Mathématiques

-

Géométrie

Calcul Vectoriel

Frédéric Menan

fmenan@cesi.fr

2025

Table des matières

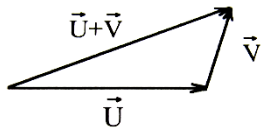
1 Calcul vectoriel

Vecteur

Dans une base B($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$), soient les points A (x_A , y_A , z_A) et B (x_B , y_B , z_B). Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes : $\overrightarrow{AB}$ = (x_B - x_A , y_B - y_A , z_B - z_A)

Propriétés

- Soit un repère d'origine O et de base B($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$), soit un point de M de coordonnées (x,y,z), alors le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour composantes (x,y,z).
- Relation de Chasles $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



Opérations sur les vecteurs (dans tout repère)

Soit $\vec{U} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et α un réel,

$$\alpha.\vec{U} = \begin{pmatrix} \alpha.x \\ \alpha.y \\ \alpha.z \end{pmatrix}$$

$$\vec{U} + \vec{V} = \begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \\ z_u + z_v \end{pmatrix}$$

Vecteurs colinéaires (dans tout repère)

- Deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel α tel que $\vec{U} = \alpha.\vec{V}$
- Les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{U},\vec{V}) = 0$ avec

$$\det(\vec{U},\vec{V}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u.y_v - y_u.x_v$$

Norme d'un vecteur dans un repère orthonormé

- Soit $\vec{U}$ (x,y,z) dans la base orthonormée B($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$). La norme du vecteur $\vec{U}$ est :

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

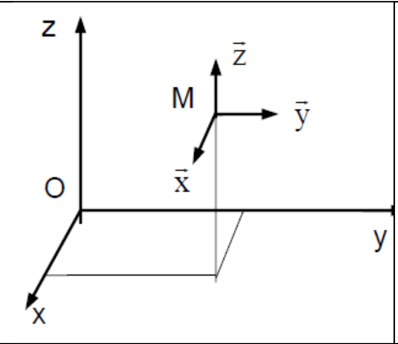
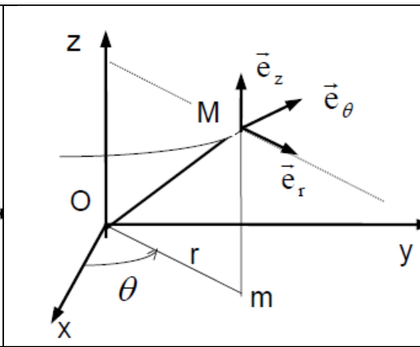
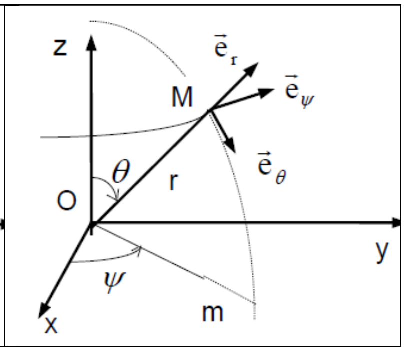
- Par conséquent, la distance AB est donnée par

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

- Un vecteur unitaire est un vecteur de norme 1.

1.1 Représentation dans l'espace

Un repère est défini par une origine généralement notée O et une base.

		
Repère cartésien : x,y,z	Repère cylindrique : r, θ, z et Repère polaire : r, θ	Repère sphérique : r, θ, ϕ

1.2 Produit scalaire (dot product)

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est le nombre réel suivant, noté $\vec{U}.\vec{V}$:

$$\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.\cos(\vec{U},\vec{V})$$

Conséquences

- Si l'un des vecteurs est nul, alors $\vec{U}.\vec{V} = 0$
- Si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont unitaires (norme 1), alors $\vec{U}.\vec{V} = \cos(\vec{U},\vec{V})$

Propriétés

- Symétrie : $\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U}$
- Distributivité par-rapport à l'addition vectorielle : $\vec{U}.(\vec{V}+\vec{W}) = \vec{U}.\vec{V} + \vec{U}.\vec{W}$
- Multiplication par un réel : $\lambda\vec{U}.\mu\vec{V} = \lambda\mu\vec{U}.\vec{V}$

Calcul et propriétés dans un repère orthonormé

- Expression littérale

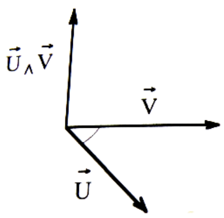
$$\vec{U}.\vec{V} = U_1.V_1 + U_2.V_2 + U_3.V_3 = \sum_{i=1}^{3} Ui.Vi$$

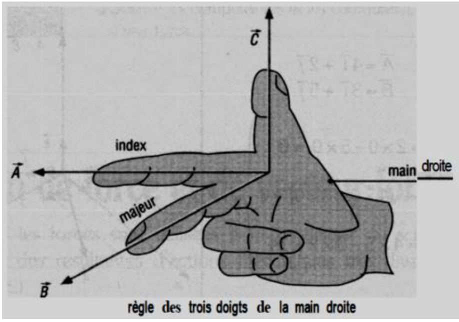
- Si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux, alors $\vec{U}.\vec{V} = 0$

1.3 Produit vectoriel (Cross product)

Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est le vecteur, noté $\vec{U} \wedge \vec{V}$ tel que

- ✓ $\vec{U} \wedge \vec{V}$ soit perpendiculaire au plan $(\vec{U},\vec{V})$
- ✓ le trièdre $(\vec{U},\vec{V},\vec{U} \wedge \vec{V})$ soit direct
- ✓ $\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.|\sin(\vec{U},\vec{V})|$

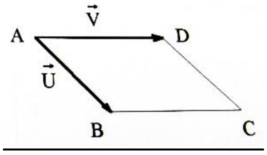




[1]

Interprétation géométrique

- La norme du produit vectoriel $\vec{U} \wedge \vec{V}$ représente la surface du parallélogramme ABCD.



Propriétés

- Antisymétrie : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$
- Distributivité par-rapport à l'addition vectorielle : $\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W}$
- Multiplication par un réel : $\lambda\vec{U} \wedge \mu\vec{V} = \lambda\mu\vec{U} \wedge \vec{V}$
- Cas de nullité : un des vecteurs est nul ou les deux vecteurs ont même direction

Calcul dans une base orthonormée directe

$$\begin{array}{ccccc} \vec{V}_1 & & \vec{V}_2 & & \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \\ \begin{vmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{vmatrix} & \begin{matrix} \\ + \\ - \end{matrix} & \begin{vmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{vmatrix} & = & \begin{vmatrix} Y_1Z_2 - Z_1Y_2 \\ Z_1X_2 - X_1Z_2 \\ X_1Y_2 - Y_1X_2 \end{vmatrix} \\ X_1 & & X_2 & & \\ Y_1 & & Y_2 & & \end{array}$$

Double produit vectoriel : formule de Gibbs

$$\boxed{\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) = (\vec{U}.\vec{W})\,\vec{V} - (\vec{U}.\vec{V})\,\vec{W}}$$

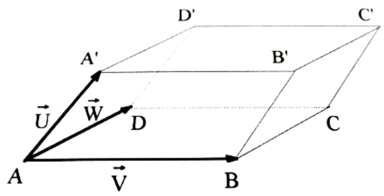
1.4 Produit mixte

Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ est le réel suivant, noté $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$:

$$(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}) = \vec{U}.(\vec{V} \wedge \vec{W})$$

Interprétation géométrique

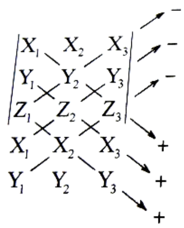
La valeur absolue du produit mixte $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ représente le volume du parallélépipède ABCDA'B'C'D'.



Calcul dans une base orthonormée directe

$$\vec{U}.\left(\vec{V}\wedge\vec{W}\right) = det\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right) = \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}$$

Remarque : calcul d'un déterminant d'ordre 3, règle de Sarrus



$$= X_1Y_2Z_3 + Y_1Z_2X_3 + Z_1X_2Y_3 - Y_1X_2Z_3 - X_1Z_2Y_3 - Z_1Y_2X_3$$

Le vecteur $\overrightarrow{W}$ est une combinaison linéaire de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ si et seulement si $\det\left(\vec{U},\vec{V},\overrightarrow{W}\right) = 0$

Les points A, B, C, D sont coplanaires si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) = 0$

2 Géométrie analytique

2.1 Représentation cartésienne

2.1.1 Droite

Dans le plan, l'ensemble des point M d'une droite D sont définis par :

$$a.x + b.y + c = 0$$

- Vecteur directeur : (-b;a)
- Vecteur orthogonal : (a;b)

Droite dans l'espace : elle est définie comme l'intersection de deux plans

$$a.x + b.y + c.z + d = 0$$

$$a'.x + b'.y + c'.z + d' = 0$$

2.1.2 Distance d'un point à une droite

Dans le plan, soit la droite D d'équation $a.x + b.y + c = 0$ et soit un point M de coordonnées $(x_M; y_M)$, alors la distance de M à D est donnée par :

$$d = \frac{|a.x_M + b.y_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2.1.3 Plan

Equation d'un plan dans l'espace :

$$a.x + b.y + c.z + d = 0$$

Soit un plan P de vecteur normal $\vec{n}$=(a,b,c)

Soit A=(x_A,y_A,z_A) un point de P. M (x, y, z) appartient à P ssi les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux

Ils sont orthogonaux ssi: $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

⇔ a.(x-x_A) + b.(y-y_A) + c.(z-z_A)=0

⇔ a.x + b.y + c.z + (-a.x_A-b.y_A-c.z_A)=0

⇔ a.x + b.y + c.z + d=0 : équation cartésienne du plan P

2.1.4 Distance d'un point à un plan

Soit P un plan de l'espace défini dans un repère orthonormal par l'équation cartésienne

$$a.x + b.y + c.z + d = 0$$

Soit le point M de coordonnées (x_M,y_M,z_M). Alors la distance entre M et le projeté orthogonal H de M sur le plan P est :

$$d(M,P) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

2.1.5 Equation d'un cercle dans le plan

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

2.1.6 Equation d'une sphère dans l'espace

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

Démonstration

Soit S la sphère de centre A (a ; b ; c) et de rayon r. Le point M (x, y, z) appartient à S ssi AM = r, soit encore : $AM^2=r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$

Remarque

$x^2+y^2+z^2+\alpha.x+\beta.y+\gamma.z+\delta=0$ est une équation de sphère si on peut l'écrire sous la forme

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

2.1.6.1 Intersection sphère – plan

S est une sphère de centre O et de rayon r. P est un plan de l'espace. Soit H le projeté orthogonal de O sur le plan P et d=OH, distance de O à P.

Alors

- si d>r, il n'y a pas d'intersection entre la sphère et le plan
- Si d=r, l'intersection est un point, le plan est tangent à la sphère en H
- Si d<r, l'intersection (points communs entre S et P) est un cercle de centre H et de rayon $\sqrt{r^2 - d^2}$. On dit que le plan est sécant à la sphère.

2.1.7 Equation d'une ellipse dans le plan

Dans un repère dont l'origine est l'intersection du grand axe et du petit axe de l'ellipse, tout point (x,y) vérifiant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est sur l'ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b, si a > b

2.2 Représentation paramétrique

La représentation paramétrique est une représentation sous forme d'un système d'équations déterminant chacun des points de l'objet par une équation pour chacune des dimensions de l'espace. Il y a donc autant d'équations que de dimensions dans l'espace de modélisation.

2.2.1 Equation paramétrique d'une droite D dans un repère cartésien du plan

$$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \end{cases}$$

$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$: vecteur directeur de D ; $A(x_A, y_A)$: point de la droite

2.2.2 Equation paramétrique d'une droite D dans un repère cartésien de l'espace

$$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$$

$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$: vecteur directeur de D ; $A(x_A, y_A, z_A)$: point de la droite

2.2.3 Equation paramétrique d'un plan dans l'espace

$$\begin{cases} x = a_x t + b_x u + c_x \\ y = a_y t + b_y u + c_y \\ z = a_z t + b_z u + c_z \end{cases}$$

2.2.4 Equation paramétrique d'une sphère dans l'espace

$$\begin{cases} x = Rcos(\theta)\cos(\varphi) + c_x \\ y = Rcos(\varphi)\sin(\theta) + c_y \\ z = Rsin(\varphi) + c_z \end{cases}$$

2.2.5 Equation paramétrique d'un cylindre

Un cylindre est un ensemble de droites parallèles appelées génératrices

Section plane = intersection de C avec un plan P non parallèle aux génératrices

Directrice = toute courbe tracée sur le cylindre et rencontrant chaque génératrice

Un cylindre a pour équation

$$\begin{cases} x = f(u) + \alpha v \\ y = g(u) + \beta v \\ z = h(u) + \gamma v \end{cases}$$

Le vecteur de coordonnées (α,β,γ) est un vecteur directeur du cylindre.

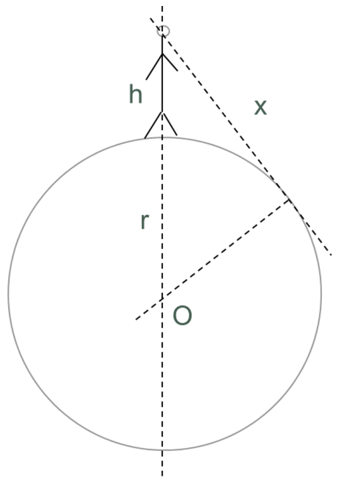
3 Exercices

3.1.1 Exercice : distance à l'horizon

A quelle distance se situe l'horizon ?

1. Déterminer x, soit la distance à l'horizon pour une personne mesurant h = 1,70m.
2. Avec un drone situé à 30m d'altitude, déterminer la nouvelle distance à l'horizon.

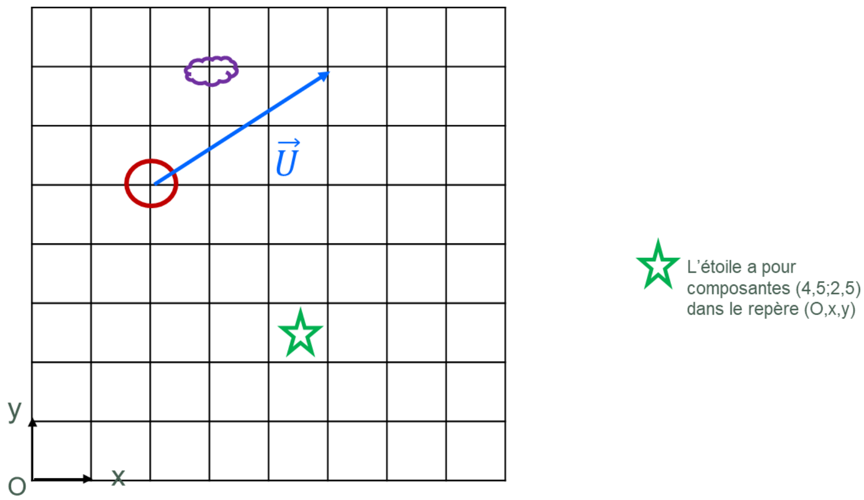
rayon de la Terre r = 6371km



3.1.2 Exercice : champ de vision

On suppose qu'une personne a un champ de vision de 120°.

1. Est-ce que la personne illustrée par le cercle rouge, et qui regarde dans la direction $\vec{U}$ ci-dessous peut voir le nuage ? l'étoile ?
2. Si la personne ne peut pas les voir, quel est l'angle minimal de rotation nécessaire pour les voir apparaitre ?



Correction

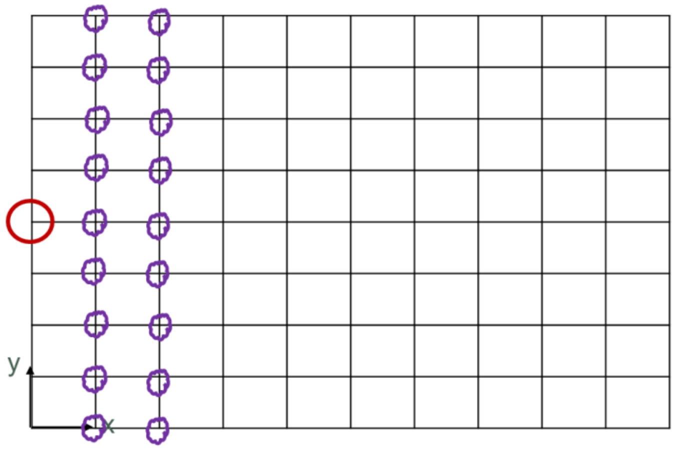
Angle avec le nuage : 29° donc oui on voit le nuage

Angle avec l'étoile : 90° donc on ne voit pas l'étoile

3.1.3 Exercice : champ de vision 2

On suppose que le professeur (cercle rouge) a un champ de vision de 120° (60° de chaque côté).

1. En regardant droit devant lui (direction x), le professeur peut-il voir tous les élèves du 1er rang (nuages violets) ?
2. Du 2ème rang ?



Correction

On suppose que le professeur (cercle rouge) a un champ de vision de 120°.

1/ En regardant droit devant lui (direction x), le professeur peut-il voir tous les élèves du 1er rang (nuages violets) ? Soit $\vec{U} = \binom{1}{0}$ direction dans laquelle le professeur regarde. Soit $\vec{V} = \binom{1}{4}$ le vecteur qui a pour point origine le professeur et point d'arrivée l'élève tout à la gauche du professeur. On sait que $\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|\|\vec{V}\|\cos(\vec{U},\vec{V})$

$$\vec{U}.\vec{V} = 1$$

$$\|\vec{U}\| = 1$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

Donc

$$\cos(\vec{U},\vec{V}) = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

Donc

$$(\vec{U},\vec{V}) \approx 76°$$

$(\vec{U},\vec{V}) > 60°$ (on suppose un champ de vision symétrique) donc le professeur ne voit pas tous les élèves du 1er rang

2/ Du 2ème rang ? Même raisonnement

$$\cos(\vec{U},\vec{V}) = \frac{2}{\sqrt{4+16}}$$

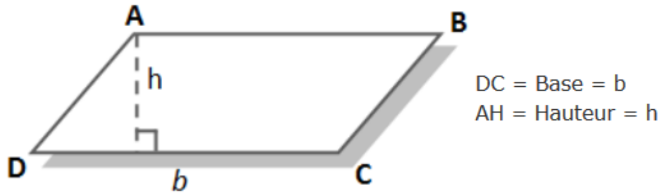
$$(\vec{U},\vec{V}) \approx 63°$$

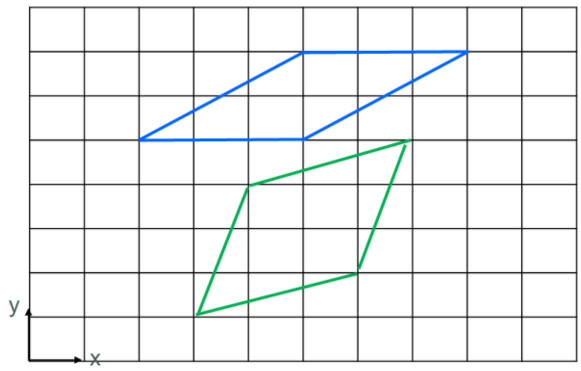
$(\vec{U},\vec{V}) < 63°$ (on suppose un champ de vision symétrique) donc le professeur ne voit pas tous les élèves du 2eme rang

3.1.4 Exercice : aires et produit vectoriel

L'aire d'un parallélogramme est définie par S = b.h avec b : base et h : hauteur du parallélogramme.

1. Retrouver, sur le parallélogramme bleu, ce résultat à l'aide du produit vectoriel
2. Calculer la surface du parallélogramme vert





Correction

1/ Aire = b.h = 3x2= 6. Soit le vecteur (3;0;0) et le vecteur (3;2;0)

Produit vectoriel :

$$\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}$$

Norme de ce vecteur : 6

2/

$$\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$$

Norme = aire = 8

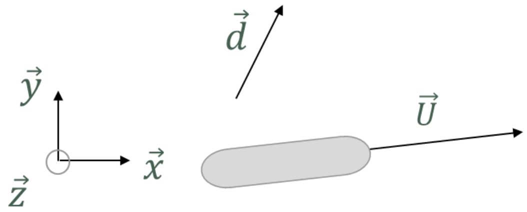
Remarque : on peut retrouver ce raisonnement en faisant b.h mais le calcul serait nettement plus long et fastidieux !

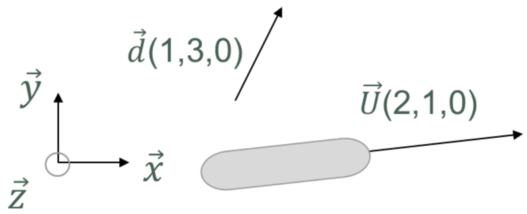
3.1.5 Exercice : bateau

Un bateau se déplace selon le vecteur déplacement $\vec{U}$ illustré ci-dessous. Cependant, son cap souhaité est le vecteur $\vec{d}$. Le capitaine du bateau aimerait dormir et souhaite donc programmer un pilote automatique qui puisse en permanence calquer son vecteur vitesse sur son cap pour éviter les effets de dérive dus au vent, aux courants….

Le cap du bateau est, dans la base cartésienne $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, le vecteur $\vec{d}$. Le vecteur $\vec{d}$ est calculé par un ordinateur de bord et change régulièrement.

1. Comment le pilote automatique peut-il, à partir de deux relevés GPS aux points A et B, déterminer le vecteur vitesse $\vec{U}$?
2. Comment alors faire tourner le bateau pour orienter $\vec{U}$ dans la direction de $\vec{d}$?
3. Dans l'exemple ci-dessous, le bateau doit-il tourner vers sa gauche ou sa droite pour reprendre son cap ?





Correction

1/Vecteur vitesse $\vec{U} = \frac{\overrightarrow{AB}}{temps\ de\ trajet}$

2/On calcule le produit vectoriel qui indique sur le vecteur d est à gauche ou à droite

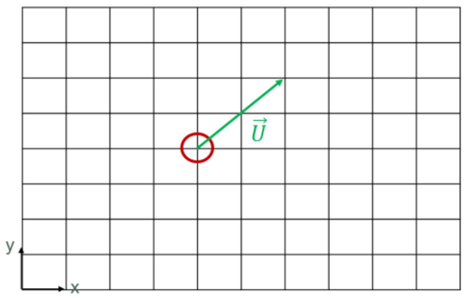
3/Exemple

$$\vec{U} \wedge \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Le bateau doit tourner vers sa gauche

3.1.6 Exercice : où regarde le personnage ?

Un personnage avance dans la direction donnée par le vecteur $\vec{U}$. Soit $\vec{V}$ le vecteur de la direction dans laquelle il regarde. Un calcul nous indique que le produit vectoriel $\vec{U}$^$\vec{V}$ est dirigé selon z et dans le sens positif de z. Le personnage regarde-t-il vers sa gauche ou sa droite ?



3.1.7 Exercice : déterminant et produit vectoriel

Soit $\vec{X}$ (x,y,0) et $\overrightarrow{X'}$ (x',y',0)

1/ Déterminer les composantes de $\vec{U}$, produit vectoriel des vecteurs $\vec{X}$ et $\overrightarrow{X'}$: $\vec{U} = \vec{X} \wedge \overrightarrow{X'}$

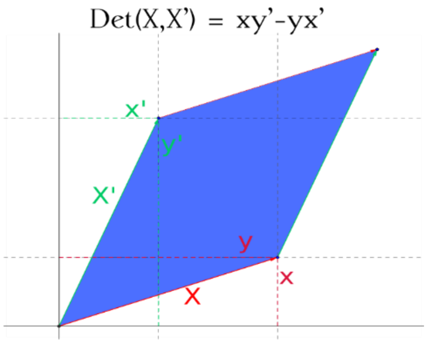
2/ Déterminer la norme de $\vec{U}$

3/ Calculer le déterminant de la matrice A ci-dessous

$$A = \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$$

4/ Montrer que le déterminant de A est l'aire du parallélogramme bleu ci-dessous

https://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9terminant_(math%C3%A9matiques)



Correction

Soit $\vec{X}$ (x,y,0) et $\overrightarrow{X'}$ (x',y',0)

1/ Déterminer les composantes de $\vec{U}$, produit vectoriel des vecteurs $\vec{X}$ et $\overrightarrow{X'}$: $\vec{U} = \vec{X} \wedge \overrightarrow{X'}$

$$\vec{X} \wedge \overrightarrow{X'} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

2/ Déterminer la norme de $\vec{U}$

$$\|\vec{U}\| = x.y' - y.x'$$

3/ Calculer le déterminant de la matrice A ci-dessous

$$A = \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = x.y' - y.x'$$

4/ Montrer que le déterminant de A est l'aire du parallélogramme bleu ci-dessous

On sait que l'aire du parallélogramme est la norme de $\vec{U}$

Or

$$\|\vec{U}\| = x.y' - y.x'$$

3.1.8 Exercice : produit mixte, déterminant, cas de vecteurs colinéaires

Le produit mixte de 3 vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$, est un scalaire noté ($\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$) et défini par

($\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$)= $\vec{U}$. ($\vec{V}$ ^ $\vec{W}$)

1/ Montrer que $\vec{U}$. ($\vec{V}$ ^ $\vec{W}$) est égal au déterminant ci-dessous

$$\det(\vec{U},\vec{V},\vec{W}) = \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}$$

2/ Montrer que si $\vec{W}$ est une combinaison linéaire de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ alors le produit mixte des 3 vecteurs est nul et donc det($\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$)=0

Correction

1/ Montrer que $\vec{U}$. ($\vec{V}$ ^ $\vec{W}$) est égal au déterminant ci-dessous

SARRUS

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} = u_x v_y w_z + w_x u_y v_z + u_z v_x w_y - u_z v_y w_x - v_z w_y u_x - u_y v_x w_z$$

Le développement du $\vec{U}$. ($\vec{V}$ ^ $\vec{W}$) donne la même expression

2/ Montrer que si $\vec{W}$ est une combinaison linéaire de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ alors le produit mixte des 3 vecteurs est nul et donc det($\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$)=0

Si $\vec{W}$ est une combinaison linéaire de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ alors il existe deux réels a et b tels que

$$\vec{W} = a\vec{U} + b\vec{V}$$

Alors

$$\vec{U}.(\vec{V} \wedge \vec{W}) = \vec{U}.\left(\vec{V} \wedge (a\vec{U} + b\vec{V})\right) = \vec{U}.(\vec{V} \wedge a\vec{U})$$

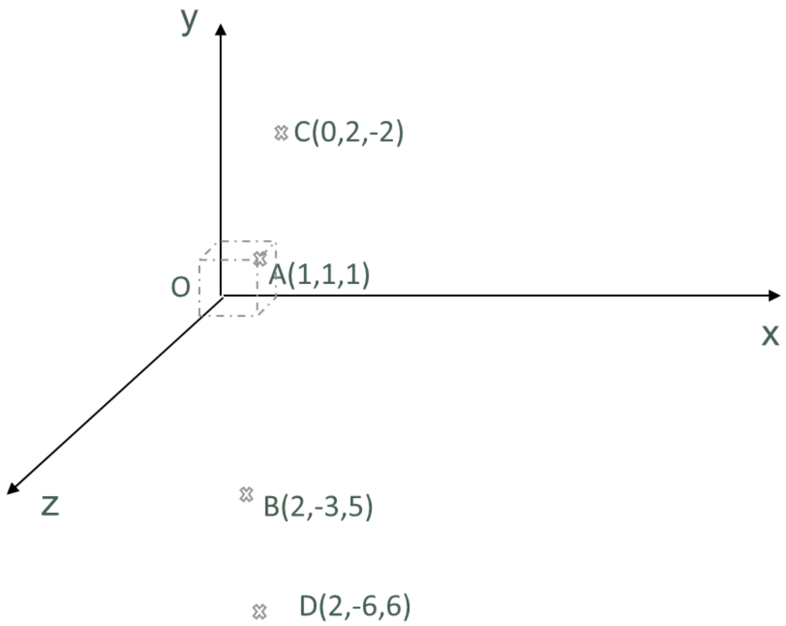
Par propriétés du produit vectoriel, $\vec{V} \wedge a\vec{U}$ est orthogonal à $\vec{U}$ donc $\vec{U}.(\vec{V} \wedge a\vec{U}) = 0$

Donc si $\vec{W}$ est une combinaison linéaire de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ alors det($\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$)=0, et réciproquement

3.1.9 Exercice : sur un même plan ?

1. Les points A, B, C et O ci-dessous sont-ils coplanaires ?

2. Les points A, B, C et D ci-dessous sont-ils coplanaires ?



Correction

1/ Les points A, B, C et O ci-dessous sont-ils coplanaires ?

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 6 + 4 - 10 + 4 = 4$$

Les points ne sont pas coplanaires

2/ Les points A, B, C et D ci-dessous sont-ils coplanaires ?

$$\overrightarrow{AD} = \begin{matrix} 2-1 \\ -6-1 \\ 6-1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ -7 \\ 5 \end{matrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{matrix} 0-1 \\ 2-1 \\ -2-1 \end{matrix} = \begin{matrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{matrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{matrix} 2-1 \\ -3-1 \\ 5-1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & -7 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 1*1*5 + 4*1*7 + 1*4*3 - 4*1*1 - 5*4 - 1*3*7 = 0$$

det = 0, oui ils sont coplanaires

Remarque : on a en fait $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$

3.1.10 Exercice

Déterminer l'équation du plan P passant par le point A (1 ; 2 ; 3) et dont un vecteur normal est le vecteur de coordonnées (-1 ; 3 ; 5)

Correction

Déterminer l'équation du plan P passant par le point A (1 ; 2 ; 3) et dont un vecteur normal est le vecteur (-1 ; 3 ; 5)

Soit $\vec{u}$ le vecteur normal au plan. Soit M(x,y,z) point du plan, alors $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$

On développe le produit scalaire, équation du plan :

-x+3y+5z-20=0

3.1.11 Exercice

Déterminer les coordonnées du point d'intersection du plan (P) d'équation x+3y+z-1=0 et de la droite (D) passant par le point A (1, 1, 1) et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ (-1, 2, 1).

Correction

Déterminer les coordonnées du point d'intersection du plan (P) d'équation x+3y+z-1=0 et de la droite (D) passant par le point A (1, 1, 1) et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ (-1, 2, 1).

Soit M point d'intersection, coordonnées (x,y,z). On cherche x,y, et z.

M point de la droite : $\overrightarrow{AM} = k.\vec{u}$ donc $\begin{cases} x - 1 = -k \\ y - 1 = 2k \\ z - 1 = k \end{cases}$

Or M point du plan donc x+3y+z-1=0 donc (1-k)+3.(2k+1)+k+1-1=0, donc k = -2/3

Le point d'intersection a pour coordonnées (5/3, - 1/3, 1/3)

3.1.12 Exercice

Déterminer la distance du point A (1,-1,0) à la droite D de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

avec λ réel

Correction

Déterminer la distance du point A (1,-1,0) à la droite D de représentation paramétrique :

$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$ avec $\lambda \in \boldsymbol{R}$

Correction

Soit M point recherché, coordonnées (x,y,z)

$$\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$$

donc x-y-2z-2=0. Or M appartient à la droite donc en remplaçant dans l'équation précédente les valeurs de x,y,z en fonction de λ, on obtient λ = 3/2

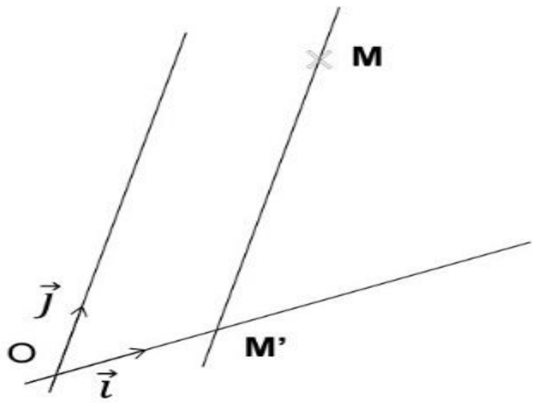
M a pour coordonnées (5/2,1/2,0) et la distance de A à D est AM=3√2/2

Autre méthode : soient u(1,-1,-2) et B(1,2,3), delta (produit vectoriel)

$$d = \frac{\left\|\vec{u}\Delta\overrightarrow{BA}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

3.1.13 Exercice

Soit le repère (O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$) ci-dessous. Soit un point M de coordonnées (x,y) dans ce repère. Ecrire le système d'équations de la projection de M sur l'axe $\vec{\imath}$, parallèlement à $\vec{\jmath}$.



<u>Exercice</u>

Soit un repère (O,$\vec{x}$,$\vec{y}$,$\vec{z}$) orthonormé.

Soit un vecteur $\vec{u}$, unitaire, faisant un angle ϕ avec l'axe $\vec{x}$.

On fait tourner le vecteur $\vec{u}$ d'un angle θ autour de $\vec{z}$.

Déterminer les coordonnées du nouveau vecteur obtenu en fonction de θ et ϕ. (Aide : penser aux formules d'addition.)

4 Références bibliographiques

[1], [2], [3]

[1] J.-L. Fanchon, *Guide de Mécanique*. Nathan, 1998.

[2] Y. Brémont et P. Réocreux, *Mécanique du solide indéformable: calcul vectoriel, cinématique cours et exercices résolus classes préparatoires aux grandes écoles*. in Mécanique, no. 1. Paris: Ellipses, 1995.

[3] J.-P. Larralde, *Mathématique appliquée à la mécanique: éléments de géométrie vectorielle*. in Collection des industries mécaniques. Paris Issy-les-Moulineaux: Masson E.A.P, 1981.