Mathématiques

-

Ensembles, Applications
Relations

Frédéric Menan

fmenan@cesi.fr

2025

Table des matières

1 Ensembles – applications

1.1 Références historiques

Paradoxe du Russell, Paradoxe du barbier, Newton, John Venn, Georg Cantor

1.2 Ensembles

On nomme ensemble une collection d'objets appelés éléments.

Soit E un ensemble.

- Si x est un élément de E, on dit que x appartient à E. On note x ∈ E.
- Si x n'appartient pas à E, on note x ∉ E.

Une manière intuitive et courante de représenter un ensemble est d'en faire la liste des éléments, quand c'est possible. L'ensemble des couleurs d'un jeu de cartes est noté {carreau, cœur, pique, trèfle} ou {pique, trèfle, carreau, cœur}, l'ordre n'a pas d'importance. On dit alors que l'ensemble est défini « **en extension** ».

L'ensemble n'ayant aucun élément est appelé l'ensemble vide. On le note $\emptyset$.

Un ensemble a un seul élément est appelé un singleton.

Un ensemble à deux éléments est appelé une paire.

On peut aussi définir un ensemble en posant un critère qui détermine si un élément appartient ou pas à cet ensemble. On dit alors que l'ensemble E est défini « **en compréhension** ».

Exemple 1 : définition en compréhension

Soit l'ensemble A des entiers naturels strictement supérieurs à 2. On peut définir cet ensemble par tous les entiers n vérifiant n-2>0. On notera $A = \{n \in \mathbb{N} | n > 2\}$.

Remarque

On peut définir un ensemble « en compréhension » sans pour autant connaitre un seul élément de cet ensemble et sans même savoir s'il existe un élément de cet ensemble ! Par exemple on a tout à fait le droit de définir l'ensemble des planètes de l'Univers qui abritent des petits hommes verts dotés de trois yeux et deux bras. On ne connait pas d'éléments de cet ensemble, on ne sait même pas s'il y en a et pourtant l'ensemble est défini « en compréhension ». En mathématiques, cela permet quand même d'avancer, de faire des hypothèses, de démontrer des théorèmes…etc (voir par exemple le paradoxe de Fermi).

Remarque

Définissons maintenant l'ensemble B des entiers naturels n vérifiant $n^2>5$. On a donc $B = \{n \in \mathbb{N} | n^2 > 5\}$. On constate que B={3,4,5,6,7,….} tout comme l'ensemble A de l'exemple précédent ! Et pourtant, ces deux ensembles n'ont pas la même définition « en compréhension ». On voit là une limite de la définition « en compréhension » : deux critères peuvent donner les mêmes éléments. A et B sont définis différemment, et on dira tout de même que A et B sont égaux, car ils ont les mêmes éléments. On notera A=B. De façon générale on dira que deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments.

Boite à outils

Il est souvent difficile voire impossible de démontrer que deux ensembles ont exactement les mêmes éléments. A votre avis, comment peut-on démontrer que deux ensembles sont égaux ?

Exemples, ensembles usuels et notations

- $\mathbb{B}$: ensemble des bits $\mathbb{B} = \{0,1\}$
- $\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels (nombres entiers positifs ou nuls $\mathbb{N}$={0,1,2,3,………}
- $\mathbb{N}^*$: ensemble des nombres entiers strictement positifs $\mathbb{N}^*$={1,2,3,………}
- $\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs (nombres entiers nuls, positifs ou négatifs $\mathbb{Z}$ ={…,-3,-2,-1,0,1,2,3……….}
- $\mathbb{D}$: ensemble des nombres décimaux (réel pouvant s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule)
- $\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels. x est un nombre rationnel s'il existe un p entier relatif et q entier naturel différent de 0 tels que x=p/q. Un nombre réel bien connu qui n'est pas rationnel est π.
- $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels
- $\mathbb{R}+$: ensemble des nombres réels positifs
- L'exposant * indique « privé de 0 ». Ainsi $\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des entiers strictement positifs (donc pour n > 1).
- $\mathbb{R}+$ est l'ensemble des réels positifs.

1.3 Inclusion

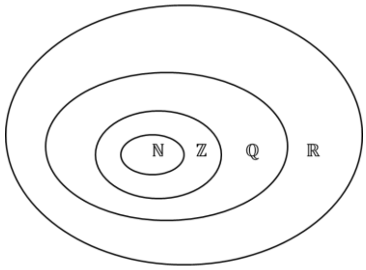
Un ensemble A est inclus dans un ensemble E si pour tout x appartenant à A, x appartient aussi à E. On note A ⊂ E.

On dit alors que A est un sous-ensemble (ou partie) de E.

Remarques

- Par convention pour tout ensemble E, Ø⊂E.
- La relation d'inclusion est réflexive : E ⊂ E (tout élément de E est élément de E)
- La relation d'inclusion est transitive : si A ⊂ B et B ⊂ C alors A ⊂ C
- La relation d'inclusion est antisymétrique : A = B si et seulement si (A ⊂ B et B ⊂ C A)

- Si A n'est pas inclus dans E, on note A⊄E



Remarque

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

1.4 Parties d'un ensemble

L'ensemble des parties de E, noté $\wp(E)$, est l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles de E.

Exemple 2

E={1,a,d} alors $\wp$(E)={ ∅, {1}, {a}, {d}, {1,a}, {1,d}, {a,d}, E }

Remarque

L'ensemble {1,a} ∈ $\wp$(E) mais {1,a} ⊂ E. Attention aux notations !

1.4.1 Diagramme de Venn

Sur un diagramme de Venn, E est représenté par un rectangle et des parties A et B de E par des zones de ce rectangle.

On appellera E le « référentiel ».

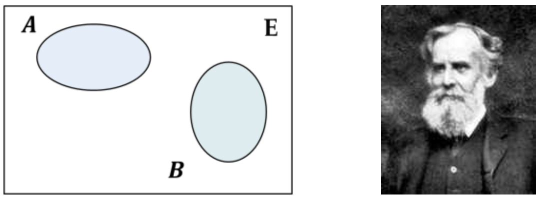


Figure 1. Exemple de diagramme de Venn. John Venn (1834-1923). Mathématicien et logicien britannique (https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Venn)

Remarque

Si on raisonne sur de nombreuses parties de E, si E contient beaucoup d'éléments ou si on veut visualiser précisément les éléments de chaque partie, les diagrammes de Venn deviennent difficiles à exploiter. Ils sont toutefois efficaces pour illustrer visuellement des opérations sur les ensembles. On verra dans la suite du cours un moyen très intéressant de déterminer des ensembles : les fonctions caractéristiques.

1.5 Opérations sur les ensembles

1.5.1 Produit d'ensembles

On appelle produit de E par F l'ensemble noté E×F contenant tous les couples de la forme (x,y) où x est un élément de E et y un élément de F.

L'ensemble E×E…×E = E^n a pour éléments les n-uplets $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ avec $x_i \in A$ pour tout i.

Exemple 3

- E={1,2,3} et F={a,b} alors E×F={(1,a) ; (1,b) ; (2,a) ; (2,b) ; (3,a) ; (3,b)} et F×E={(a,1) ; (a,2) ; (a,3) ; (b,1) ; (b,2) ; (b,3)}
- Si E = F = $\mathbb{R}$, le produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}^2$

Remarques

- A×B ≠ B×A (non commutativité)
- A×(B×C) ≠ (A×B)×C ≠ A×B×C (non associativité)
- $(x_1,x_2,\dots,x_n) = (y_1,y_2,\dots,y_n)$ équivaut à $x_i = y_i$ pour tout i

1.5.2 Intersection

On appelle intersection des ensembles A et B l'ensemble noté A∩B contenant tous les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B : $A \cap B = \{x | x \in A \; et \; x \in B\}$

Quand $A \cap B = \emptyset$ on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Exemple 4

A={1,2,4,a,b} et B={1,3,4,b,c} alors A∩B={1,4,b}

Exemple 5

Soit E l'ensemble des voitures d'un parking. Soit R l'ensemble des voitures rouges garées sur ce parking. Soit B l'ensemble des voitures de type « berline » garées sur ce parking. La partie commune à ces cercles R∩B représente les berlines rouges.

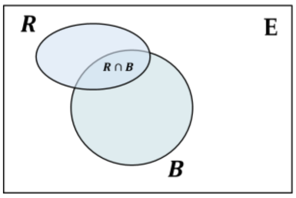


Figure 2. Intersection de deux ensembles

Propriétés

- Commutativité : $A \cap B = B \cap A$
- Idempotence : $A \cap A = A$
- Associativité : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = \; A \cap B \cap C$
- Elément absorbant : $A \cap \emptyset = \emptyset$

Remarque

$A \subset B$ si et seulement si $A \cap B = A$

1.5.3 Union

On appelle union (ou réunion) des ensembles A et B l'ensemble noté AUB contenant tous les éléments appartenant à A ou à B, ou aux deux.

$$A \cup B = \{x | x \in A \; ou \; x \in B\}$$

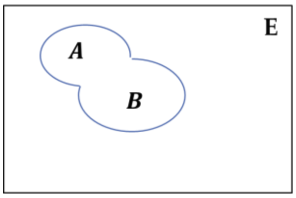


Figure 3. Union de deux parties de E

Exemple 6

- A={1,2,4,a,b} et B={1,3,4,b,c} alors A∪B={1,2,3,4,a,b,c}

Propriétés

- Commutativité : $A \cup B = B \cup A$
- Idempotence : $A \cup A = A$
- Associativité : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
- Elément neutre : $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup E = A$

Remarque

$A \subset B$ si et seulement si $A \cup B = B$

1.5.4 Complémentaire

Soit A un sous-ensemble de E. On appelle complémentaire de A l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas les éléments A. On note cet ensemble $\bar{A}$: $\bar{A} = \{x \in E | x \notin A\}$

Propriétés

- $E = A \cup \bar{A}$
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- $\bar{E} = \emptyset$
- $\bar{\emptyset} = E$
- $\bar{\bar{A}} = A$

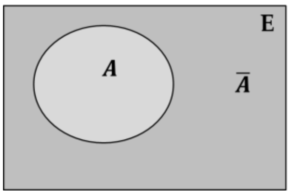


Figure 4. Complémentaire d'un sous-ensemble A sur un ensemble E

Remarque

Contrairement à l'union et à l'intersection, le complémentaire dépend du référentiel E dans lequel on fait l'opération. Par exemple, soit l'ensemble $A = \{1,2,4\}$. Sur $E = \{1,2,3,4,5\}$, le complémentaire de A est $\bar{A} = \{3,5\}$. Sur $F = \{1,2,3,4,a,b,c,d\}$, le complémentaire de A est $\bar{A} = \{3,a,b,c,d\}$.

1.5.5 Quelques propriétés

Distributivité

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Lois de De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

1.5.6 Différence

La différence de A et B, notée A\B (A moins B) est l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B.

Ainsi, x ∈ A\B quand x∈A et x∉B.

1.5.7 Différence symétrique

La différence symétrique de A et B, notée $A\Delta B$ (A delta B) est l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B, mais pas aux deux à la fois.

1.5.8 Somme disjointe

Quand on fait l'union de deux ensembles, on perd « l'origine » des éléments (on ne sait plus de quel ensemble venait un élément de l'union) et on ne compte plus qu'une seule fois un élément qui appartenait aux deux ensembles.

On peut remédier à cela en faisant la somme disjointe :

Exemple 7

Reprenons ces ensembles : A={1,2,4,a,b} et B={1,3,4,b,c}. On a vu que A∪B={1,2,3,4,a,b,c}

Dans le nouvel ensemble obtenu, on ne voit 1, 4 et b qu'une seule fois alors qu'ils sont à la fois dans A et B.

La somme disjointe serait l'ensemble $A\coprod B = \{1,1,2,3,4,4,\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{b},\mathrm{c}\}$

Exemple 8

Soient A et B deux ensembles. La somme disjointe notée $\coprod$ peut être définie par :

$$A\coprod B = (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$$

Dans cet ensemble on connait « l'origine » (ensemble A ou ensemble B) de chaque élément.

1.6 Applications

1.6.1 Définition d'une application f, image de f, antécédent de f

Une application est caractérisée par un ensemble de départ, un ensemble d'arrivée et un moyen d'associer à chaque x de l'ensemble de départ un unique y de l'ensemble d'arrivée.

Soit l'application f $\binom{A \to B}{x \to y}$. $x \in A$ et $y \in B$. y est l'image de x par f et x est un antécédent de y par f.

On note aussi $f: A \to B$ et $x \mapsto y = f(x)$.

L'image de f, notée $f(A)$, est la partie de B dont chaque élément a un antécédent par f. Donc

$$f(A) = \{y \in B \; tel \; qu'il \; existe \; un \; x \in A \; pour \; lequel \; y = f(x)\}$$

L'ensemble des applications de A vers B est noté B^A.

Exemple 9

$$f_1\begin{pmatrix}[0;\pi] \to \mathbb{R} \\ x \to sinx\end{pmatrix}$$

$$f_2\begin{pmatrix}[-\pi/2;\pi/2] \to \mathbb{R} \\ x \to sinx\end{pmatrix}$$

f_1 et f_2 ne sont pas les mêmes applications car leur ensemble de départ est différent.

Une application bien utile……

On peut définir une application de $\mathbb{N}_n^* = [\![1,2,\dots,n]\!]$ (ensemble des entiers naturels de 1 à n) vers l'ensemble E, qui associe à chaque entier naturel de 1 à n un élément de E. On dira qu'on obtient une suite finie de longueur n constituée d'éléments de E. On voit que cela peut revenir à compter, à numéroter, à dénombrer, les éléments de E….

1.6.2 Fonction

Parfois on associe seulement certains éléments de A à l'ensemble d'arrivée B. Une application qui n'est pas définie sur tout l'ensemble A sera plutôt appelée fonction.

La partie de A comportant les éléments x auxquels on associe un élément de B est le domaine de définition de la fonction.

Exemple 10

$$f\begin{pmatrix}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \dfrac{1}{x}\end{pmatrix}$$

L'élément 0 de $\mathbb{R}$ n'a pas d'image par f. Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R}^*$.

1.6.3 Egalité deux applications

2 applications f et g sont égales si elles ont le même ensemble de départ A, le même ensemble d'arrivée, et si pour tout x de A, f(x)=g(x).

1.6.4 Composée

La composée de $f: A \to B$ par $g: B \to C$ est l'application $g \circ f: A \to C$ telle que : $g \circ f(x) = g(f(x))$

1.6.5 Injection

Une application $f: A \to B$ est dite injective si tout élément de B admet **au plus** un antécédent par f.

Ainsi f est injective si

$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ » ou encore « $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ »

1.6.6 Surjection

Une application $f: A \to B$ est dite surjective si tout élément de B admet **au moins** un antécédent par f.

Ainsi f est surjective si pour tout y de B il existe un x de A tel que

$$f(x) = y$$

1.6.7 Bijection

Une bijection est une application à la fois injective et surjective. On dit aussi que f est bijective.

1.6.8 Application réciproque

La réciproque d'une bijection $f: A \to B$ est la bijection $f^{-1}: B \to A$ telle que $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Par définition, $f \circ f^{-1}$ est l'identité dans B et $f^{-1} \circ f$ est l'identité dans A (l'identité est l'application souvent notée Id qui à tout élément x lui associe lui-même, x. $Id(x) = x$.)

On note $f \circ f^{-1} = Id_B$ et $f^{-1} \circ f = Id_A$

Si f est une bijection alors sa réciproque f^{-1} existe et est une bijection.

Théorème

Si $f: A \to B$ par $g: B \to C$ sont des bijections, alors $g \circ f$ est une bijection de A vers C et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

1.7 Notion de cardinal

Les notions énoncées ci-dessous semblent bien tirées par les cheveux pour un ensemble comportant un nombre fini et connu d'éléments (le nombre de cartes au poker, les faces d'un dé).

Mais les concepts qui vont être établis permettront de pousser le raisonnement sur les ensembles ne possédant pas un nombre fini d'éléments.

1.7.1 Ensemble fini

Un ensemble non vide E est fini si et seulement s'il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$ tel qu'il existe une bijection de E vers $[\![1, p]\!]$ (pour rappel : $[\![1, p]\!]$ est l'ensemble des entiers entre 1 et p inclus).

Cela à revient dire qu'on peut « numéroter » chaque élément de E, par un nombre compris entre 1 et p de telle manière qu'aucun élément n'est associé au même nombre.

Sur l'ensemble $[\![1, p+1]\!]$, on ne pourrait pas associer p+1 à un élément de E (application non surjective).

Sur l'ensemble $[\![1, p-1]\!]$, on serait obligé d'associer un des nombres compris entre 0 et p-1 à deux antécédents, donc on n'aurait pas une injection.

Exemple 11

Soit l'ensemble P des pizzas d'un restaurant tel que P={4 fromages, reine, savoyarde, cannibale, végétarienne}

On peut définir l'ensemble $[\![1,5]\!]$ tels que :

- A la pizza 4 fromages on associe 1
- A la pizza reine on associe 2
- A la pizza savoyarde on associe 3
- A la pizza cannibale on associe 4
- A la pizza végétarienne on associe 5

On voit que sur l'ensemble $[\![1,6]\!]$ on ne pourrait pas associer 6 à une pizza.

Sur l'ensemble $[\![1,4]\!]$ deux pizzas devraient être associées au même numéro (avoir la même image par l'application qui à l'ensemble P associe $[\![1,4]\!]$).

Par convention, l'ensemble vide est fini et tout ensemble qui n'est pas fini est dit infini.

1.7.2 Cardinal d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini non vide.

On appelle cardinal de E l'unique p de $\mathbb{N}^*$ tel qu'il existe une bijection de E vers $[\![1, p]\!]$. On le note card(E).

Le cardinal de E est donc le nombre d'éléments de E.

Exemple 12

- Pour E= {a,b,c,d}, on a : card(E) = 4.
- Par convention card ∅= 0.

Principe de Dirichlet

Si A et B sont des ensembles finis tels que card(A) > card(B) alors il n'existe pas d'injection de A dans B.

Théorème admis

Soient A et B des ensembles finis, alors

- Il existe une bijection de A dans B ⇔ card(A) = card(B)
- Il existe une surjection de A dans B ⇔ card(A) ≥ card(B)
- Il existe une injection de A dans B ⇔ card(A) ≤ card(B)

Théorème admis

Soit $f: A \to B$ avec A et B des ensembles finis vérifiant card(A) = card(B)

- Si f est injective alors elle est bijective
- si f est surjective alors elle est bijective

Théorème admis

- Si E et F sont finis, alors E×F est fini et card(E×F) = card(E).card(F)

Propriétés

Soient A_1, A_2 des parties d'un ensemble E.

Alors

$$card(A_1 \cup A_2) = card(A_1) + card(A_2) - card(A_1 \cap A_2)$$

1.7.3 Ensemble dénombrable

Étudions maintenant les ensembles de tous types, finis ou infinis, et essayons de compter leurs éléments. Compter l'infini, après tout pourquoi pas !

On dire qu'un ensemble E est dénombrable quand il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$. La bijection, associer 1 à un élément de E, 2 à un autre, 3 à un autre……. revient à compter les éléments.

On voit tout de suite que $\mathbb{N}$ est dénombrable et pourtant c'est un ensemble infini.

Théorèmes admis

- Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable
- S'il existe une injection de E vers un ensemble dénombrable, E est fini ou dénombrable
- S'il existe une surjection de E vers un ensemble infini non dénombrable, E est non dénombrable
- L'ensemble $\wp(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable : tous les entiers naturels ne suffisent pas à « compter » l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$

A ce stade, le lecteur pourrait se demander : « mais alors, il existe des ensembles dont on ne peut numéroter tous les éléments ? ». Bien vu, et l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, $\wp(\mathbb{N})$, ainsi que ce bon vieux $\mathbb{R}$, en sont les exemples sûrement les plus connus

(https://fr.wikipedia.org/wiki/Argument_de_la_diagonale_de_Cantor).

« Vers l'infini et au-délà ! »

Buzz l'Eclair. Fin du XXème siècle. Astronaute, explorateur, star du grand écran, jouet en plastique.

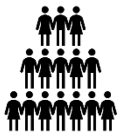
Pour la beauté du geste, il serait maintenant intéressant de comparer des tailles d'ensembles, qu'ils soient finis ou pas. Quand les ensembles étaient finis, c'était facile : leur cardinal correspondait à leur nombre d'éléments, donc il suffisait de connaitre le nombre d'éléments de chacun.

Or connaitre le nombre d'éléments d'un ensemble infini, ça se complique.....

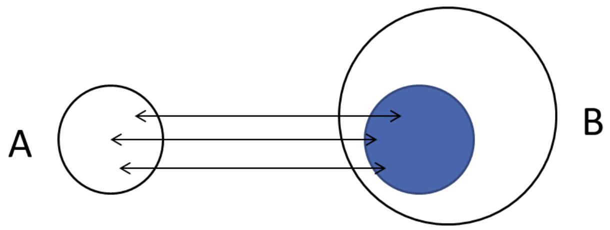
Mais au fond, a-t-on besoin de connaitre le nombre d'éléments de deux ensembles pour les comparer ?

Boite à outils

Vous avez devant vous deux foules immenses. Impossible de compter le nombre de personnes dans chacune. Bien sûr vous pouvez prendre un nombre entre 1 et 100 si vous êtes policier, entre 1000 et 10000 si vous êtes manifestant et communiquer votre chiffre à la presse qui se bornera à le copier dans son article. Mais essayons d'être plus sérieux que ça. Ne pouvons-nous pas demander à une personne de la foule A, une personne de la foule B, de se rapprocher et de quitter la scène ? Au bout d'un moment, s'il reste des personnes de la foule B et pas de la foule A, c'est que la foule B était plus nombreuse.



C'est ce qu'on propose de faire pour comparer des ensembles infinis : si on arrive à définir une bijection de A vers une partie de B, c'est que B « est plus grand » que A.



Exemple 13

L'application de E vers l'ensemble des parties de E, $\wp$(E), qui associe à chaque élément x de E, le singleton {x} est injective. Par conséquent, card(E)≤card($\wp$(E)).

1.8 Fonction caractéristique

Parfois la définition d'un ensemble se complique (imaginer $(A \cap B) \cup (\bar{C} \cap A \cap \bar{D})$ ou toute autre expression de ce type), ou alors on raisonne sur de nombreuses parties de E, ou E contient beaucoup d'éléments ou alors on veut visualiser précisément les éléments de chaque partie. Pour ces cas, les diagrammes de Venn deviennent difficiles à exploiter, pour identifier par exemple l'égalité de deux ensembles, pour retrouver le cardinal d'un ensemble…..etc.

Une alternative est d'utiliser la notion de fonction caractéristique : pour créer une partie de E on prend la liste des éléments de E et on refait une liste avec 0 ou 1 suivant que l'on veut prendre ou pas l'élément dans la partie A que l'on crée.

La fonction caractéristique de A est donc

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \ si \ x \in A \\ 0 \ si \ x \notin A \end{cases}$$

Exemple 14

Soit E={a,b,c} et A={a,b} alors $\chi_A(a) = 1$; $\chi_A(b) = 1$; $\chi_A(a) = 0$

Ainsi quand on utilise la notion de fonction caractéristique, chaque partie de E se trouve alors associée à un mot binaire de longueur n, n étant le nombre d'éléments de E. Dans l'exemple précédent, la partie A est associée au mot 110.

Attention à bien respecter l'ordre de la liste des éléments de E !

Exemple 15

Soit l'ensemble $E = \{1,2,3,4, a, b, c, d\}$. La partie $A = \{2,3,4, a, d\}$ sera associée au mot binaire 01111001.

<u>Que peut-on faire avec ces fonctions caractéristiques ?</u>

Exemple 16

Soit E={a,b,c,d} et A={a,b}. Soit B={a,c}

Le mot 1100 est associé à A. Le mot 1010 est associé à B.

Multiplions un à un les bits de chaque mot, on obtient 1000. Or ce mot est associé à l'ensemble {a} qui se trouve être $A \cap B$!

Ajoutons un à un les bits de chaque mot, on obtient 2120. Enlevons 1 lorsque l'on obtient 2, cela donne 1110. Or ce mot est associé à l'ensemble {a,b,c} qui se trouve être $A \cup B$!

Pour chaque bit d'un même mot, faisons l'opération 1-ce bit. Pour A, soit le mot 1100, on aurait 0011. Or ce mot est associé à l'ensemble {c,d} qui se trouve être $\bar{A}$!

On voit qu'avec les fonctions caractéristiques, on peut faire des opérations (intersection, union,..) sur les ensembles.

Finalement

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$$

$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$$

$$\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$$

On va pouvoir calculer des ensembles avec des équations sur les fonctions caractéristiques.

Exemple 17

Soit l'ensemble $D = (A \cup B) \cap \bar{C}$

$$\begin{aligned}\chi_D = (\chi_{A\cup B}).(1-\chi_C) &= (\chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B).(1-\chi_C) \\ &= \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B - \chi_A\chi_C - \chi_B\chi_C - \chi_A \cdot \chi_B \cdot \chi_C\end{aligned}$$

A quoi cela va nous servir ? 2 choses.

1/ Connaissant la liste des éléments de A, B et C, on peut maintenant aisément retrouver les éléments de D en faisant les opérations sur les mots binaires.

2/ On pourra déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble de façon très simple.

Exemple 18

Soit E={a,b,c,d} et A={a,b}. Soit B={a,c}

Le mot 1100 est associé à A. Si on compte les « 1 » de ce mot, on obtient 2. Ce qui se trouve être card(A). La fonction caractéristique nous donne ainsi immédiatement le nombre d'éléments de l'ensemble.

Exemple 19

Soit $D = (A \cup B) \cap \bar{C}$

$$\begin{aligned}\chi_D = (\chi_{A\cup B}).(1-\chi_C) &= (\chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B).(1-\chi_C) \\ &= \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B - \chi_A\chi_C - \chi_B\chi_C - \chi_A \cdot \chi_B \cdot \chi_C\end{aligned}$$

Dans ce cas,

$$card(D) = card(A) + card(B) - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)$$

Propriétés

On a $A \cap A = A$ donc ces deux ensembles ont la même fonction caractéristique. Or

$$\chi_{A\cap A} = \chi_A \cdot \chi_A = \chi_A$$

Cela simplifie grandement les calculs de fonctions caractéristiques !

Résultat important

Pour 3 ensembles A, B et C

$$card(A \cup B \cup C) = card(A) + card(B) + card(C) - -card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)$$

1.9 Liens utiles du chapitre

Ensembles

- https://www.youtube.com/watch?v=lllLUBZJUIQ
- https://perso.univ-rennes1.fr/laurent.moret-bailly/docpedag/polys/MA2.pdf
- https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9union_disjointe
- http://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./m/morgan.html

Fonction caractéristique

- http://maths.cnam.fr/IMG/pdf/MVA003-6.pdf
https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_caract%C3%A9ristique_(th%C3%A9orie_des_ensembles)

Applications (injection, surjection, bijection)

- https://www.youtube.com/watch?v=ItZCRnMJBOs

Dénombrement

- https://www.youtube.com/watch?v=N-9KeJT98dQ
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Combinaison_(math%C3%A9matiques)
http://ressources.unisciel.fr/sillages/mathematiques/cours_1a_ecs/res/12_Denombrement.pdf
- https://www.youtube.com/watch?v=gxDfhiEXFUc

Activités informatique

- Triangle de Pascal https://www.geogebra.org/m/bbrqfp9n

2 Relations

2.1 Relation, graphe, diagramme sagittal

Soient deux ensembles A et B. Soient a un élément de A et b un élément de B.

Quand on note $a\mathcal{R}b$, on dit qu'il existe une relation entre a et b.

Des exemples vont nous éclairer.

Exemple 20

Dans un village de 500 habitants, il y a plusieurs associations sportives : le foot, le basket, le tennis, la piscine. Dire qu'un habitant 1 est lié au club de foot, c'est dire qu'il est inscrit dans ce club. On noterait $1\mathcal{R}$foot. Bien sûr, l'habitant 1 peut aussi être inscrit au basket et au tennis, et dans ce cas on noterait aussi $1\mathcal{R}$basket et $1\mathcal{R}$tennis.

On a tout de suite envie de représenter graphiquement une relation de ce type par un tableau, en grisant les cases pour indiquer une relation entre l'habitant et le sport. Sur ce tableau, qu'on appelle diagramme cartésien de la relation, on voit immédiatement que l'habitant 2 n'est inscrit ni au club de football, ni au club de tennis ni à la piscine, mais il est inscrit dans le club de basket.

				
Habitant 1				
Habitant 2				
Habitant 3				
Habitant 4				

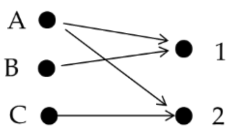
Exemple 21

Soient les ensembles $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1,2\}$.

On suppose que $a\mathcal{R}1$, $a\mathcal{R}2$, $b\mathcal{R}1$ et $c\mathcal{R}2$. On trace ci-dessous son diagramme cartésien. Les cases grisées montrent les relations existantes entre a,b,c et 1,2.

	1	2
a		
b		
c		

On peut aussi représenter cette relation par le diagramme ci-dessous. On parle de diagramme sagittal. Les éléments de A et B sont des points. Une flèche montre la relation entre les éléments de A et ceux de B.



On voit aussi qu'on peut définir un nouvel ensemble, les couples obtenus grâce à la relation $\mathcal{R}$: {(a,1),(a,2),(b,1),(c,2)}.

Cet ensemble est appelé le graphe de la relation. C'est une partie de A×B, produit des ensembles A et B (voir module 1).

Une relation peut donc être vue comme un ensemble. Ici, l'ensemble est défini « en extension » (voir module 1).

Exemple 22

On peut relier par une relation tous les mots de la langue française ayant le même nombre de lettre « e » dans le mot.

Par exemple, maison et zoo sont reliés : ils ne comportent aucune lettre « e ».

Les mots robe et lampe sont reliés : on y trouve une fois la lettre « e ». Les mots robe et cahier sont également reliés.

On voit qu'il est impossible de définir « en extension » le graphe de cette relation, c'est-à-dire représenter dans une liste tous les couples de mots obtenus, comme on avait fait pour l'exemple précédent.

On doit donc définir cet ensemble par un critère. On le définit « en compréhension » (voir cours module 1).

2.2 Relation sur un ensemble $\mathcal{E}$

On va s'intéresser maintenant à une relation entre un ensemble $\mathcal{E}$ et lui-même (on parle de relation binaire, ou de relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble $\mathcal{E}$).

C'était le cas de l'exemple précédent : on avait une relation entre l'ensemble des mots de la langue française et l'ensemble des mots de la langue française.

Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble $\mathcal{E}$ est donnée par l'ensemble des couples (a,b) pour lesquels a est en relation avec b. On note alors $a\mathcal{R}b$.

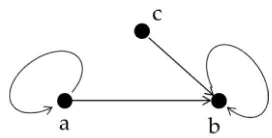
2.3 Propriétés : relation réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive

- Quand $x\mathcal{R}x$ pour tout $x \in \mathcal{E}$, on dit que $\mathcal{R}$ est réflexive
- Si pour tout x et y de $\mathcal{E}$, $x\mathcal{R}y$ implique $y\mathcal{R}x$ alors on dit que $\mathcal{R}$ est symétrique
- Pour $x \neq y$, si on n'a jamais $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors on dit que $\mathcal{R}$ est antisymétrique. On peut aussi définir l'antisymétrie autrement : si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors x=y
- Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ implique $x\mathcal{R}z$ alors on dit que $\mathcal{R}$ est transitive

Le diagramme sagittal d'une relation sur un ensemble est particulier car il faut relier les points …..à eux-mêmes !

Exemple 23

Soit l'ensemble A={a,b,c}. Un exemple de relation sur A serait :



On voit par exemple que $a\mathcal{R}a$, $a\mathcal{R}b$. Mais on n'a pas $a\mathcal{R}c$ ni $c\mathcal{R}c$.

Une flèche qui va d'un point à lui-même est appelée une boucle. Un intérêt du diagramme sagittal est qu'on voit tout de suite si la relation est réflexive : si on observe une boucle à tous les points, elle est réflexive.

2.4 Relation d'équivalence

Une relation d'équivalence sur un ensemble $\mathcal{E}$ est une relation qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence, la classe d'équivalence de x est l'ensemble des y tels que $x\mathcal{R}y$.

2.5 Relation d'ordre, Diagramme de Hasse, Ensemble totalement ordonné

Une relation d'ordre dans un ensemble $\mathcal{E}$ est une relation qui est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

Ainsi une relation notée $\preccurlyeq$ sur $\mathcal{E}$ est une relation d'ordre si pour tous x, y et z éléments de $\mathcal{E}$:

- $x \preccurlyeq x$ (réflexivité)
- $(x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x) \Rightarrow x = y$ (antisymétrie)
- $(x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z) \Rightarrow x \preccurlyeq z$ (transitivité)

Une relation d'ordre dans un ensemble $\mathcal{E}$ permet de comparer ses éléments entre eux de manière cohérente.

Un ensemble ordonné est un ensemble muni d'une relation d'ordre. On dit aussi que la relation définit sur cet ensemble une structure d'ordre ou tout simplement un ordre.

Si $x \preccurlyeq y$, l'élément x est un minorant de y et y est un majorant de x.

Dans les exemples précédents on a vu des moyens de représenter une relation : le diagramme cartésien et le diagramme sagittal.

Si un ensemble ordonné est fini, il peut être représenté graphiquement sous la forme d'un diagramme de Hasse (s'il est infini, on peut dessiner une partie de son diagramme de Hasse).

Dans un diagramme de Hasse :

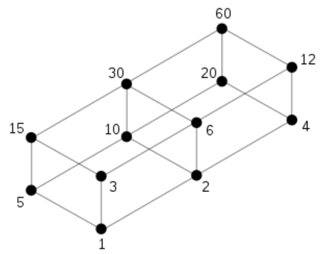
- Les éléments sont représentés par des points.
- La relation entre deux éléments est représentée par une flèche entre deux points. Si $x \preccurlyeq y$, la flèche va de x vers y.
- Pour simplifier le schéma,
- Lorsque $x \preccurlyeq y$, s'il existe z tel que $x \preccurlyeq z \preccurlyeq y$, alors on ne relie pas x à y (on ne représente les flèches qui pourraient se retrouver par transitivité)

- La flèche d'un élément vers lui-même (réflexivité) n'est pas représentée
- On essaie de ne pas croiser les segments.

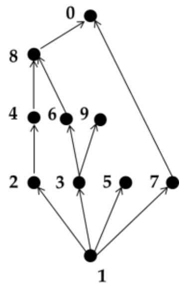
Remarque

Quand on représente aussi les flèches correspondant à la réflexivité, et que l'on n'enlève pas les flèches qui pourraient se retrouver par transitivité, on retrouve le diagramme sagittal. Le diagramme de Hasse est donc une version simplifiée du diagramme sagittal.

Exemple 24



(a)



(b)

Figure 5. (a) Diagramme de Hasse de l'ensemble des diviseurs de 60, A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}, ordonnés par la relation de divisibilité (Wikipédia). Nota : on n'a pas représenté de flèche. Avec cette convention, si x≤y, alors le point représentant x est placé plus bas que celui pour y. Ainsi on voit que 2 divise 6, ce n'est pas 6 qui divise 2. (b) Diagramme de Hasse de la relation de divisibilité pour les entiers entre 0 et 9 (Wikipédia). Tous les entiers entre 1 et 9 divisent 0. 0 ne divise aucun entier entre 1 et 9. 2, 3, 5 et 7 sont premiers : seulement divisibles par eux-mêmes et par 1.

Théorème

L'élément a minore b si et seulement si on peut passer du point qui représente a au point qui représente b en suivant les flèches du diagramme.

Ensemble totalement ordonné

Si pour tous x et y de $\mathcal{E}$ on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$, on dit que l'ensemble $\mathcal{E}$ est totalement ordonné.

Cela veut dire que dans un ensemble totalement ordonné, on peut toujours comparer deux éléments avec la relation d'ordre considérée. Le diagramme de Hasse d'un ensemble totalement ordonné est une chaine.

Exemple 25

Le classement d'une compétition entre 6 joueurs est un ensemble totalement ordonné : on peut bien évidemment toujours comparer le classement (1,2,3,4,5,6) d'un joueur à celui d'un autre joueur. A noter que pour cette relation, le classement à une compétition, on écrirait que 6≼1. Le classement 1 majore le classement 6.

Le diagramme de Hasse obtenu est :

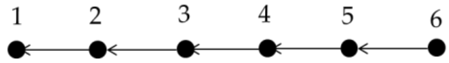


Figure 6. Diagramme de Hasse du classement d'une compétition entre 6 joueurs

Définition

Un ensemble qui n'est pas totalement ordonné est dit partiellement ordonné.

Exemple 26

Dans une organisation hiérarchique, la hiérarchie est une relation d'ordre : « A donne des ordres à B ». En effet elle est réflexive car A donne des ordres à A. Elle est transitive car si A donne des ordres à B et si B donne des ordres à C, alors A donne des ordres à C. Elle est antisymétrique : si A donne des ordres à B, alors B ne donne pas des ordres à A. Par contre, l'ordre n'est pas total car deux personnes peuvent n'avoir aucune relation hiérarchique et l'organigramme serait comme ci-dessous, par exemple.

Cet exemple peut prêter à confusion. Si A donne des ordres à B, et qu'on écrit A$\mathcal{R}$B, alors c'est B qui « majore » A ! Et A est un minorant de B. Le vocabulaire montre des limites et ne nous risquons pas à dire notre responsable hiérarchique que nous le « majorons ». Il est vrai qu'on aurait envie de dire que B reçoit des ordres de A, B$\mathcal{R}$A, pour que A soit un majorant de B.

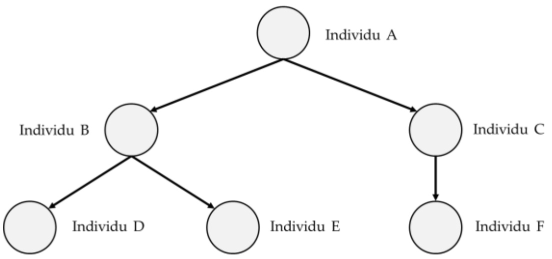


Figure 7. Diagramme de Hasse d'un ensemble partiellement ordonné par le relation "donne des ordres à". On voit qu'on n'a pas de relation entre D et E : aucun des deux ne donne d'ordre à l'autre.

2.6 Eléments maximaux et minimaux, plus grand élément, plus petit élément

Un élément est minimal s'il n'est minoré que par lui-même. Sur le diagramme de Hasse, aucune flèche ne pointe vers un tel élément.

Un élément est maximal s'il n'est majoré que par lui-même. Sur le diagramme de Hasse, aucune flèche ne part d'un tel élément.

Les éléments extrêmaux d'un ensemble ordonné sont les éléments minimaux et les éléments maximaux.

Exemple 27

Sur le diagramme de la Figure 5a, 60 est un élément maximal (c'est d'ailleurs le seul) et 1 est un élément minimal (c'est d'ailleurs le seul).

Sur le diagramme de la Figure 6, 1 est un élément maximal (c'est d'ailleurs le seul) et 6 est un élément minimal (c'est d'ailleurs le seul).

Les exemples précédents sont trompeurs : il n'existe pas forcément un seul élément maximal et un seul élément minimal ! Sur l'ensemble $\mathcal{E}$={a,b,c,d,e,f,g} muni d'une relation d'ordre décrite en Figure 8, on voit que a,b et e sont éléments maximaux. Les éléments d et f sont éléments minimaux.

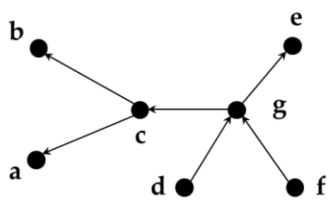


*Figure 8. Diagramme de Hasse d'une relation d'ordre sur **$\mathcal{E}$**={a,b,c,d,e,f,g}*

Définitions

Soit maintenant un ensemble ordonné $\mathcal{E}$.

Le plus petit élément de $\mathcal{E}$, s'il existe, est noté $\inf(\mathcal{E})$. C'est le seul élément de $\mathcal{E}$ tel que $\inf(\mathcal{E}) \preccurlyeq x$ pour tout x de $\mathcal{E}$. Le plus petit élément, s'il existe, minore donc tous les éléments de $\mathcal{E}$.

Le plus grand élément de $\mathcal{E}$, s'il existe, est noté $\sup(\mathcal{E})$. C'est le seul élément de $\mathcal{E}$ tel que $\mathrm{x} \preccurlyeq \sup(\mathcal{E})$ pour tout x de $\mathcal{E}$. Le plus grand élément, s'il existe, majore donc tous les éléments de $\mathcal{E}$.

Exemple 28

Le plus petit élément de la Figure 6 est 6 car 6 minore tous les autres classements. Le plus grand élément est 1.

Le diagramme Figure 7 a un plus petit élément : l'individu A. Il n'y a pas de plus grand élément : aucun élément ne majore tous les autres. Autrement dit, aucun élément ne reçoit des ordres de tous les individus de cette entreprise !

Le diagramme Figure 8 n'a pas de plus grand ni de plus petit élément. On n'a aucun élément x de l'ensemble $\mathcal{E}$ tel que pour tout y de $\mathcal{E}$, x$\preccurlyeq y$. Et on n'a aucun élément x de l'ensemble $\mathcal{E}$ tel que pour tout y de $\mathcal{E}$, y$\preccurlyeq x$.

Théorème

Un ensemble fini possède un plus petit élément si et seulement s'il possède un seul élément minimal. Cet élément minimal est alors le plus petit élément de l'ensemble.

Un ensemble fini possède un plus grand élément si et seulement s'il possède un seul élément maximal. Cet élément maximal est alors le plus grand élément de l'ensemble.

Théorème

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble ordonné fini.

Tout élément de $\mathcal{E}$ est majoré par au moins un élément maximal et minoré par au moins un élément minimal.

Si $\mathcal{E}$ possède un seul élément maximal, c'est nécessairement sup($\mathcal{E}$).

Si $\mathcal{E}$ possède un seul élément minimal, c'est nécessairement inf($\mathcal{E}$).

3 Références

[1], [2], [3]

[1] J. Quinet et J. Fazekas, *Algèbre*, 6 éd. corrigée. in Cours élémentaire de mathématiques supérieures, no. 1. Paris: Dunod, 1976.

[2] J. Vélu, *Méthodes mathématiques pour l'informatique: cours et exercices corrigés*, 5è ed. in Info Sup. Malakoff: Dunod, 2019.

[3] J. Vélu, G. Avérous, I. Gilles, et F. Santi, *Mathématiques pour l'informatique: rappels de cours, méthodes, exercices et problèmes avec corrigés détaillés*. in Sciences sup. Paris: Dunod, 2008.