Mathématiques

-

Opérateurs vectoriels

Frédéric Menan

fmenan@cesi.fr

11/2024

Table des matières

1 Opérateurs vectoriels

1.1 Champ scalaire

Un champ scalaire f est une fonction de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. C'est une fonction à plusieurs variables.

$$M(x, y, z) \to f(x; y; z)$$

Un champ scalaire associe une valeur scalaire à tout point de l'espace.

Exemples : à chaque point de l'espace on peut associer la température du milieu ambiante, la pression, la masse volumique…etc.

1.2 Champ vectoriel

Un champ vectoriel $\vec{A}$ (ou champ de vecteurs) est une fonction de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

En coordonnées cartésiennes on écrit

$$M(x, y, z) \to \vec{A}(M) \begin{cases} A_x(x, y, z) \\ A_y(x, y, z) \\ A_z(x, y, z) \end{cases}$$

Un champ scalaire associe un vecteur à tout point de l'espace.

Exemples : à chaque point de l'espace on peut associer la vitesse, l'accélération, le champ magnétique, le champ de pesanteur….etc.

1.3 Opérateur nabla

L'opérateur nabla dans un repère cartésien porté par les vecteurs de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ a pour définition

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Cet opérateur va nous permettre de définir les quatre opérateurs aux dérivées partielles ci-dessous.

1.3.1 Gradient

1.3.1.1 Définition et interprétation physique

Soit f un champ scalaire défini dans $\mathbb{R}$.

On appelle gradient de f (noté $\overrightarrow{grad} f$), le champ vectoriel défini dans $\mathbb{R}^3$ par:

$$\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla} f$$

Le gradient de la fonction scalaire f est aussi défini par :

$$df = \overrightarrow{grad} f . d\overrightarrow{OM}$$

Composantes cartésiennes :

$$\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{z} = \begin{pmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \\ f_{,3} \end{pmatrix}$$

Le gradient indique de quelle façon une grandeur physique varie dans l'espace.

1.3.1.2 Exemples

Densité de flux de chaleur en thermique

La densité de flux de chaleur φ peut être déterminée par la loi de Fourier : cette loi donne le lien entre la densité de flux thermique et le gradient de température lors des échanges thermiques par conduction (Figure 1).

$$\vec{\varphi} = -\lambda \, \overrightarrow{grad} \, T$$

λ (parfois k) : conductivité thermique en $\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$

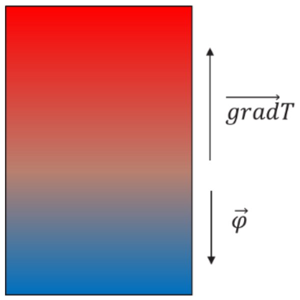


Figure 1

Application à la conduction dans un mur (1 dimension)

$$\vec{\varphi} = -\lambda \, \overrightarrow{grad} \, T$$

Prix du m² dans le département de Charente Maritime

$$\overrightarrow{grad}€ = \frac{\partial €}{\partial x}\vec{x} + \frac{\partial €}{\partial y}\vec{y}$$

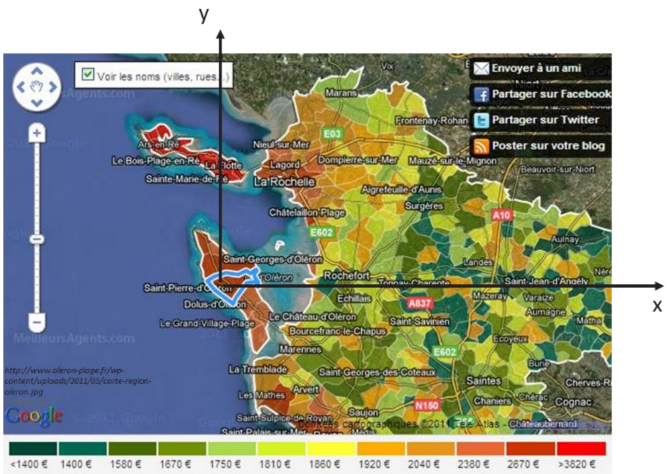
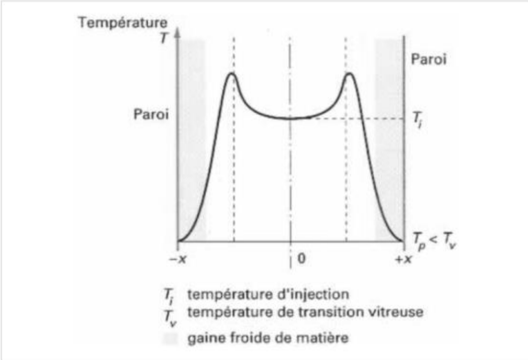


Figure 2

1.3.1.2.1 Gradient de température et de vitesse d'un polymère amorphe dans la section d'un canal non isotherme



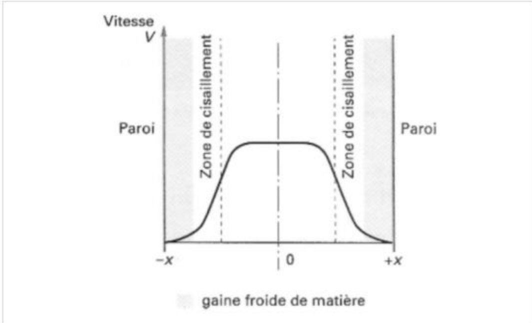


Figure 3. Référence Techniques de l'Ingénieur A 3 680

1.3.1.3 Tenseur gradient d'un champ de vecteurs

On définit également le gradient d'un champ vectoriel. On parle de tenseur gradient et l'objet mathématique qui représente ce tenseur gradient est une matrice.

Le tenseur gradient du champ vectoriel $\vec{V}$ est noté

$$\overline{\overline{grad}}\,\vec{V}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\overline{\overline{grad}}\,\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

1.3.2 Divergence d'une fonction vectorielle

1.3.2.1 Définition

On appelle divergence de $\vec{V}$ (notée div $\vec{V}$), le champ scalaire défini par:

$$div\,\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V}$$

<u>En coordonnées cartésiennes</u>

Soit $\vec{V} = u_1.\overrightarrow{x_1} + u_2.\overrightarrow{x_2} + u_3.\overrightarrow{x_3}$, alors la divergence de $\vec{V}$ est définie par

$$\boxed{div\,\vec{V} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}}$$

1.3.2.2 Signification physique

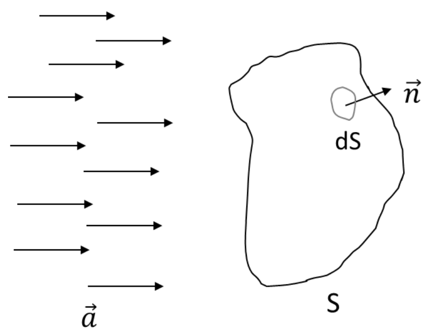
- Pré-requis : champ de vecteurs $\vec{a}$

Un champ de vecteurs (ou champ vectoriel) est une fonction qui associe un vecteur à chaque point de l'espace

- Pré-requis : flux d'un champ de vecteurs

Le flux élémentaire dϕ du champ de vecteurs $\vec{a}$ à travers une surface élémentaire dS de normale $\vec{n}$ est donné :

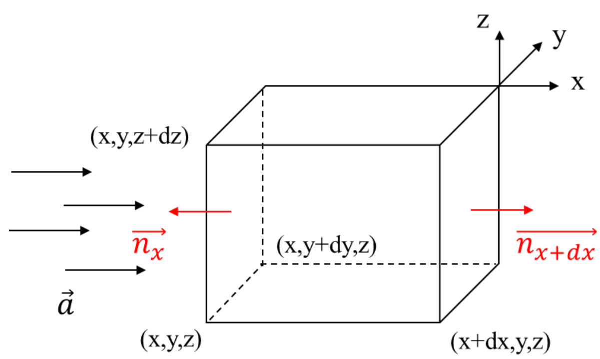
$$d\varphi = \vec{a}.\vec{n}.dS$$



Flux total à travers S :

$$\varphi = \iint_S \vec{a}.\vec{n}\,.dS$$

Soit maintenant un volume dV=dx.dy.dz



Soient les normales $\vec{n_x} = -\vec{x}$ et $\overrightarrow{n_{x+dx}} = \vec{x}$

Flux de $\vec{a}$ à travers la face de normale $\vec{n_x}$

$$\vec{a}(x,y,z).\vec{n_x}.dS = -a_x(x,y,z).dy.dz$$

Flux de $\vec{a}$ à travers la face de normale $\overrightarrow{n_{x+dx}}$

$$\vec{a}(x+dx,y,z).\overrightarrow{n_{x+dx}}.dS = a_x(x+dx,y,z).dy.dz$$

Somme des flux : $d\varphi = a_x(x+dx,y,z).dy.dz - a_x(x,y,z).dy.dz = \frac{\partial a_x}{\partial x}dx.dy.dz$

$$d\varphi = \frac{\partial a_x}{\partial x}dxdydz + \frac{\partial a_y}{\partial y}dxdydz + \frac{\partial a_z}{\partial z}dxdydz$$

donc

$$d\varphi = div\,\vec{a}.dV$$

donc

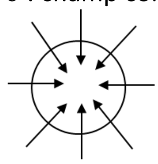
$$div\,\vec{a} = \frac{d\varphi}{dV}$$

Conclusion : la divergence d'un champ de vecteurs en un point M de l'espace représente le flux par unité de volume de ce champ à travers la surface délimitant une unité de volume en ce point.

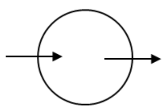
1.3.2.3 Interprétation

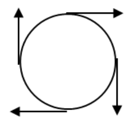
$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{a}} > 0$: champ divergent

$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{a}} < 0$: champ convergent



$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{a}} = 0$: champ constant : les flux sortant et entrants se compensent ou « tourbillonnent » autour du volume





1.3.2.4 Flux à travers une surface : Théorème de Green-Ostrogradski (ou théorème Flux-Divergence)

Soit V un volume délimité par une surface S.

On note $\vec{n}$ de composantes (n1; n2; n3), la normale à S orientée vers l'extérieur du volume V.

Le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\iiint_V div\,\vec{a}\,.\,dv = \iint_S \vec{a}.\vec{n}.dS$$

1.3.3 Rotationnel d'une fonction vectorielle

1.3.3.1 Définition

On appelle rotationnel de $\vec{V}$ (noté $\overrightarrow{rot}\vec{V}$), le champ vectoriel défini par:

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V_z}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial V_x}{\partial z} - \dfrac{\partial V_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Le vecteur rotationnel du vecteur $\vec{V}(u, v, w)$ est défini en coordonnées cartésiennes par

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

1.3.3.2 Signification physique

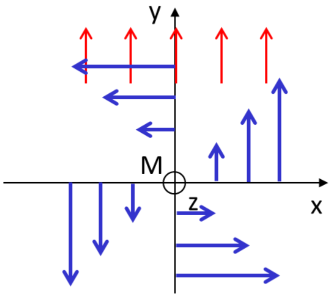
Soit le champ de vecteurs $\vec{V} = u.\vec{x} + v.\vec{y}$. $\vec{V}$ tourne-t-il autour de l'axe $\vec{z}$?

$\overrightarrow{rot}\,\vec{V}$ suivant $\vec{z}$: $\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$

Exemple 1

$\dfrac{\partial u}{\partial y} \neq 0$ $\dfrac{\partial v}{\partial x} \neq 0$

$\vec{V}$ tourne suivant $\vec{z}$ et $\overrightarrow{rot}\,\vec{V} \neq 0$ suivant $\vec{z}$



Exemple 2

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$

$\vec{V}$ ne tourne pas suivant $\vec{z}$ et $\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = 0$ suivant $\vec{z}$

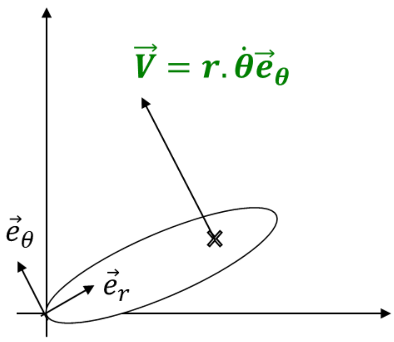
Le vecteur rotationnel, en un point M, d'un champ de vecteurs V indique la façon dont ce champ de vecteurs tourne autour de M.

1.3.3.3 Vecteur tourbillon

Pour caractériser la rotation d'un milieu, on définira parfois le vecteur tourbillon :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\vec{V}$$

Exemple : vecteur tourbillon d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe



$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{V}} = \left(\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathrm{V_z}}{\partial \theta} - \frac{\partial \mathrm{V}_\theta}{\partial \mathrm{z}}\right)\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{r} + \left(\frac{\partial \mathrm{V_r}}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial \mathrm{V_z}}{\partial \mathrm{r}}\right)\vec{\mathrm{e}}_\theta + \frac{1}{\mathrm{r}}\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}(\mathrm{rV}_\theta) - \frac{\partial \mathrm{V_r}}{\partial \theta}\right)\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{z}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r.V_\theta)}{\partial r} = \frac{1}{r}(V_\theta + r.\dot{\theta}) = \frac{1}{r}(r.\dot{\theta} + r.\dot{\theta}) = 2\dot{\theta}$$

Donc après simplification

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\vec{V} = \dot{\theta}.\vec{z}$$

On retrouve le vecteur rotation de la mécanique des solides indéformables.

1.3.3.4 Propriétés du rotationnel

$$\overrightarrow{rot}\ (\vec{u} + \lambda\vec{v}) = \overrightarrow{rot}\ (\vec{u}) + \lambda\,\overrightarrow{rot}\ (\vec{v})$$

$$\overrightarrow{rot}\left(f\vec{V}\right) = f\overrightarrow{rot}\left(\vec{V}\right) + \overrightarrow{grad}\left(f \wedge \vec{V}\right)$$

1.4 Laplacien

1.4.1 Laplacien d'une grandeur scalaire f

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

1.4.2 Laplacien d'une grandeur vectorielle

Soit le vecteur $\vec{v}$ de composantes (u,v,w) dans le repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\Delta\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{pmatrix}$$

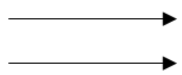
1.4.3 Classes de champs vectoriels

A l'aide de la divergence et du rotationnel, on peut définir 4 classes de champs vectoriels, suivant que la divergence et le rotationnel sont nuls ou non nuls.

$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{0}$ et $div\vec{V} = 0$

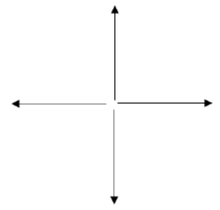
On parle de champ Laplacien

Exemples : champ électrique entre armatures d'un condensateur, écoulement laminaire dans un fluide incompressible.



$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \vec{0}$ et $div\vec{V} \neq 0$

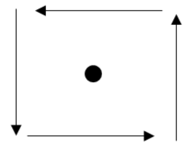
Ce type de champ contient une distribution spatiale de sources de flux. Exemples : nuage d'électrons entre deux électrodes, force gravitationnelle à l'intérieur d'une masse



$\overrightarrow{rot}\vec{V} \neq \vec{0}$ et $div\vec{V} = 0$

Ce type de champ « tourne » autour du point considéré.

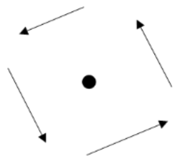
Exemples : champ magnétique dans un conducteur traversé par un courant continu, rotation d'un fluide incompressible.



$\overrightarrow{rot}\vec{V} \neq \vec{0}$ et $div\vec{V} \neq 0$

Ce champ peut être vu comme la somme d'un champ irrotationnel mais de divergence non nulle et un champ rotationnel mais de divergence nulle

Exemples : rotation d'un fluide compressible, électromagnétisme.



1.5 Formulaire

1.5.1 Relations usuelles

Soit f une fonction scalaire et $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs. Alors

$$div(f.\vec{a}) = f.div(\vec{a}) + \left(\overrightarrow{grad}f\right).\vec{a}$$

$$div\left(\overrightarrow{grad}f\right) = \Delta f$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}f\right) = \vec{0}$$

$$div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{a})\right) = 0$$

$$div\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \vec{b}.\overrightarrow{rot}(\vec{a}) - \vec{a}.\overrightarrow{rot}\left(\vec{b}\right)$$

$$\overrightarrow{rot}(f.\vec{a}) = f.\overrightarrow{rot}(\vec{a}) - \vec{a} \wedge \overrightarrow{grad}f$$

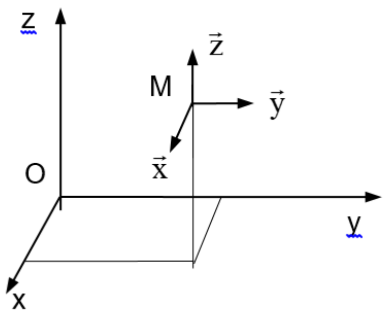
$$div(\Delta\vec{a}) = \Delta div(\vec{a})$$

1.5.2 Coordonnées Cartésiennes

Coordonnées :

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{cases}$$

Base orthonormée associée : $\vec{e}_1 = \vec{x}$; $\vec{e}_2 = \vec{y}$; $\vec{e}_3 = \vec{z}$



Soit la fonction scalaire f et le vecteur

$$\vec{V} = u.\vec{x} + v.\vec{y} + w.\vec{z}$$

Alors

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}.\vec{x} + \frac{\partial f}{\partial y}.\vec{y} + \frac{\partial f}{\partial z}.\vec{z}$$

$$div\,\vec{V} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = v_{i,i}$$

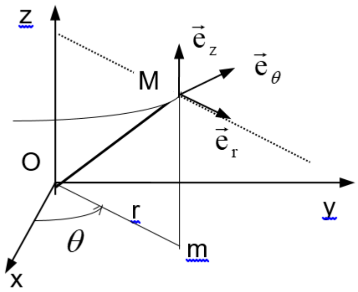
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

1.5.3 Coordonnées Cylindriques

Dans la base d'origine O, de repère $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$, les coordonnées d'un point M sont

$$\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{e_r} + \theta.\overrightarrow{e_\theta} + z.\overrightarrow{e_z}$$



Soit la fonction scalaire f et le vecteur $\vec{V} = V_r.\overrightarrow{e_r} + V_\theta.\overrightarrow{e_\theta} + V_z.\overrightarrow{e_z}$

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r}.\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}.\frac{\partial f}{\partial \theta}.\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}.\overrightarrow{e_z}$$

$$div\,\vec{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r}.\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \left(\frac{1}{r}.\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right).\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right).\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r.V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right).\overrightarrow{e_z}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}.\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}.\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

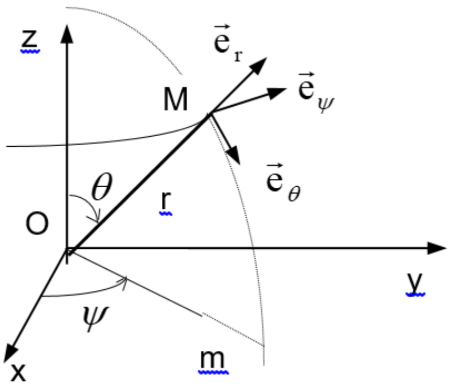
1.5.4 Coordonnées Sphériques

$$\begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = \theta \\ x_3 = \psi \end{cases}$$

Relations entre coordonnées sphériques et coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x = r.sin\theta.cos\psi \\ y = r.sin\theta.sin\psi \\ z = r.cos\theta \end{cases}$$

$\vec{e}_1 = \vec{e}_r$; $\vec{e}_2 = \vec{e}_\theta$; $\vec{e}_3 = \vec{e}_\psi$



$$\vec{V} = V_r.\overrightarrow{e_r} + V_\theta.\overrightarrow{e_\theta} + V_\psi.\overrightarrow{e_\psi}$$

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}.\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r.sin\theta}.\frac{\partial f}{\partial \psi}\overrightarrow{e_\psi}$$

$$div\vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2V_r) + \frac{1}{rsin\theta}.\frac{\partial}{\partial\theta}(V_\theta sin\theta) + \frac{1}{r.sin\theta}.\frac{\partial V_\psi}{\partial\psi}$$

$$\vec{\text{rot}}\ \vec{V} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r \sin\theta\ V_\psi\right) - \frac{\partial}{\partial\psi}\left(rV_\theta\right)\right)\vec{e}_r$$

$$+ \frac{1}{r \sin\theta}\left(\frac{\partial V_r}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r \sin\theta\ V_\psi\right)\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rV_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\psi$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}.\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2.\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2.sin\theta}.\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta.\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2.sin^2\theta}.\frac{\partial^2 f}{\partial\psi^2}$$

2 Exercices

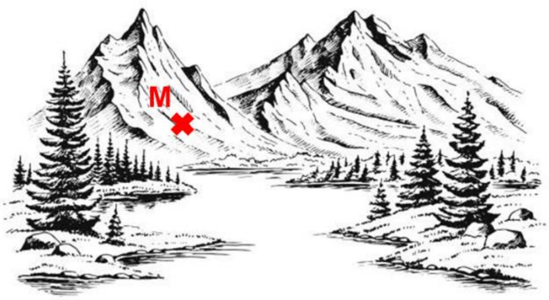
2.1 Exercice : la montagne

Soit la montagne ci-dessous et un point M de cette montagne.

Du point M, quand on monte verticalement, la température diminue de 0,01°C/m.

Pour tout point à la même altitude que M, la température est constante.

Proposer une base de l'espace pour modéliser le problème et écrire, au point M, le vecteur gradient de la température T dans cette base



(photo istock)

2.2 Exercice : propriétés du gradient

Soient α un réel, f et g deux fonctions différentiables, démontrer les propriétés suivantes :

$$\overrightarrow{grad}(f+g) = \overrightarrow{grad}\, f + \overrightarrow{grad}\, g$$

$$\overrightarrow{grad}(\alpha.f) = \alpha.\overrightarrow{grad}\, f$$

$$\overrightarrow{grad}(f.g) = f.\overrightarrow{grad}\, g + g.\overrightarrow{grad}\, f$$

On se placera en coordonnées cartésiennes.

2.3 Exercice : propriétés de la divergence

Soit f une fonction différentiable et α un réel. Soient $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ des champs de vecteurs différentiables.

Montrer que

$$div\left(\overrightarrow{V_1}+\overrightarrow{V_2}\right) = div\left(\overrightarrow{V_1}\right) + div\left(\overrightarrow{V_2}\right)$$

$$div\left(\alpha.\overrightarrow{V_1}\right) = \alpha.div\left(\overrightarrow{V_1}\right)$$

$$div\left(f.\overrightarrow{V_1}\right) = f.div\left(\overrightarrow{V_1}\right) + \overrightarrow{grad} f.\overrightarrow{V_1}$$

$$div\left(\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2}\right) = \overrightarrow{V_2}.\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{V_1}\right) - \overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{V_2}\right)$$

2.4 Exercice : rotationnel

Soit le champ de vecteurs

$$\vec{V}(x;y) = -y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$$

1/ Représenter ce champ de vecteurs en plusieurs points de l'espace

2/ Calculer le rotationnel de ce champ de vecteurs

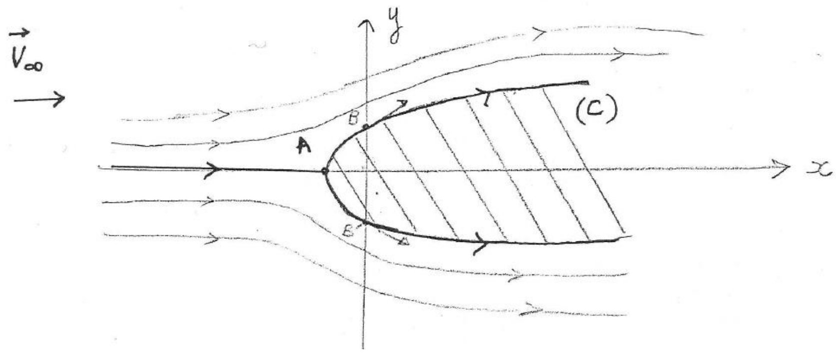
Correction

2/

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = 2\vec{k}$$

2.5 Exercice : écoulement autour d'un obstacle

On étudie, dans le repère (O,$\vec{x}$,$\vec{y}$) lié à une base orthonormée ($\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$), le mouvement d'un fluide autour d'un obstacle.



Dans le plan (O,$\vec{x}$,$\vec{y}$), le champ des vitesses, donné en représentation Eulérienne, peut s'exprimer en coordonnées cartésiennes (x,y) ou en coordonnées polaires (r, θ). Les composantes cartésiennes du champ des vitesses $\vec{V} = u.\vec{\imath} + v.\vec{\jmath}$ sont :

$$\vec{V}(x,y) = \begin{cases} u = U + \dfrac{D}{2\pi}.\dfrac{cos\theta}{r} \\ v = \dfrac{D}{2\pi}.\dfrac{sin\theta}{r} \end{cases}$$

D et U sont deux réels strictement positifs. En coordonnées polaires, on a :

$$\vec{V}(r,\theta) = \begin{cases} V_r = u.cos\theta + v.sin\theta = U.cos\theta + \dfrac{D}{2\pi r} \\ V_\theta = -u.sin\theta + v.cos\theta = -U.sin\theta \end{cases}$$

On sait que le mouvement est isochore (pas de variation de masse volumique) si

$$div\vec{V} = 0$$

Le mouvement est-il isochore ?

Correction

On montre en coordonnées polaires que $div\vec{V} = 0$

$$div\,\vec{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r}.\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

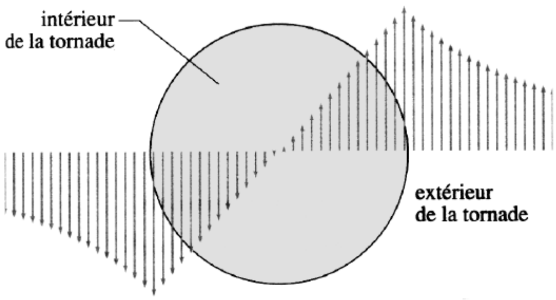
2.6 Exercice : écoulement dans une tornade

On propose ci-dessous un modèle simplifié de tornade sous la forme d'un écoulement de fluide présentant une symétrie de révolution autour d'un axe $\vec{e}_z$.

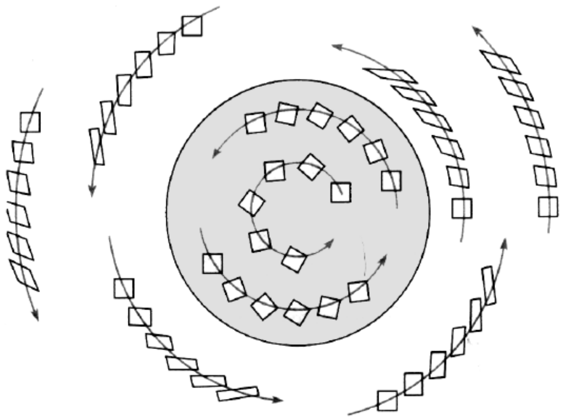
Le champ des vitesses en représentation Eulérienne est de la forme (en coordonnées cylindriques) :

$$\begin{cases} pour\; r < a : \; \vec{v}(r) = r.\Omega.\vec{e}_\theta \\ pour\; r > a : \; \vec{v}(r) = \dfrac{\Omega.a^2}{r}.\vec{e}_\theta \end{cases}$$

C'est un champ orthoradial dont le module ne dépend que de la distance r à l'axe. À l'intérieur d'un cylindre de rayon a, qui constitue « l'oeil » de la tornade, la vitesse croît linéairement de 0 à sa valeur maximale quand r varie de 0 à la valeur a, puis décroit jusqu'à l'infini où le fluide est au repos.



Champ des vitesses d'un écoulement à l'intérieur et à l'extérieur d'une tornade.



Mise en évidence des transformations d'une cellule lors de cet écoulement.

A-t-on un mouvement isochore (mouvement de fluide incompressible) ?

Correction

Oui car $div\vec{V} = 0$

$$div\,\vec{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r}.\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

3 Références bibliographiques

[1], [2], [3]

[1] G. Serane, Mathématiques de la physique appliquée à l'usage des candidats au certificat de T.M.P est élèves-ingénieurs et des ingénieurs. Paris: DUNOD, 1965.

[2] J. Quinet et J. Quinet, Géométrie, 6. éd. in Cours élémentaire de mathématiques supérieures / J. Quinet, no. T. 5. Paris: Dunod, 1991.

[3] J. Coirier et C. Nadot-Martin, MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS - 4E ED. S.l.: DUNOD, 2020.