# Mathématiques

-

## Développements limités

Frédéric Menan

fmenan@cesi.fr

# Table des matières

# 1 Introduction : petite activité ludique

Calculer, pour i entier de 1 à 10 :

$$0{,}02^{i}$$

Script Python :

```
print('Calcul de 0.02^i pour i entier de 1 à 10')
for i in range(11):
    print("pour i=", i, "on obtient", 0.002**i)
```

On voit que chaque terme $0{,}02^{i+1}$ est très inférieur à $0{,}02^{i}$.

Le raisonnement pour $0{,}002$ ou $0{,}0002$ est encore plus édifiant !

Finalement, lorsque x tend vers 0, on ne sera pas perturbé d’écrire que $x + x^2 + x^3 + 2x^4$ peut s’écrire $x + x^2 + o(x^2)$, avec $o(x^2)$ une fonction de x négligeable devant x.

# 2 Définition

On dit que f admet un développement limité (DL) d'ordre n en 0 s'il existe un polynôme $P_n$ de degré inférieur ou égal à n et une fonction ε définie au voisinage de 0 tels que :

$$\begin{cases} f(x) = P_n(x) + x^n.\varepsilon(x) \\ \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

Exemple

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$P_n(x)$ est appelée partie régulière ou partie principale du DL.

$x^n.\varepsilon(x)$ est appelé reste d'ordre n et souvent écrit $R_n(x)$.

On écrit aussi

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) = P_n(x) + R_n(x)$$

Pour un DL d'ordre 1, on parle aussi d'approximation linéaire ou d'approximation affine.

Exemple

Soit le DL $2 + 3x - 7x^3 + x^5.\varepsilon(x)$. L'ordre de ce développement limité est 5.

Exemple

Le développement limité en 0 de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ est :

$$\frac{1}{1+x} =_{x \to 0} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n.x^n + o(x^n)$$

On reconnait en effet la somme des termes d'une suite géométrique de raison –x et de premier terme 0.

Script Python pour le calcul des DL d'ordre 1 et 10 de f(x) pour x=0,002

```
import math
x=0.002
print('1/(1+x) a pour valeur',1/(1+x))
dl=1
for i in range(10):
    dl=dl+((-1)**(i+1))*x**(i+1)
    print('ordre',i+1,'valeur du DL',dl)
```

Le polynôme $P_n$ est unique. En effet, supposons qu'il existe deux polynômes Pn et Qn de degré n tels que au voisinage de 0.

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) = Q_n(x) + o(x^n)$$

Le polynôme Pn-Qn est de degré au plus n et négligeable devant $x^n$ au voisinage de 0 donc il est nul.

Si f admet un DL à l'ordre n en 0 alors f admet une limite en 0. Cette limite est $a_0$.

Par ailleurs, si f n'admet pas de limite finie en 0, alors on ne peut pas calculer de DL pour cette fonction en 0.

# 3 Formule de Taylor

On rappelle ci-dessous deux théorèmes essentiels.

## 3.1 Théorème de Rolle

Soit f de [a,b] dans $\mathbb{R}$ continue sur [a,b], dérivable sur ]a,b[ et telle que

$$f(a) = f(b)$$

Alors il existe un c de ]a,b[ tel que

$$f'(c) = 0$$

## 3.2 Théorème des accroissements finis

Soit f de [a,b] dans $\mathbb{R}$ continue sur [a,b], dérivable sur ]a,b[ et soit g telle que

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.(x - a)$$

g est continue sur [a;b], dérivable sur ]a,b[

De plus

$$g(a) = 0$$

$$g(b) = 0$$

Donc d'après le théorème de Rolle, il existe un c de ]a,b[ tel que

$$g'(c) = 0$$

Donc

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

## 3.3 Formule de Taylor

**Théorème (Formule de Taylor-Lagrange) :**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f$ une fonction numérique de classe $C^{n+1}$ sur l'intervalle $[a, b]$. Alors,

$$\exists c \in ]a, b[, f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

**Démonstration de *Christine Graffigne et Avner Bar-Hen***

**Démonstration :**

**Pour** $n = 0$ **:**

$\exists c \in ]a, b[, f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$, c'est le théorème des accroissements finis.

**Pour** $n=1$ **:**

$\exists c \in ]a,b[, f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c)$, il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à

$$\phi(t) = f(b) - f(t) - (b-t)f'(t) - A(b-t)^2/2$$

où $A$ est choisi de manière que $\phi(a) = \phi(b)(=0)$.

$\phi$ est de classe $C^1$ puisque $f$ est de classe $C^2$ et

$$\phi'(t) = -f'(t) + f'(t) - (b-t)f''(t) + A(b-t) = -(b-t)f''(t) + A(b-t) = (b-t)(A - f''(t))$$

D'après le théorème de Rolle : $\exists c \in ]a,b[, \phi'(c) = 0$ et on a donc $A = f''(c)$. D'où on déduit

$$\phi(a) = f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - f''(c)(b-a)^2/2 = \phi(b) = 0$$

c'est-à-dire $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + f''(c)(b-a)^2/2$.

**Pour** $n$ **entier :**

On applique le théorème de Rolle à

$$\phi(t) = f(b) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - A\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où $A$ est choisi de manière que $\phi(a) = \phi(b)(=0)$.

$\phi$ est de classe $C^1$ puisque $f$ est de classe $C^{n+1}$ et

$$\phi'(t) = -\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + A\frac{(b-t)^n}{n!}$$

D'après le théorème de Rolle : $\exists c \in ]a,b[, \phi'(c) = 0$ et on a donc $A = f^{(n+1)}(c)$.

## 3.4 Formule de Taylor-Young

Soit f fonction de classe $C^n$ sur un intervalle I contenant $x_0$. Alors pour tout x de I

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + (x-x_0)^n . \varepsilon(x)$$

Avec

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

## 3.5 Formule de Taylor-Mac Laurin

Soit $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + (x)^n . \varepsilon(x)$$

Avec

$$\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

## 3.6 Application au calcul des DL

En appliquant la formule de Taylor-Young en 0

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^n(0) + (x)^n.\varepsilon(x)$$

On peut déterminer le développement limité au voisinage de 0 des fonctions dérivables n fois.

Par exemple,

$$f(x) = e^x$$

La dérivée n-ième de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle, pour tout donc :

Pour tout n, $f^n(0) = 1$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

# 4 Propriétés et Opérations sur les DL

## 4.1 Troncature

Si f admet un développement limité à l'ordre n,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x)$$

Alors f admet un développement limité à l'ordre p≤n tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + x^p \varepsilon_p(x)$$

On dit que ce développement est obtenu en tronquant à l'ordre p le développement donné.

## 4.2 DL d'une fonction paire / impaire

Le DL d'une fonction paire ne contient que des termes d'exposant pair.

Le DL d'une fonction impaire ne contient que des termes d'exposant impair.

## 4.3 Somme

Soient

- I un intervalle contenant 0
- n un entier
- f et g deux fonctions définies sur I admettant chacune un DL d'ordre n en 0

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

$$g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

Alors la fonction f+g admet un DL en 0. Son polynôme de Taylor est P+Q.

**Exemple**

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Or

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n . \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Donc

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

## 4.4 Produit

Soient

- I un intervalle contenant 0
- n un entier
- f et g deux fonctions définies sur I admettant chacune un DL d'ordre n en 0

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

$$g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

La fonction f.g admet un DL en 0. Son polynôme de Taylor est l'ensemble des termes de degré ≤n dans le produit PnQn.

**Exemple**

$$f(x) = \sin(x) \, . \, e^x$$

On cherche le DL de f en 0 à l'ordre 5.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n . x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)$$

Il suffit de développer et ne garder que les termes d'ordre inférieur ou égal à 5.

$$f(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{30}x^5 + o(x^5)$$

## 4.5 Quotient

Soient f et g deux fonctions qui admettent des DL à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_1(x)$$

$$g(x) = Q(x) + x^n \varepsilon_2(x)$$

Avec $Q(0) \neq 0$, alors f/g admet un DL à l'ordre n en 0 :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = A(x) + x^n \varepsilon_3(x)$$

Où A est le quotient de la division de P par Q suivant les puissances croissantes à l'ordre n.

**Exemple**

On demande le DL de la fonction ci-dessous, on 0 à l'ordre 3

$$h(x) = \frac{e^x}{1 + sinx}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)$$

Avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$

$$1 + \sin(x) = 1 + x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x)$$

Avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$

Avec la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 on a

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + x - \frac{x^3}{6}\right) + x^4.\left(\frac{1}{6} + \frac{x}{12} - \frac{x^2}{36}\right)$$

Finalement,

$$h(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

Avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

**<u>Exemple</u>**

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n.x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n.x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

Donc

$$\begin{array}{c|c}
x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \cline{2-2}
-x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{24} & x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \\ \cline{1-1}
0 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 & \\
-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^5 & \\ \cline{1-1}
\frac{2}{15}x^5 &
\end{array}$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$$

<u>Remarque sur le quotient de deux polynômes</u>

Si A et B sont deux polynômes avec B non nul, alors il existe deux polynômes Q et R appelés quotient et reste, tels que

$$A = Q.B + R$$

Q et R forment un couple unique. De plus, $\deg(R) < \deg(B)$.

http://exo7.emath.fr/cours/ch_polynome.pdf

## 4.6 Composée

Soient

- I un intervalle contenant 0
- n un entier
- f et g deux fonctions définies sur I admettant chacune un DL d'ordre n en 0

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

$$g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

Si g(0)=0, $fog$ admet un DL en 0.

Son polynôme de Taylor est l'ensemble des termes de degré ≤n dans $P_n o Q_n$ .

**Exemple**

Développement limité de la fonction $sin^2(x)$ en 0 à l'ordre 4. Le développement limité de la fonction sin est :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

Donc

$$\sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + o(x^4)$$

Dans l'expression obtenue en développant le terme au carré, on ne garder que les termes de degré inférieur à égal à 4. Finalement,

$$\sin^2(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

## 4.7 Dérivée, primitive

Soient

- I un intervalle contenant 0
- n un entier

- f fonction dérivable n-1 fois sur I, dont la dérivée à l'ordre n existe en 0, Pn est son polynôme de Taylor

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

Alors

Sa dérivée f' admet un DL d'ordre n-1 en 0. Son polynôme de Taylor est la dérivée de Pn.

$$f'(x) = P_n{}'(x) + o(x^{n-1})$$

Toute primitive de f admet un DL d'ordre n+1 en 0.

Leur polynôme de Taylor est une primitive de celui de f.

**Exemple**

$$f(x) = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

Alors

$$f'(x) = -1 + 2x + o(x)$$

Soit F une primitive de f alors

$$F(x) = F(0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

**Exemple**

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + .. + (-1)^n . x^{2n} + x^{2n} . \varepsilon(x)$$

Donc par intégration

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n . \frac{x^{2n+1}}{n+1} + x^{2n+1} . \varepsilon(x)$$

# 5 Développements limités ailleurs qu'en 0

## 5.1 Développement limité en a

Soit une fonction f définie sur un voisinage V d'un réel $x_0$.

On dit que f possède un développement limité à l'ordre n en $x_0$ s'il existe :

- Un polynôme $P_n$ de degré inférieur ou égal à n
- Une fonction $\varepsilon$ définie sur V

Tels que

$$\forall x \in V, \qquad f(x) = P_n(x - x_0) + (x - x_0)^n . \varepsilon(x)$$

Avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Exemple

Développement limité à l'ordre 4 de $e^x$ au voisinage de 1

$$e^x = e\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24}\right) + (x-1)^4 \epsilon(x-1).$$

## 5.2 Développement limité en $\pm\infty$

Soit f définie sur un voisinage V de $+\infty$.

On dit que f possède un développement limité à l'ordre n en $+\infty$ s'il existe

- Un polynôme $P_n$ de degré inférieur ou égal à n
- Une fonction $\varepsilon$ définie sur V

Tels que

$$\forall x \in V, \qquad f(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^n} . \varepsilon(x)$$

Avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0.$

Même raisonnement en $-\infty$.

Exemple

On cherche le DL à l'ordre 4 de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

Soit

$$y = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{y^2}{y^2 - y - 1} = -y^2 + y^3 - 2y^4 + y^4.\varepsilon(y)$$

Avec $\lim_{y \to 0} \varepsilon(y) = 0$.

Donc

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^4}.\varepsilon(x)$$

Avec $\lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$.

# 6 Utilisation des DL pour l'étude des fonctions

## 6.1 Calcul de limites et levées de formes indéterminées

Les développements limités sont un outil très puissant pour lever les formes indéterminées des limites d'une fonction.

### 6.1.1 Exemple d'utilisation des DL pour le calcul de limites

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}$$

Avec les développements limités

$$e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

Donc

$$\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}=\frac{1+x^2-1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}=\frac{3}{2}$$

## 6.2 Détermination de la position par rapport à la tangente

### 6.2.1 Rappel

Soit f une fonction continue et dérivable en a. L'équation de la tangente à la courbe de f est

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

### 6.2.2 Exemple 1

On rappelle le DL en 0 de la fonction cosinus

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^n.x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$$

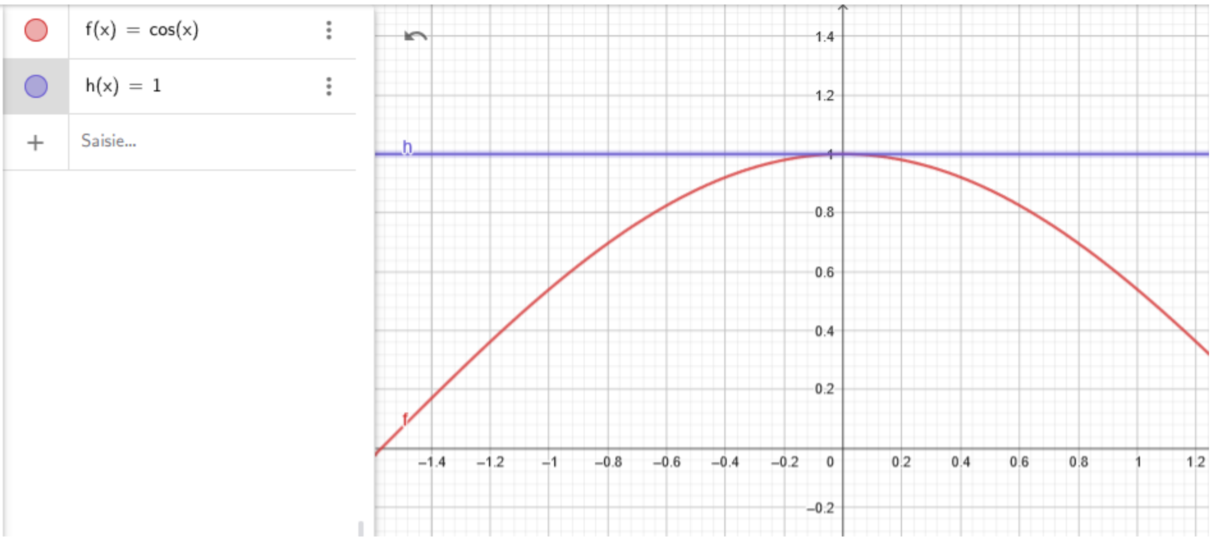
La tangente à la courbe de cosinus en 0 a pour équation :

$$y=f'(0).(x-0)+f(0)=1$$

Or d'après le DL de la fonction cosinus en 0 :

$$\cos(x)-1=-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\leq 0$$

Donc en 0 la courbe de la fonction cosinus est en-dessous de sa tangente.




### 6.2.3 Exemple 2

On rappelle le DL en 0 de la fonction sinus.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n . x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

La tangente à la courbe de sinus en 0 a pour équation :

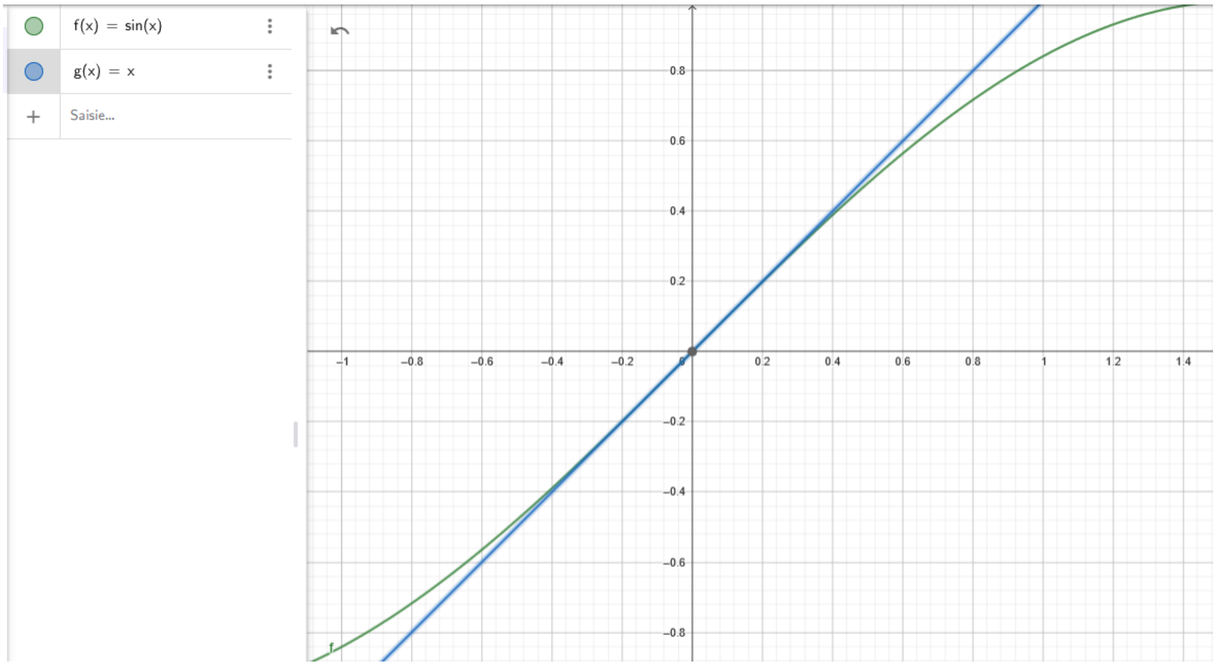
$$y = f'(0).(x-0) + f(0) = x$$

Or d'après le DL de la fonction cosinus en 0 :

$$\sin(x) - \mathrm{x} = -\frac{x^3}{3!} o(x^3)$$

$$\begin{cases} \sin(x) - \mathrm{x} > 0 \text{ pour } \mathrm{x} < 0 \\ \sin(x) - \mathrm{x} < 0 \text{ pour } \mathrm{x} > 0 \end{cases}$$

Donc en 0 la courbe de la fonction sinus est au-dessus de sa tangente en x<0 puis elle passe au-dessus de sa tangente pour x>0.




### 6.2.4 Généralisation

Soit

$$x = a + h$$

$$x_0 = a$$

$$f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \frac{h^n}{n!}.f^n(a) + o(a+h)^n$$

Tangente en a :

$$y(x) = f'(a).x + C$$

Or la tangente a pour valeur f(a) en a (définition de la tangente)

$$C = f(a) - f'(a).a$$

Donc

$$y(x) = f'(a).x + f(a) - f'(a).a$$

Donc

$$f(a+h) - y(a+h)$$
$$= f(a) + h.f'(a) + \frac{h^n}{n!}.f^n(a) + o(a+h)^n - f'(a).(a+h) - f(a) + f'(a).a$$

$$f(a+h) - y(a+h) = \frac{h^n}{n!}.f^n(a) + o(a+h)^n$$

Si n est pair, $h^n \geq 0$ donc position de la tangente dépend du signe de $f^n(a)$

Si n est impair, la tangente passe à travers de la courbe

## 6.3 Etude des asymptotes

### 6.3.1 Exemple

Soit la fonction

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2 + x^4}$$

On montre que le DL en $\pm\infty$ de f est :

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x^2} + \frac{1}{x^2}.\varepsilon\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Soit P la courbe d'équation $y = x^2 + \frac{1}{2}$ alors

$$f(x) - y = \frac{3}{8x^2} + \frac{1}{x^2}.\varepsilon\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Donc

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - y = 0$$

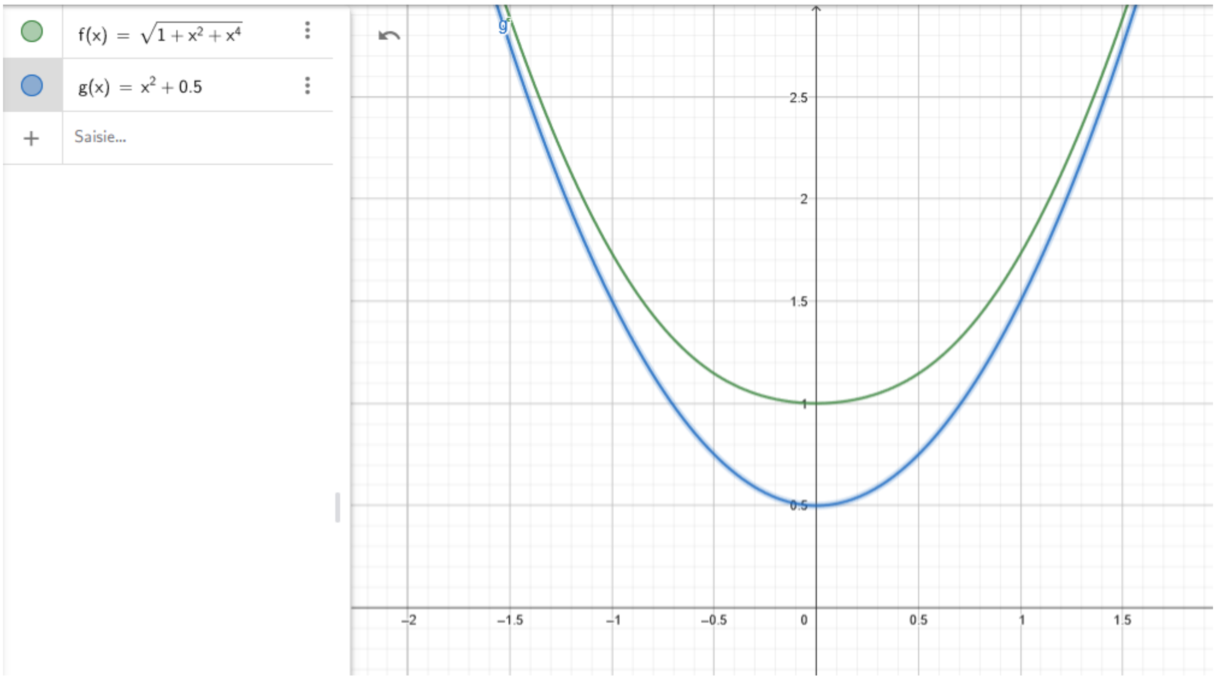
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - y = 0$$

P est asymptote à la courbe de f en $\pm\infty$

De plus,

$$f(x) - y \geq 0$$

Donc la courbe de f est au-dessus de P.



# 7 Formulaire

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n . x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n . x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha . x + \frac{\alpha . (\alpha - 1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha . (\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)}{n!} . x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n . x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

# 8 Exercices

### 8.1.1 Exercice : calcul de DL

En appliquant la formule de Taylor en 0,

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^n(0) + (x)^n.\varepsilon(x)$$

Déterminer le DL au voisinage de 0 des fonctions suivantes

$$e^x$$

$$\cos(x)$$

**Correction**

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n.x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

### 8.1.2 Exercice : calcul de DL

Déterminer le développement limité en 0 de la fonction :

$$\ln(1+x)$$

à partir du DL donné ci-dessous

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

**Correction**

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

Donc

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n.x^n + o(x^n)$$

Par intégration

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n.x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

### 8.1.3 Exercice : calcul de DL

Donner un développement limité à l’ordre 4, au voisinage de x=0, de

$$f(x) = (1 + sinx)^x$$

**Correction**

$$sinx = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

$$\ln(1 + sinx) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) + \frac{\left(-\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right)^2}{2} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

$$x.\ln(1 + sinx) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + x^4\varepsilon(x)$$

$$e^{x.\ln(1+sinx)} = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + x^4\varepsilon(x) + \frac{\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + x^4\varepsilon(x)\right)^2}{2}$$

$$e^{x.\ln(1+sinx)} = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{2} + x^4\varepsilon(x)$$

$$(1 + sinx)^x = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{2}{3}x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

### 8.1.4 Exercice : calcul de DL

Donner le DL en 0 de la fonction

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

**Correction**

Partant du développement limité de la fonction exponentielle,

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

### 8.1.5 Exercice : calcul de DL

Déterminer le développement limité en 0 de la fonction :

$$\sqrt{1 + x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x}}$$

**Correction**

On a une fonction de la forme $(1 + x)^p$ avec p=1/2.

Or

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha.x+\frac{\alpha.(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha.(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.x^n+o(x^n)$$

Donc

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}.x^n+o(x^n)$$

De même,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\cdots+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}.x^n+o(x^n)$$

### 8.1.6 Exercice : calculs de limites

Calculer les limites ci-dessous

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos(x)-x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x-x^2.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-e^x)sinx}{x^2+x^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}$$

**Correction**

Au voisinage de 0

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o_1(x^2)$$

$$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+o_2(x^2)$$

Donc

$$\frac{e^x-\cos(x)-x}{x^2} = \frac{1+x+\frac{x^2}{2}-1+\frac{x^2}{2}-x+o_1(x^2)-o_2(x^2)}{x^2} = 1+o_1(x^2)-o_2(x^2)$$

Donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos(x)-x}{x^2} = 1}$$

Au voisinage de 0

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Donc

$$lim = \frac{x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + 1\right) - 2\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 1\right)}{x^3} = \frac{x + x^2 + \frac{x^3}{2} + x - 2 - 2x - x^2 - \frac{x^3}{3} + 2}{x^3}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} = \frac{\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3}}{x^3} = \frac{1}{6}}$$

Avec le développement limité en 0 de la fonction ln

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{x}\right)^3 + x^3.\varepsilon(x)$$

Donc

$$x^2.\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{2} + x^5.\varepsilon(x)$$

$$\lim_{x\to +\infty} x - x^2.\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1 - e^x)sinx}{x^2 + x^3} = -1}$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \frac{1 + x^2 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \frac{3}{2}}$$

### 8.1.7 Exercice : approximation affine

Donner une approximation affine au voisinage de 0 des fonctions :

$$e^x$$

$$\sin(x)$$

$$\cos(x)$$

$$\tan(x)$$

$$\ln(1+x)$$

$$\frac{1}{1-x}$$

## Correction

$$e^x \approx 1+x$$

$$\sin(x) \approx x$$

$$\cos(x) \approx 1$$

$$\tan(x) \approx x$$

$$\ln(1+x) \approx x$$

$$\frac{1}{1-x} \approx 1+x$$

### 8.1.8 Exercice : linéarisation d'équations

Les équations ci-dessous sont des équations du mouvement de systèmes mécaniques divers.

Linéariser ces équations pour θ, ϕ, α, $\dot{\alpha}$, β et $\dot{\beta}$ au voisinage de 0

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}.sin\theta = 0$$

$$\frac{16}{3}\ddot{\alpha} + 2\ddot{\beta}\cos(\beta-\alpha) - 2\dot{\beta}^2.\sin(\beta-\alpha) + \frac{3g}{a}sin\alpha = 0$$

$$\frac{4}{3}\ddot{\beta} + 2\ddot{\alpha}\cos(\beta-\alpha) + 2\dot{\alpha}^2.\sin(\beta-\alpha) + \frac{g}{a}sin\beta = 0$$

$$(R-r).(I+mr^2).\ddot{\varphi} + mgr^2 sin\varphi = 0$$

$$[m.(R^2+a^2+2aRcos\theta)+B^*].\ddot{\theta} - maR.sin\theta.\dot{\theta}^2 - mgasin\theta = 0$$

## Correction

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}.\theta = 0$$

$$(R-r).(I+mr^2).\ddot{\varphi} + mgr^2.\varphi = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{B}{A}\theta = 0$$

Avec $A = m.(a+R)^2 + B^*$ et $B = -mga$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2\ddot{\alpha} + \frac{4}{3}\ddot{\beta} + \frac{g}{a}\beta = 0 \\ 2\ddot{\beta} + \frac{16}{3}\ddot{\alpha} + \frac{3g}{a}\alpha = 0 \end{array}}$$

### 8.1.9 Exercice : position par-rapport à la tangente

On donne le développement limité à l'ordre 4 de $e^x$ au voisinage de 1 :

$$e^x = e\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24}\right) + (x-1)^4\epsilon(x-1)$$

.

Etudier en ce point la position de la courbe exponentielle par-rapport à sa tangente

## Correction

Tangente en x=1 :

$$y(x) = e.x$$

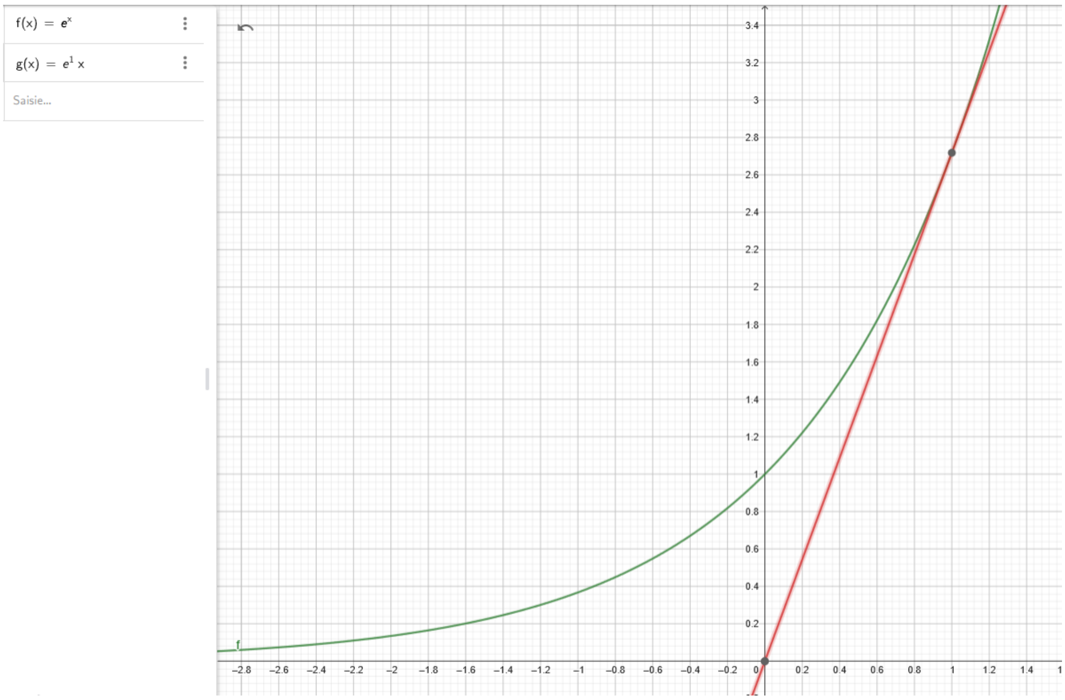
On a

$$e^x - y(x) = e.\left(x + \frac{(x-1)^2}{2} + o(x^2)\right) - e.x = \frac{(x-1)^2}{2} + o(x^2)$$

Donc au voisinage de 1,

$$e^x - y(x) \geq 0$$

La fonction $e^x$ est au-dessus de sa tangente en x=1




### 8.1.10 Exercice : étude d'une asymptote

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}.e^{\frac{1}{x}}$$

Etudier les asymptotes de f en $\pm\infty$

## Correction

On peut écrire le DL de f en l'infini

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}.e^{\frac{1}{x}} = \frac{x^2}{x+1}.\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6}.\frac{x^3}{3}+x^3.\varepsilon(x)\right)$$

$$f(x) = \frac{x^2+x+\frac{1}{2}}{x+1} = \frac{x(x+1)+\frac{1}{2}}{x+1} = x+\frac{1}{2}.\frac{1}{x+1}$$

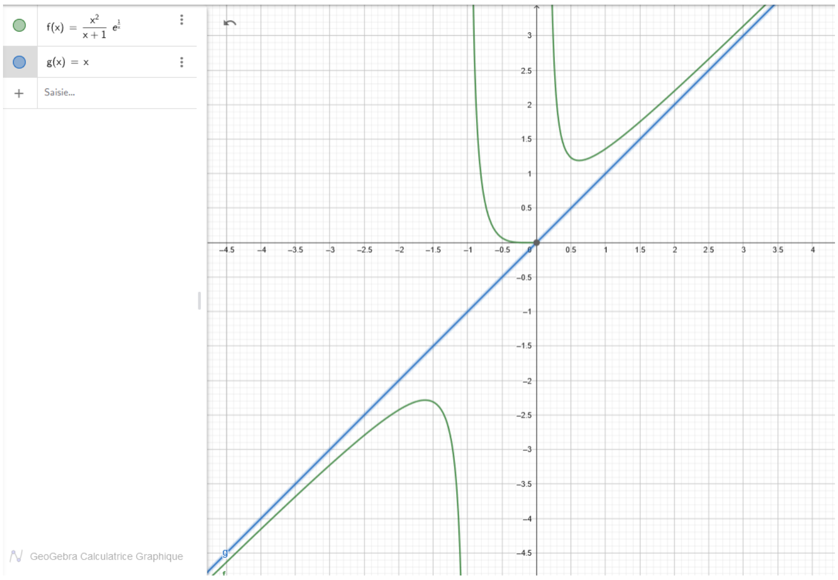
Finalement,

$$f(x)-x = \frac{1}{2}.\frac{1}{x+1}$$

La courbe de f a pour asymptote y=x en $\pm\infty$.

De plus, en $-\infty$, $\frac{1}{2}.\frac{1}{x+1} < 0$ donc la courbe de f est en-dessous de y=x

Elle est au-dessus en $+\infty$, par le même raisonnement.



# 9 Références bibliographiques

https://www.geogebra.org/graphing

[1]

[2]

[1] S. Belhaj et A. Ben Aïssa, *Mathématiques pour l'informatique: cours et exercices corrigés licence 1 & 2 informatique*. Paris: Vuibert, 2013.

[2] J. Vélu, *Mathématiques générales: cours et exercices corrigés*. Malakoff (Hauts-de-Seine): Dunod, 2020.