Phi cos\Psi + sin\Phi sin\Psi & 0 \\ sin\Phi sin\Psi + cos\Phi cos\Psi & -sin\Phi cos\Psi + cos\Phi sin\Psi & 0 \end{pmatrix}$$

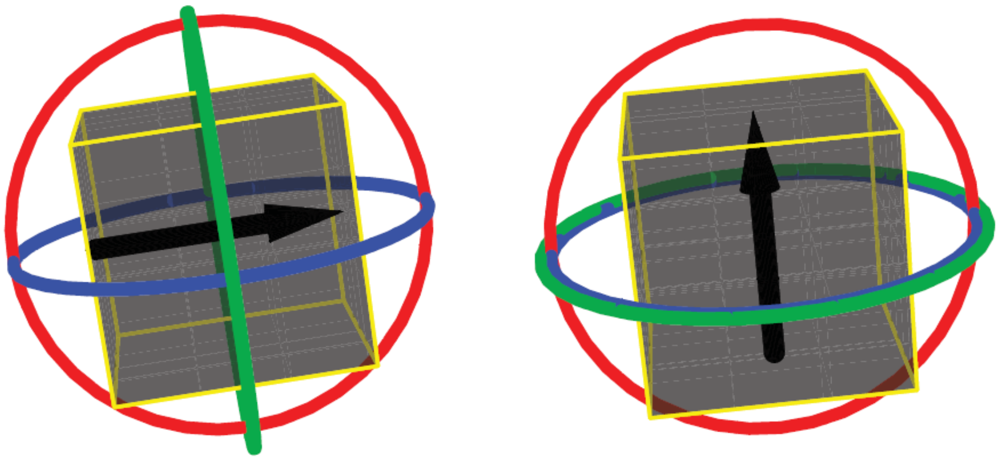
Et si Φ = 0 ou si Ψ = 0

$$R_{0,\frac{\pi}{2},\psi}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ \cos\psi & \sin\psi & 0 \end{pmatrix} \text{ et } R_{-\phi,\frac{\pi}{2},0}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \cos\phi & \sin\phi & 0 \end{pmatrix}$$

« *Dans le cas où les angles -Φ et Ψ sont égaux, si on effectue une rotation d'axe z et d'angle ψ ou une rotation d'axe x d'angle −φ, la matrice de rotation ainsi calculée engendre la même rotation. Il n'est alors pas possible d'effectuer une rotation par rapport à l'axe des x qui soit différente d'une rotation par rapport à l'axe des z. Cela est le blocage de cardan.* » Source : Thèse Aurélie RICHARD Université de Poitiers 2011

Ainsi la solution 1 peut mener au blocage de cardan.

https://www.youtube.com/watch?v=zc8b2Jo7mno



(a) (b)

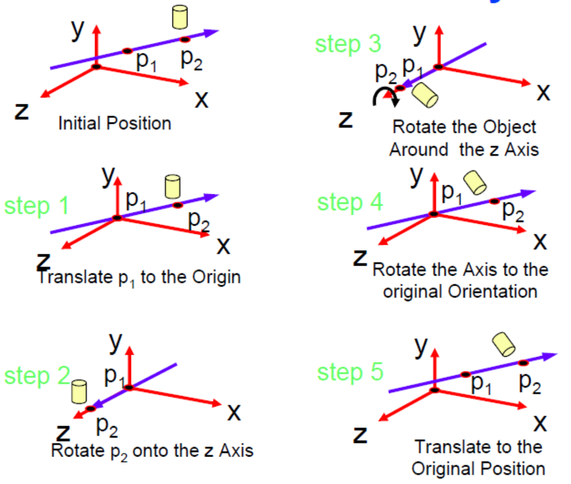
FIGURE 1.3 – Illustration du blocage de cardan. (a) L'objet cubique peut tourner dans l'espace 3D dans les trois directions matérialisées par les anneaux de couleur. Ces trois anneaux sont indépendants ; (b) Si l'objet effectue une rotation d'angle $\pi/2$ dans une direction, deux des trois anneaux sont coplanaires : on parle alors de *blocage de cardan*.

*Figure 4. [2]*

### 1.4.3.2 Solution 2 : matrice de la rotation d'angle θ autour d'un axe quelconque de vecteur unitaire directeur $\vec{U}$ (Ux, Uy, Uz)

On décompose la rotation en plusieurs transformations « élémentaires » dont la matrice est facile à définir

## Rotation About an Arbitrary Axis




## Rotation About an Arbitrary Axis

- Step1: $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Step 2: $M = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ w_x & w_y & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Step 3: $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Step 4: $M^{-1} = \begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x & 0 \\ u_y & v_y & w_y & 0 \\ u_z & v_z & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Step 5: $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Composition: $P' = T^{-1} M^{-1} R M T P$

## Change of Coordinates

- Let's check the transformation of *U* under *M*:

$$MU = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ w_x & w_y & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = X$$

*Figure 5. ([http://www.cs.brandeis.edu/~cs155/Lecture_07_6.pdf](http://www.cs.brandeis.edu/~cs155/Lecture_07_6.pdf))*

Remarque : cette solution, telle que proposée ci-dessus, permet également de définir la rotation autour d'un axe ne passant pas par l'origine.

#### 1.4.3.3 Solution 3 : formule de rotation de Rodrigues (qui sera utile pour les quaternions...)

Soit la rotation autour de l'axe de vecteur directeur unitaire $\vec{U}$ et passant par l'origine, et d'angle θ.

On pose c = cos θ ; s = sin θ.

L'image du vecteur $\vec{V}$ par la rotation R est : (démo : http://fr.wikipedia.org/wiki/Rotation_vectorielle)

$$\cos\theta.\vec{V} + (1-\cos\theta)(\vec{U}.\vec{V})\,\vec{U} + \sin\theta.(\vec{U}\wedge\vec{V})$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} V'x \\ V'y \\ V'z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ux^2 + c.(1-Ux^2) & UxUy(1-c) - Uz.s & UxUz(1-c) + Uy.s & 0 \\ UxUy(1-c) + Uz.s & Uy^2 + c.(1-Uy^2) & UyUz(1-c) - Ux.s & 0 \\ UxUz(1-c) - Uy.s & UyUz(1-c) + Ux.s & Uz^2 + c.(1-Uz^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} Vx \\ Vy \\ Vz \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 1.5 Effet d'un changement de base sur une matrice de transformation

Exemple

Dans R² rapporté à la base canonique, on considère la transformation f de matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de f dans la base déduite de la base canonique par rotation de π/6 autour de l'origine

La base déduite de la base canonique par rotation de π/6 autour de l'origine est la base composée des vecteurs : e'1 = (√3/2 ; 1/2) et e'2 = (-1/2 ; √3/2)

Donc $P = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$

Dans la nouvelle base, la matrice représentant f est A'=P-1.A.P

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f est une symétrie par rapport au vecteur e'2

## 1.6 Invariants d'une matrice de transformation

Sur la trace tr d'une matrice. Soient deux matrices carrées A et B de même ordre et a un nombre. Alors

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$$

$$tr(a.A) = a.tr(A)$$

$$tr(A.B) = tr(B.A)$$

$$tr\left({}^tA\right) = tr(A)$$

Par conséquent, soient A et B des matrices carrées de même ordre et une matrice P inversible, telles que $A = P^{-1}.B.P$ alors tr(A)=tr(B). On dit que la trace est un invariant de similitude.

On peut en déduire une propriété très intéressante : pour une matrice de rotation, sa trace a pour expression

$$\mathrm{tr}(A) = 1 + 2\cos\theta$$

La trace d'une matrice de rotation nous renseigne sur l'angle de la rotation.

## 1.7 Liens utiles

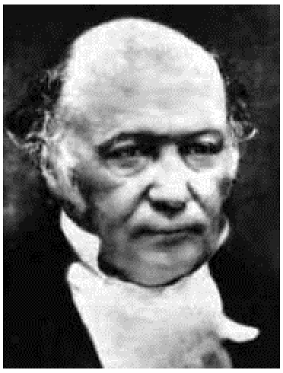
Matrices de transformation / coordonnées homogènes / Matrices de projection

- http://www.pling.org.uk/cs/cgv.html
- http://en.wikipedia.org/wiki/Transformation_matrix
- http://www.cs.brandeis.edu/~cs155/Lecture_07_6.pdf
- http://campus-douai.gemtech.fr/mod/resource/view.php?id=1289
- http://www.cs.brandeis.edu/~cs155/Lecture_07_6.pdf
- http://nuxeo.edel.univ-poitiers.fr/nuxeo/site/esupversions/48410758-e4ce-406e-b32e-d246d99ad0db
- http://www.cmap.polytechnique.fr/~leonard/Maths2/Maths%202%20-%20Algebre%20lineaire.pdf.pdf
- http://www.pling.org.uk/cs/cgv.html
- http://jeux.developpez.com/tutoriels/OpenGL-ogldev/tutoriel-12-projection-perspective/
- http://www.spacegoo.com/cours/1_proj.pdf

Blocage de Cardan (gimbal lock)

- https://www.youtube.com/watch?v=rrUCBOlJdt4
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Blocage_de_cardan#Le_blocage_de_cardan_.C3.A0_bord_d.27Apollo_11
- http://nuxeo.edel.univ-poitiers.fr/nuxeo/site/esupversions/48410758-e4ce-406e-b32e-d246d99ad0db

# 2 Quaternions



Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865)

http://www.hamilton2005.ie/quaternions.html

## 2.1 Généralités

Un quaternion Q s'écrit de façon unique de la manière suivante :

$$Q = a + b.i + c.j + d.k$$

Avec a b c d : coefficients réels et i, j et k ayant les propriétés suivantes :

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

| **x** | **1** | **i** | **j** | **k** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | **1** | **i** | **j** | **k** |
| **i** | **i** | **-1** | **k** | **-j** |
| **j** | **j** | **-k** | **-1** | **i** |
| **k** | **k** | **j** | **-i** | **-1** |

Attention : 1.i=i.1=i mais i.j=k et j.i=-k : algèbre partiellement anticommutative

NB : on peut parler d'une extension des complexes avec a : partie réelle et (b,c,d) : partie imaginaire.

### 2.1.1 Multiplication des quaternions

Le produit de deux quaternions q = a + b i + c j + d et q' = a' + b' i + c' j + d' s'obtient en développant le produit puis en applicant les réductions $i^2 = -1$, ij = k, …, $k^2 = -1$ définies par la table de multiplication.

- La multiplication des quaternions est associative : (q1.q2).q3 = q1.(q2.q3)
- La multiplication des quaternions n'est pas commutative : q1.q2 ≠ q2.q1

### 2.1.2 Conjugué d'un quaternion

Si q = a + b.i + c.j + d.k alors le conjugué de q est : q' = a – b.i – c.j – d.k

Propriétés : (q1 + q2)’ = q1’ + q2’

### 2.1.3 Norme

Si q = a + b.i + c.j + d.k alors la norme de q est $\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

Propriétés de la norme :

- $\|q\|=\|q'\|$
- $\|q1.q2\|=\|q1\|.\|q2\|$

### 2.1.4 Inverse d’un quaternion

Si $Q^{-1}$ est l’inverse Q, alors $Q.Q^{-1} = 1$

Propriété : $Q^{-1} = 1/Q = Q' / QQ' = Q' / \|Q\|^2$

### 2.1.5 Quaternion unitaire

Un quaternion unitaire est un quaternion de norme = 1

Pour un quaternion unitaire, $Q^{-1} = Q'$ (conjugué)

### 2.1.6 Approche vectorielle

#### Approche vectorielle : notation (a, $\vec{V}$)

Si i, j et k sont des vecteurs unitaires, $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base de l’espace 3D

Un quaternion q = a + b.i + c.j + d.k peut alors s’écrire :

$$Q = a + \vec{V} \qquad \text{avec} \qquad \vec{V} = b\vec{\imath} + c\vec{\jmath} + d\vec{k}$$

Somme de quaternions en notation (a, $\vec{V}$) :

$$Q1 + Q2 = (a_1, \overrightarrow{V_1}) + (a_2, \overrightarrow{V_2}) = (a_1 + a_2, \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2})$$

Multiplication de quaternions notation (a, $\vec{V}$) :

$$Q1.Q2 = (a_1.a_2 - \overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} \, ; \, a_1.\overrightarrow{V_2} + a_2.\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2})$$

Norme en notation (a, $\vec{V}$) : $a^2+b^2+c^2+d^2 = a^2 + \|V\|^2$

#### Quaternion unitaire en notation (a, $\vec{V}$)

Un quaternion unitaire vérifie :

$$a^2 + \|V\|^2 = 1$$

On peut donc trouver un réel θ tel que $a=\cos(\theta)$ et $\vec{V}=\sin(\theta).\vec{U}$ avec $\vec{U}$ vecteur unitaire

***<u>Cela va nous servir pour définir des rotations de l’espace à l’aide de quaternions !</u>***

# 2.2 Rotations et quaternions

### 2.2.1 Comment les quaternions peuvent-ils représenter des rotations dans l'espace ?

On a vu qu'un quaternion unitaire pouvait s'écrire sous la forme q=(cosθ/2, sinθ/2 $\vec{U}$)

Prenons son inverse $q^{-1}$ = (cosθ/2, -sinθ/2 $\vec{U}$)

Prenons un quaternion (0, $\vec{V}$) et calculons p = q.p.$q^{-1}$ = (cosθ/2, sinθ/2 $\vec{U}$).(0, $\vec{V}$).(cosθ/2, -sinθ/2 $\vec{U}$)

On peut montrer que

$$p = (0, \cos\theta.\,\vec{V} + (1-\cos\theta)(\vec{U}.\,\vec{V})\,\vec{U} + \sin\theta.(\vec{U} \wedge \vec{V}))$$

Démonstration : http://fr.wikipedia.org/wiki/Double_produit_de_quaternions

On reconnait la formule du vecteur image de $\vec{V}$ par la rotation d'axe $\vec{U}$ d'angle θ

Conclusion : les quaternions peuvent être utilisés pour représenter une rotation de l'espace

# 2.3 Rotation à l'aide des quaternions unitaires

### 2.3.1 Définition

Soit la rotation R autour d'un axe de vecteur directeur unitaire $\vec{U}$ et d'angle θ

Soit le quaternion unitaire q=(cosθ/2, sinθ/2.$\vec{U}$)

Soit un vecteur $\vec{V}$ de l'espace représenté par le quaternion (0, $\vec{V}$)

Alors l'image $\vec{V'}$ de $\vec{V}$ par la rotation R est le quaternion :

$$(0, \vec{V'}) = (\cos\theta/2, \sin\theta/2\ \vec{U}).\ (0, \vec{V}).\ (\cos\theta/2, -\sin\theta/2\ \vec{U})$$

### 2.3.2 Approche matricielle

On sait maintenant que l'on peut utiliser un quaternion unitaire q pour représenter une rotation de l'espace 3D

Le vecteur $\vec{V}$ représenté par le quaternion $p_{initial}$=(0, $\vec{V}$) devient après rotation le vecteur $\vec{V'}$ représenté par le quaternion $p_{final}$=(0, $\vec{V'}$) tel que :

$$p_{final} = q.p_{initial}.q'$$

Si q = a + bi + cj + dk alors :

$$p_{final} = (a + bi + cj + dk).p_{initial}.(a - bi - cj - dk)$$

Après développement, on peut écrire cette égalité sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2bc-2ad & 2ac+2bd \\ 2ad+2bc & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2cd-2ab \\ 2bd-2ac & 2ab+2cd & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

### 2.3.3 Combinaison de rotations

Soient $q_1$ et $q_2$ deux quaternions unitaires représentant 2 rotations R1 et R2

On applique à un vecteur $\vec{V}$ représenté par le quaternion p, la rotation R1 puis la rotation R2 :

$$p_{final} = q_2.(q_1.p.q_1').q_2'$$

La multiplication des quaternions est associative donc :

$$p_{final} = (q_2.q_1).p.(q_1'.q_2')$$

La composition des rotations R1 et R2 est donc représentée par le quaternion $q = q_2.q_1$

### 2.3.4 Comparaison avec les matrices de rotation

- Pas de blocage de cardan apparaissant pour les angles d'Euler
- Plus facile à définir à partir du vecteur et de l'angle
- Rotation plus fluide
- Moins de souci avec accumulations d'erreurs d'arrondis
- Combinaison de rotations moins couteuse

### 2.3.5 Liens utiles

Quaternions

- http://www.hamilton2005.ie/quaternions.html
- http://en.wikipedia.org/wiki/William_Rowan_Hamilton
- http://fr.wikipedia.org/wiki/Quaternion#Quaternions_unitaires_et_forme_polaire
- http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~robert/printcours_upn_08_4.pdf
- http://www.llibre.fr/copie_cert/DCSD-2009_008-NOT-003-1.1.pdf

Maths appliqués gameplay infographie

- http://www.essentialmath.com/references.htm
- http://www.essentialmath.com/tutorial.htm

# 3 Exercices

## 3.1 Matrices pour l'infographie

### 3.1.1 Exercice : questions de cours

1. Expliquer et détailler l'intérêt principal des coordonnées homogènes pour les matrices de transformation
2. Expliquer et détailler l'intérêt principal de la formulation transposée pour les matrices de transformation

### 3.1.2 Exercice : ordre de multiplications de rotations

Soit un repère de l'espace (O,$\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$)

1. Ecrire la matrice A, matrice de la rotation autour de l'axe X, d'angle 45°
2. Ecrire la matrice B, matrice de la rotation autour de l'axe Y, d'angle 60°
3. Calculer l'image du point M de coordonnées (1,1,0) par la rotation A puis la rotation B
4. Calculer l'image du point M de coordonnées (1,1,0) par la rotation B puis la rotation A

**Correction**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos45° & -sin45° \\ 0 & sin45° & cos45° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} cos60° & 0 & sin60° \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin60° & 0 & cos60° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Q3

$$M' = B.A.M = \begin{pmatrix} 1.11 \\ \sqrt{2}/2 \\ -0.512 \end{pmatrix}$$

Q4

$$M' = A.\mathrm{B}.M = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.32 \\ 0.095 \end{pmatrix}$$

SCILAB

A=[1,0,0;0,sqrt(2)/2,-sqrt(2)/2;0,sqrt(2)/2,sqrt(2)/2]

B=[0.5,0,sqrt(3)/2;0,1,0;-sqrt(3)/2,0,0.5]

### 3.1.3 Exercice : mise en évidence des matrices de transformation

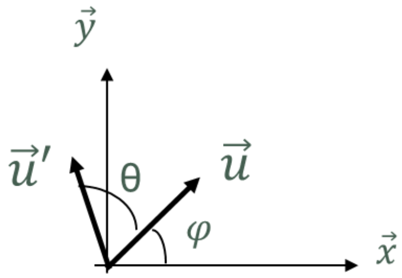
Soit un repère (O,$\vec{x}$,$\vec{y}$,$\vec{z}$) orthonormé direct.

Soit un vecteur $\vec{u}$, unitaire, faisant un angle ϕ avec l'axe $\vec{x}$.

On fait tourner le vecteur $\vec{u}$ d'un angle θ autour de $\vec{z}$.

On obtient le vecteur $\vec{u}'$

1. Déterminer les coordonnées du nouveau vecteur obtenu en fonction des cosinus et sinus de θ et de ϕ. (Aide : penser aux formules d'addition.)
2. Ecrire la représentation matricielle du système linéaire obtenu




### 3.1.4 Exercice : rotation inconnue

Votre collègue vous fournit cette matrice et vous assure que c'est une matrice de rotation mais il ne vous indique pas son axe de rotation ni son angle.

1/ Retrouver l'angle de la rotation représenté par cette matrice, au signe près.

2/ Il vous semble, après quelques expérimentations, que $\vec{U} = (1,\ 1,\ 0)$ est vecteur directeur de l'axe de rotation. Vérifier cette observation

```
A  =

   0.75         0.25         0.6123724
   0.25         0.75       - 0.6123724
 - 0.6123724    0.6123724    0.5
```

**Correction**

On sait que Tr(A) = 1+2cosθ

donc 1+2cos θ=2 donc cos θ=1/2 donc θ=+- π/3

axe de rotation : on vérifie que A.U=k.U

### 3.1.5 Exercice : matrice de rotation autour d'un axe inconnu

Soit la rotation R autour de l'axe de vecteur directeur unitaire $\vec{U}$ et passant par l'origine, et d'angle θ.

Selon la formule de rotation de Rodrigues, l'image $\vec{V}'$ du vecteur $\vec{V}$ par la rotation R est :

cosθ.$\vec{V}$ + (1-cosθ)($\vec{U}.\vec{V}$) $\vec{U}$ + sinθ.($\vec{U} \wedge \vec{V}$)

La matrice M de cette rotation est telle que

$$V' = M.V$$

1/ Montrer que la matrice M de la rotation peut s'écrire

$$M = cos\theta\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} + (1-cos\theta).\begin{pmatrix}U_x^2 & U_xU_y & U_xU_z\\U_xU_y & U_y^2 & U_yU_z\\U_xU_z & U_yU_z & U_z^2\end{pmatrix} + sin\theta\begin{pmatrix}0 & -U_z & U_y\\U_z & 0 & -U_x\\-U_y & U_x & 0\end{pmatrix}$$

2/ Soit ${}^{T}$M la matrice transposée de M. Montrer que

$$M - {}^{T}M = 2sin\theta\begin{pmatrix}0 & -U_z & U_y\\U_z & 0 & -U_x\\-U_y & U_x & 0\end{pmatrix}$$

3/ Soit la rotation R' d'angle 30° et d'axe inconnu.

La matrice de cette rotation est donnée ci-dessous. Retrouver l'axe de la rotation R'.

| | | |
|---|---|---|
| 0,8724051 | -0,4236763 | 0,2437369 |
| 0,4491953 | 0,8915444 | -0,0580710 |
| -0,1926989 | 0,1601469 | 0,9681013 |

## Correction

1/ Montrer que la matrice M de la rotation peut s'écrire

$$M = cos\theta\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} + (1-cos\theta).\begin{pmatrix}U_x^2 & U_xU_y & U_xU_z\\U_xU_y & U_y^2 & U_yU_z\\U_xU_z & U_yU_z & U_z^2\end{pmatrix} + sin\theta\begin{pmatrix}0 & -U_z & U_y\\U_z & 0 & -U_x\\-U_y & U_x & 0\end{pmatrix}$$

Calculons

$$cos\theta\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_x\\V_y\\V_z\end{pmatrix} = cos\theta\begin{pmatrix}V_x\\V_y\\V_z\end{pmatrix}$$

Donc la matrice correspondant au terme $cos\theta.\vec{V}$ est la matrice

$$cos\theta\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Calculons

$$(1-cos\theta).\begin{pmatrix} U_x^2 & U_xU_y & U_xU_z \\ U_xU_y & U_y^2 & U_yU_z \\ U_xU_z & U_yU_z & U_z^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = (1-cos\theta)\begin{pmatrix} U_x^2V_x + U_xU_yV_y + U_xU_zV_z \\ U_xU_yV_x + U_y^2V_y + U_yU_zV_z \\ U_xU_zV_x + U_yU_zV_y + U_z^2V_z \end{pmatrix}$$

$$(1-cos\theta).\begin{pmatrix} U_x^2 & U_xU_y & U_xU_z \\ U_xU_y & U_y^2 & U_yU_z \\ U_xU_z & U_yU_z & U_z^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = (1-cos\theta).\left(U_xV_x + U_yV_y + U_zV_z\right)\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{pmatrix}$$

Donc le terme (1-cosθ)($\vec{U}.\vec{V}$) $\vec{U}$ a pour matrice

$$(1-cos\theta).\begin{pmatrix} U_x^2 & U_xU_y & U_xU_z \\ U_xU_y & U_y^2 & U_yU_z \\ U_xU_z & U_yU_z & U_z^2 \end{pmatrix}$$

Calculons

$$sin\theta\begin{pmatrix} 0 & -U_z & U_y \\ U_z & 0 & -U_x \\ -U_y & U_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = sin\theta\begin{pmatrix} -U_zV_y + U_yV_z \\ U_zV_x - U_xV_y \\ -U_yV_x + U_xV_z \end{pmatrix}$$

On reconnait le terme sinθ.($\vec{U} \wedge \vec{V}$) de la formule de Rodrigues

2/ Soit ${}^TM$ la matrice transposée de M. Montrer que

$$M - {}^TM = 2sin\theta\begin{pmatrix} 0 & -U_z & U_y \\ U_z & 0 & -U_x \\ -U_y & U_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = cos\theta\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1-cos\theta).\begin{pmatrix} U_x^2 & U_xU_y & U_xU_z \\ U_xU_y & U_y^2 & U_yU_z \\ U_xU_z & U_yU_z & U_z^2 \end{pmatrix} + sin\theta\begin{pmatrix} 0 & -U_z & U_y \\ U_z & 0 & -U_x \\ -U_y & U_x & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Remarque</u>

La transposée de M est la somme des transposées de chaque matrice

*CORRECTION*

$$M - {}^TM = sin\theta\begin{pmatrix} 0 & -U_z & U_y \\ U_z & 0 & -U_x \\ -U_y & U_x & 0 \end{pmatrix} - sin\theta\begin{pmatrix} 0 & U_z & -U_y \\ -U_z & 0 & -U_x \\ U_y & U_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$M - {}^TM = sin\theta\begin{pmatrix} 0 & -U_z & U_y \\ U_z & 0 & -U_x \\ -U_y & U_x & 0 \end{pmatrix} + sin\theta\begin{pmatrix} 0 & -U_z & U_y \\ U_z & 0 & -U_x \\ -U_y & U_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$M - {}^TM = 2sin\theta\begin{pmatrix} 0 & -U_z & U_y \\ U_z & 0 & -U_x \\ -U_y & U_x & 0 \end{pmatrix}$$

3/ En déduire l'axe de rotation de la rotation R' d'angle 30° représentée par la matrice ci-dessous.

| | | |
|---|---|---|
| matrice | | |
| 0,8724051 | -0,4236763 | 0,2437369 |
| 0,4491953 | 0,8915444 | -0,0580710 |
| -0,1926989 | 0,1601469 | 0,9681013 |
| | | |
| Transposée | | |
| 0,8724051 | 0,4491953 | -0,1926989 |
| -0,4236763 | 0,8915444 | 0,1601469 |
| 0,2437369 | -0,0580710 | 0,9681013 |

| | | |
|---|---|---|
| M-MT | | |
| 0,0000000 | -0,8728716 | 0,4364358 |
| 0,8728716 | 0,0000000 | -0,2182179 |
| -0,4364358 | 0,2182179 | 0,0000000 |
| | | |
| 2sinθ | 1 | |
| (M-MT)/2sin | | |
| 0,0000000 | -0,8728716 | 0,4364358 |
| 0,8728716 | 0,0000000 | -0,2182179 |
| -0,4364358 | 0,2182179 | 0,0000000 |

| | | |
|---|---|---|
| Vecteur U | | |
| Ux | 0,2182 | 1 |
| Uy | 0,4364 | 2 |
| Uz | 0,8729 | 4 |

### 3.1.6 Exercice : réduction du triangle autour de son centre

On veut réduire un triangle autour du centre du triangle et non autour de l'origine O du repère. Les sommets sont A (8, 10) ; B (10, 6) ; C (9, 4).


### 3.1.7 Exercice

Soit un repère (O,$\vec{x}$,$\vec{y}$,$\vec{z}$) orthonormé.

Soit un vecteur $\vec{u}$, unitaire, faisant un angle ϕ avec l'axe $\vec{x}$.

On fait tourner le vecteur $\vec{u}$ d'un angle θ autour de $\vec{z}$. Déterminer les coordonnées du nouveau vecteur obtenu en fonction de θ et ϕ. (Aide : penser aux formules d'addition.)

### 3.1.8 Exercice : il pleut, il pleut, bergère

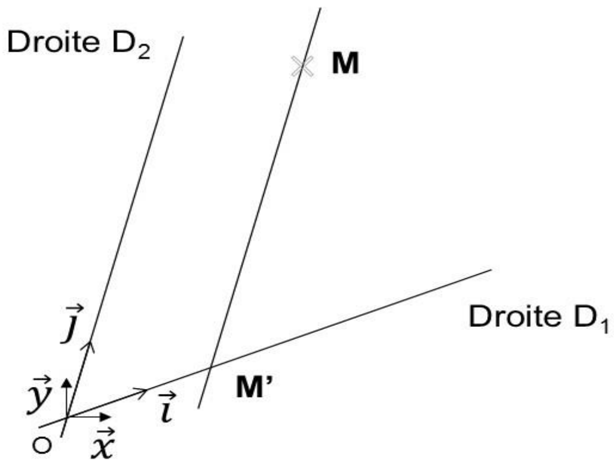
On veut situer le point d'impact M' d'une goutte d'eau initialement en M, sur la colline définie par la droite $D_1$ (problème plan).

Il pleut parallèlement à la droite $D_2$.

Le point M a pour coordonnées (6,9) dans la base ($\vec{x}$, $\vec{y}$).

Les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ ont pour composantes (2,1) et (1/2,2) dans la base ($\vec{x}$, $\vec{y}$).

1. Déterminer les coordonnées de M dans la base ($\vec{\imath}$ , $\vec{\jmath}$)
2. En déduire les coordonnées de M' dans la base ($\vec{\imath}$ , $\vec{\jmath}$)
3. En déduire les coordonnées de M' dans la base ($\vec{x}$ , $\vec{y}$)




## Correction

**Coordonnées de M dans la base ($\vec{\imath}$ , $\vec{\jmath}$)**

Matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 2 & 0,5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0,57 & -0,14 \\ -0,28 & 0,57 \end{pmatrix}$

X=(6,9)=P.X' donc X'=$P^{-1}$.X=$\begin{pmatrix} 2,14 \\ 3,43 \end{pmatrix}$

**Coordonnées de M' dans la base ($\vec{\imath}$ , $\vec{\jmath}$) : projection**

M'=$\begin{pmatrix} 2,14 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Coordonnées de M' dans la base ($\vec{x}$ , $\vec{y}$)**

X=P.X'=$\begin{pmatrix} 2 & 0,5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2,14 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,28 \\ 2,14 \end{pmatrix}$

### 3.1.9 Exercice : composition de transformations en formulation transposée

On considère les transformations géométriques suivantes en 2D dans le plan (x,y):

M1 : symétrie par rapport à l'axe des abscisses

M2 : rotation de 30° (sens trigonométrique) autour du point (2,2) autour de z

M3 : translation de vecteur directeur (-4,2)

M4 : dilatation x' = 2x, y' = 3y

1. Donner, en coordonnées homogènes, les matrices correspondantes, en formulation transposée.
2. On effectue à la suite les transformations T1, T2, T3, T4. Quelle est la matrice M de la transformation globale en formulation transposée ?
3. Vérifier le résultat obtenu avec le point A de coordonnées (1,3)

## Correction

$$M1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad M2 = \begin{Vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\sqrt{3}+3 & 1-\sqrt{3} & 1 \end{Vmatrix} \qquad M3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \qquad M4 = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

2. La matrice de la transformation globale est :

$$M = \begin{Vmatrix} \sqrt{3} & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{3\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -2-2\sqrt{3} & 9-3\sqrt{3} & 1 \end{Vmatrix}$$

**Détail du calcul pour M2**

On change de repère pour que le point (2,2) soit l’origine, on tourne, puis on remet le repère à la position initiale

M2=T.R.T2 Avec

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rappel : rotation autour de z

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

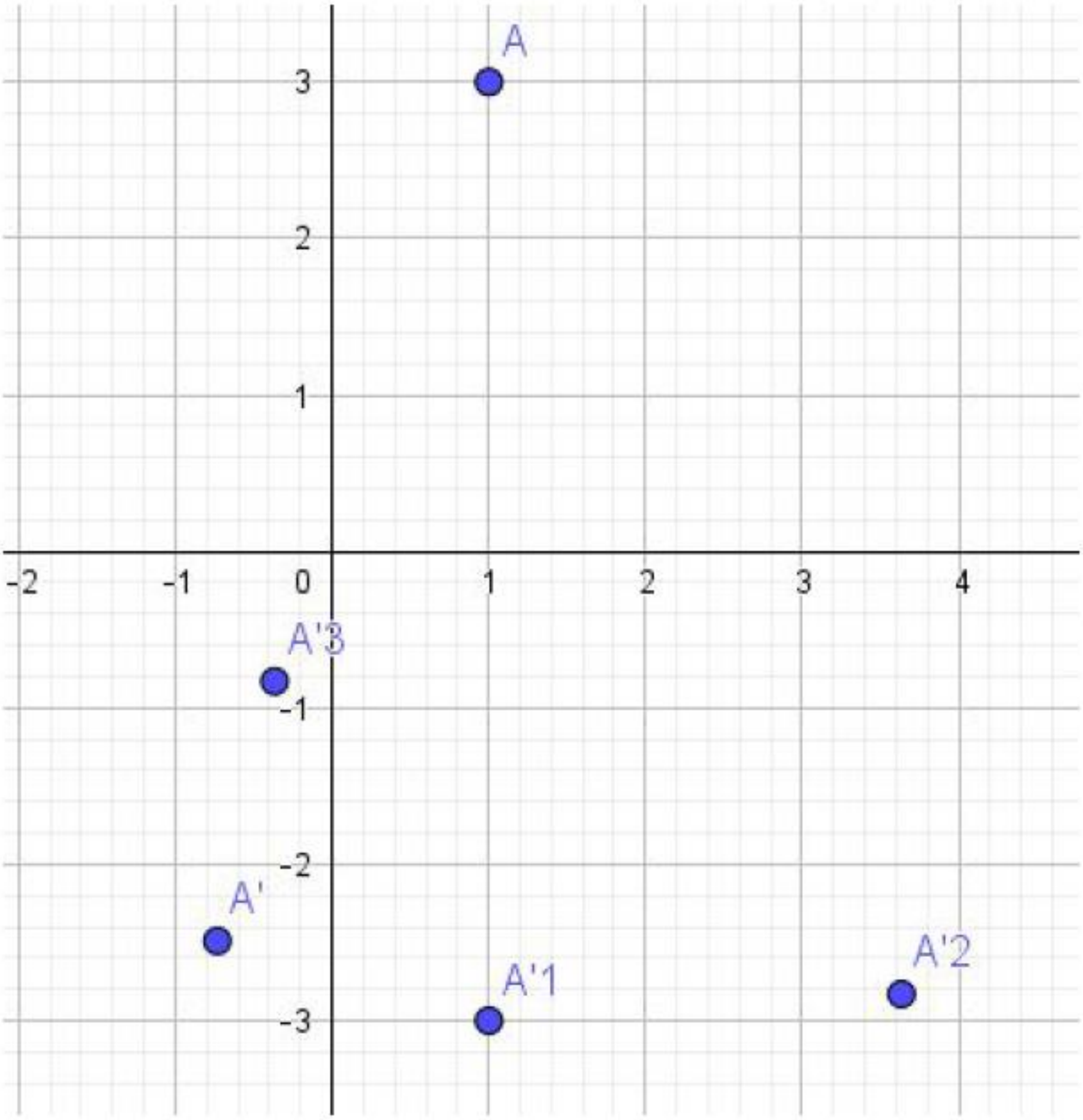



Image de A (1 ; 3)

(-0,73 ; -2,49)

SCILAB

M1=[1,0,0;0,-1,0;0,0,1]

T=[1,0,0;0,1,0;-2,-2,1]

T2=[1,0,0;0,1,0;2,2,1]

R=[sqrt(3)/2,0.5,0;-0.5,sqrt(3)/2,0;0,0,1]

M2=T*R*T2

M3=[1,0,0;0,1,0;-4,2,1]

M4=[2,0,0;0,3,0;0,0,1]

M=M1*M2*M3*M4

[1,3,1]*M

## 3.2 Quaternions

### 3.2.1 Exercice : calcul de quaternions

Calculer (2 + 3j).(i + 2k)

**Correction**

8i+k

### 3.2.2 Exercice

Montrer que la norme d'un quaternion q en notation (a, $\vec{V}$) est donnée par ‖q‖² = a² + ‖V‖²

### 3.2.3 Exercice : rotation $\vec{U} = (1,\ 0,\ 0)$, angle θ=π/2

Soit la rotation R autour de l'axe de vecteur directeur unitaire $\vec{U} = (1,\ 0,\ 0)$, et d'angle θ=π/2

1. Quel est le quaternion unitaire représentant cette rotation ?
2. En déduire la matrice de rotation associée à ce quaternion
3. Vérifier le résultat obtenu à l'aide d'un vecteur quelconque (x,y,z)

**Correction**

**Soit la rotation R autour de l'axe de vecteur directeur unitaire $\vec{U} = (1,\ 0,\ 0)$, d'angle θ=π/2**

Quel est le quaternion unitaire représentant cette rotation ?

q=(cosθ/2, sinθ/2 $\vec{U}$)

$$\begin{cases} a = \cos(\frac{\theta}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \sin(\frac{\theta}{2}).Ux = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ c = \sin(\frac{\theta}{2}).Uy = 0 \\ d = \sin(\frac{\theta}{2}).Uz = 0 \end{cases}$$

En déduire la matrice de rotation associée à ce quaternion

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2-c^2-d^2 & 2bc-2ad & 2ac+2bd \\ 2ad+2bc & a^2-b^2+c^2-d^2 & 2cd-2ab \\ 2bd-2ac & 2ab+2cd & a^2-b^2-c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

Vérifier le résultat obtenu à l'aide d'un vecteur quelconque (x,y,z)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ y \end{pmatrix}$$

### 3.2.4 Exercice : rotation $\vec{U} = (1,\ 1,\ 0)$, angle θ=π/3

Soit la rotation R autour de l'axe de vecteur directeur $\vec{U} = (1,\ 1,\ 0)$, et d'angle θ=π/3

1. Quel est le quaternion unitaire représentant cette rotation ? (donner les notations (a, $\vec{V}$) et q=a+bi+cj+dk)
2. En déduire la matrice de rotation associée à ce quaternion
3. Comparer avec la matrice générale de la rotation R d'angle θ autour d'un axe de vecteur directeur unitaire (Ux, Uy, Uz) en coordonnées cartésiennes. Expliciter le raisonnement.

## Correction

**Soit la rotation R autour de l'axe de vecteur directeur $\vec{U} = (1,\ 1,\ 0)$, et d'angle θ=π/3**

**Quaternion unitaire représentant cette rotation ?**

Problème : U n'est pas unitaire, or il faut prendre un vecteur unitaire pour définir q

On pose $\overrightarrow{U'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,\ 1,\ 0)$ et donc q=(cosθ/2, sinθ/2 $\overrightarrow{U'}$)

$$\begin{cases} a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ b = \sin(\frac{\theta}{2}).U'x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right).\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ c = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).U'y = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right).\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ d = \sin(\frac{\theta}{2}).U'z = 0 \end{cases}$$

**Matrice de rotation associée à ce quaternion**

A=[a^2+b^2-c^2-d^2,2*b*c-2*a*d,2*a*c+2*b*d;2*a*d+2*b*c,a^2-b^2+c^2-d^2,2*c*d-2*a*b;2*b*d-2*a*c,2*a*b+2*c*d,a^2-b^2-c^2+d^2]

```
A  =

   0.75         0.25         0.6123724
   0.25         0.75       - 0.6123724
 - 0.6123724    0.6123724    0.5
```

Matrice de rotation en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} Ux^2 + c.(1 - Ux^2) & UxUy(1-c) - Uz.s & UxUz(1-c) + Uy.s & 0 \\ UxUy(1-c) + Uz.s & Uy^2 + c.(1 - Uy^2) & UyUz(1-c) - Ux.s & 0 \\ UxUz(1-c) - Uy.s & UyUz(1-c) + Ux.s & Uz^2 + c.(1 - Uz^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prendre $\overrightarrow{U'} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,\ 1,\ 0)$ et θ=π/3

### 3.2.5 Exercice : rotation $\vec{U} = (1,\ 1,\ 1)$, angle θ=20°

Soit la rotation R autour de l'axe de vecteur directeur $\vec{U} = (1,\ 1,\ 1)$, et d'angle θ=20°

1. Quel est le quaternion unitaire représentant cette rotation ? (donner les notations (a, $\vec{V}$) et q=a+bi+cj+dk)
2. En déduire la matrice de rotation associée à ce quaternion
3. Comparer avec la matrice générale de la rotation R d'angle θ autour d'un axe de vecteur directeur unitaire (Ux, Uy, Uz) en coordonnées cartésiennes. Expliciter le raisonnement.

**Correction**

SCILAB a=cosd(10) ; b=c=d=sind(10)/sqrt(3)

A=[a^2+b^2-c^2-d^2,2*b*c-2*a*d,2*a*c+2*b*d;2*a*d+2*b*c,a^2-b^2+c^2-d^2,2*c*d-2*a*b;2*b*d-2*a*c,2*a*b+2*c*d,a^2-b^2-c^2+d^2]

a=0,9848

b=c=d=0,100

```
-->A
 A  =

    0.9597951  - 0.1773630    0.2175679
    0.2175679    0.9597951  - 0.1773630
  - 0.1773630    0.2175679    0.9597951
```

### 3.2.6 Exercice : $\vec{U} = (0, 2, 1)$, angle θ=70°

Soit la rotation R autour de l'axe de vecteur directeur $\vec{U} = (0,2,1)$, et d'angle θ=70°

1. Quel est le quaternion unitaire représentant cette rotation ? (donner les notations (a, $\vec{V}$) et q=a+bi+cj+dk)
2. En déduire la matrice de rotation associée à ce quaternion
3. Comparer avec la matrice générale de la rotation R d'angle θ autour d'un axe de vecteur directeur unitaire (Ux, Uy, Uz) en coordonnées cartésiennes issue de la formule de Rodrigues. Expliciter le raisonnement.

**Correction**

Il faut normer $\vec{U}$ et créer un vecteur directeur unitaire de l'axe de rotation

Soit

$$\vec{U}' = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1)$$

Notation (a,V) : a = cos(35°) et V = sin(35°).$\vec{U}'$

Notation (a,b,c,d)

$$\begin{cases} a = \cos(35°) \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{\sqrt{5}}.2.\sin(35°) \\ d = \frac{1}{\sqrt{5}}.\sin(35°) \end{cases}$$

**Matrice de rotation**

```
A  =

   0.3420201  - 0.4202433    0.8404866
   0.4202433    0.8684040    0.2631919
 - 0.8404866    0.2631919    0.4736161
```

### 3.2.7 Exercice : $\vec{U} = (1, 2, 1)$, angle θ=60°

Soit la rotation autour de l'axe de vecteur directeur $\vec{U} = (1,2,1)$, et d'angle θ=60°

1. Quel est le quaternion unitaire représentant cette rotation ? (donner les notations (a, $\vec{V}$) et q=a+bi+cj+dk)
2. En déduire la matrice de rotation associée à ce quaternion
3. Comparer avec la matrice générale de la rotation d'angle θ autour d'un axe de vecteur directeur unitaire (Ux, Uy, Uz) en coordonnées cartésiennes. Expliciter le raisonnement.

**Correction**

Il faut normer $\vec{U}$ et créer un vecteur directeur unitaire de l'axe de rotation

Soit

$$\vec{U}' = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$$

Notation (a,V) : a = cos(30°) et V = sin(30°).$\vec{U}'$

Notation (a,b,c,d)

$$\begin{cases} a = \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ b = \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{6}} \\ c = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ d = \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

Matrice de rotation

```
A  =

   0.5833333  - 0.1868867    0.7904401
   0.5202201    0.8333333  - 0.1868867
 - 0.6237734    0.5202201    0.5833333
```

### 3.2.8 Exercice : rotation $\vec{U} = (-1, 2, 1)$, angle θ=40°

Soit la rotation R autour de l'axe de vecteur directeur $\vec{U} = (-1,2,1)$, et d'angle θ=40°

1. Quel est le quaternion unitaire représentant cette rotation ? (donner les notations (a, $\vec{V}$) et q=a+bi+cj+dk)
2. En déduire la matrice de rotation associée à ce quaternion. Donner les éléments de la matrice avec des valeurs approchées.

## 3.3 QCM

Pour les matrices de transformation (rotation, translation...), en formulation transposée, les compositions de transformations se font en multipliant le vecteur initial par

a/ les matrices de transformations dans le même ordre que l'ordre d'application des transformations

b/ les matrices de transformations dans l'ordre inverse de l'ordre d'application des transformations

c/ peu importe l'ordre de multiplication des matrices

Exprimer les matrices de transformation en coordonnées homogènes permet de

a/ exprimer toutes les transformations élémentaires de l'espace, même les translations

b/ inverser l'ordre de multiplication des matrices lors de la composition de transformations c/ simplifier l’expression des matrices de rotation

d/ diminuer la taille des matrices

Les symétries par-rapport à un axe sont les seules transformations que l’on ne peut pas exprimer sous forme de matrice

a/ vrai

b/ faux

Connaissant les termes d’une matrice de rotation, on peut retrouver son axe et son angle de rotation au signe près

a/ vrai

b/ faux