# Mathématiques

-

# Espaces Vectoriels

Frédéric Menan

fmenan@cesi.fr

11/2024

# Table des matières

# 1 Ensemble, élément, ensemble vide

On nomme **ensemble** une collection d'objets appelés éléments.

Soit E un ensemble.

• Si x est un élément de E, on dit que x appartient à E. On note $x \in E$.

• Si x n'appartient pas à E, on note $x \notin E$.

**Ensemble vide** : ensemble ne contenant aucun élément. On le note $\emptyset$.

# 2 Espace vectoriels et sous-espaces vectoriels

Tout ensemble E non vide, muni d'une loi de composition interne et d'une loi de composition externe ayant les propriétés ci-dessous est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Soient u, v et w des éléments de E et $\lambda$ et $\mu$ des éléments de $\mathbb{K}$.

- La loi de composition **interne** notée + doit vérifier

Interne : $u + v \in E$

Commutativité : $u + v = v + u$

Associativité : $u + (v + w) = (u + v) + w = u + v + w$

Neutre : $0_E + u = u + 0_E = u$ avec $0_E$ élément neutre.

Elément opposé : $u + (-u) = 0_E$

- La loi de composition **externe** notée . doit vérifier

$(\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u$

$\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$

$\lambda.(\mu.u) = (\lambda\mu).u$

$1.u = u$

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs**.

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.

<u>Exemples</u>

L'ensemble des vecteurs du plan est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

L'ensemble des vecteurs de l'espace est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Soit $\mathbb{R}^n$ muni des opérations :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

Pour tout réel $\lambda$,

$$\lambda.(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

($\mathbb{R}^n$,+,.) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

L'ensemble des polynômes de degré au plus n muni du produit par un réel et de l'addition usuelle des polynômes est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

## 2.1 Sous-espaces vectoriels

Un sous-ensemble F **non vide** d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est un **sous-espace vectoriel** de E si, et seulement si :

Pour tout u et v de F,

$$u + v \in F$$

Pour tout u de F et pour tout $\lambda$ de $\mathbb{K}$,

$$\lambda . u \in F$$

Remarque

On peut aussi dire que F, non vide, est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si pour tout u et v de F et pour tout $\lambda$ et $\mu$ de $\mathbb{K}$

$$(\lambda . u + \mu . v) \in F$$

### 2.1.1 Proposition (admise)

Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $0_E \in F$ et si $0_E \notin F$ alors F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

### 2.1.2 Théorème (admis)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un sous-espace vectoriel de E, alors F muni des lois de E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

# 3 Combinaisons linéaires

Soit E un espace vectoriel de $\mathbb{R}$. On appelle **combinaison linéaire** d'une famille de p vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_p$ de E, tout vecteur de la forme

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p$$

Avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour i=1,2,…p

Exemple

$u = (-7, -7,6) = 3(1, -1,2) - 2(5,2,0)$ donc u est une combinaison linéaire des vecteurs $(1, -1,2)$ et $(5,2,0)$.

# 4 Famille libre – famille génératrice – base

## 4.1 Famille libre

Une famille $(u_1, u_2, \dots., u_p)$ de E est une **famille libre** si et seulement si

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$$

On dit aussi que les p vecteurs de la famille sont **linéairement indépendants**.

Si la famille n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée et que les vecteurs sont linéairement dépendants**. Une famille est liée si et seulement si au moins un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Deux vecteurs linéairement dépendants sont dits **colinéaires**. Trois vecteurs linéairement dépendants sont dits **coplanaires**.

Remarque

Si la famille $(u_1, u_2, \dots., u_{p-1})$ est libre et si le vecteur $u_p$ n'est pas combinaison linéaire de $u_1, u_2, \dots., u_{p-1}$, alors la famille $(u_1, u_2, \dots., u_{p-1}, u_p)$ est libre.

Remarque

Une famille contenant le vecteur nul n'est pas libre.

Exemple

Dans l'espace vectoriel des polynômes de degré 3, $\{1; 1+u; 1+u^2; 1+u^3\}$ est une famille libre.

## 4.2 Famille génératrice

On dit que les vecteurs $u_1, u_2, \dots., u_p$ forment une **famille génératrice** de l'espace vectoriel E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots., u_p$.

Ainsi, $u_1, u_2, \dots., u_p$ est une famille génératrice si et seulement si

$$\forall\, u \in E, \exists\, (\lambda_i)_{i=1,2,\dots,p} \in \mathbb{R} \text{ tels que } u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p$$

On dit alors que les vecteurs $u_1, u_2, \dots., u_p$ engendrent E.

Notation

Soit F une partie non vide de E.

On note **Vect(F)** l'ensemble des vecteurs u de E pouvant s'écrire sous la forme

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$$

Avec $n \in \mathbb{N}^*$, $u_1, u_2, \dots, u_n$ des vecteurs de F et $\lambda_1$ des réels.

Vect(F) est un sous-espace vectoriel (proposition admise).

On dit que Vect(F) le sous-espace engendré par F.

Exemple

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, la famille constituée des vecteurs $x_1 = (1,1)$ $x_2 = (1,-1)$ et $x_3 = (0,1)$ est génératrice. En effet, tout vecteur $x = (u_1, u_2)$ peut s'écrire sous la forme

$$x = \frac{u_1}{2}.x_1 + \frac{u_1}{2}.x_2 + u_2 x_3$$

Ou encore sous la forme

$$x = u_1 x_2 + (u_1 + u_2)x_3$$

## 4.3 Propositions (admises)

- {x} est une famille libre ⟺ x≠0
- Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.
- Toute famille contenant une famille liée est liée.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

## 4.4 Base d'un espace vectoriel

On appelle **base** d'un espace vectoriel E toute famille à la fois libre et génératrice de E.

Si $(u_1, u_2, \ldots., u_n)$ est une base de E, tout vecteur u de E s'exprime de façon unique dans cette base :

$$\forall\, u \in E, \exists\, (\lambda_i)_{i=1,2,\ldots,n} \in \mathbb{R} \text{ tels que } u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$$

Les scalaires $\lambda_i$ sont alors appelés **coordonnées** (ou **composantes**) de u dans la base $(u_1, u_2, \ldots., u_n)$.

Tout espace vectoriel admet au moins une base.

Toutes les bases d'un même espace vectoriel de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est la **dimension** de E, notée dim(E).

### 4.4.1 Théorème (admis)

Dans un espace vectoriel E non vide, de dimension finie, il existe toujours une base

### 4.4.2 Théorème (admis

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et G une partie génératrice de E. Alors on peut trouver une base de E constituée d'éléments de G.

# 5 Application, application linéaire, rang, image, noyau

Soient E et F deux espaces vectoriels de $\mathbb{R}$. Une **application** f de E dans F est une relation qui à tout élément u de E associe l'élément unique f(u) de F.

L'application est dite **linéaire** quand elle possède les deux propriétés suivantes :

$$\forall(u,v)\in E^2 \qquad f(x,y)=f(x)+f(y)$$

$$\forall u\in E\ et\ \forall\lambda\in\mathbb{R} \qquad f(\lambda x)=\lambda.f(x)$$

On appelle **noyau** de f, noté Ker f, l'ensemble des vecteurs dont l'image par f est le vecteur nul $0_F$ de F (élément neutre).

On appelle **image** de f, noté Im f, l'ensemble des vecteurs y de F tels qu'il existe un vecteur x de E vérifiant $f(x)=y$.

On appelle **rang** de l'application linéaire f, noté $rg(f)$, la dimension du sous-espace image f(E).

Remarque

$$\dim(Im\ f)+\dim(Ker\ f)=\dim E$$

$$rg(f)=\dim E-\dim(Ker\ f)$$

Exemple

Soient des constantes a,b,c,d,e,f réelles. L'application h de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$h\big(u(x,y,z)\big)=v(x',y')$$

Et telle que $\begin{cases}x'=ax+by+cz\\y'=dx+ey+fz\end{cases}$ est une application linéaire.

# 6 Endomorphisme

Un endomorphisme d'espace vectoriel E est une application linéaire $f : E \rightarrow E$

# 7 Produit scalaire, norme euclidienne, famille orthonormale, famille orthogonale, inégalité de Bessel

Un **produit scalaire** est une forme bilinéaire, symétrique, définie et positive. C'est-à-dire une application $\varphi$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

- Pour tout $u \in E, v \to \varphi(u, v)$ est linéaire et pour tout $v \in E, u \to \varphi(u, v)$ est linéaire. On parle de **bilinéarité**.
- $\forall (u, v) \in E^2 \qquad \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$ (symétrique)
- $\forall u \in E \qquad \varphi(u, u) \geq 0$ (positive)
- $\forall u \in E \qquad \varphi(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$

On note $\varphi(u, v) = \langle u | v \rangle$.

La **norme euclidienne** associée au produit scalaire $\varphi$ est l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall u \in E \qquad \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Une **famille orthogonale** de E est une famille où tous les vecteurs sont orthogonaux deux à deux (leur produit scalaire est nul).

Une **famille orthonormale, ou base orthonormale,** de E est une base de E, constituée de vecteurs de norme euclidienne 1 et orthogonaux deux à deux (leur produit scalaire est nul).

Exemple

$E = \mathbb{R}^2$. $x(x_1, x_2)$ et $y(y_1, y_2)$ et

$$\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 2x_2 y_1 + 5x_1 y_2$$

Linéarité à gauche

$\forall (x, x', y)$ tels que $x = (x_1, x_2)$ et $x' = (x_1', x_2')$ et $y = (y_1, y_2)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda x + x' | y \rangle = (\lambda x_1 + x_1')y_1 + 2(\lambda x_2 + x_2') + 2(\lambda x_2 + x_2')y_1 + 5(\lambda x_1 + x_1')y_2$$

$$\langle \lambda x + x' | y \rangle = \lambda \langle x | y \rangle + \langle x' | y \rangle$$

Symétrie

On voit immédiatement que $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$

On voit aussi que le produit scalaire est linéaire à droite.

$$\langle x | x \rangle = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 5x_2^2 \geq 0$$

De plus

$$\langle x | x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

## 7.1 Inégalité de Bessel

$$\forall u \in E \qquad \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k \rangle^2 \leq \|u\|^2$$

Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille orthonormale de E.

# 8 Espace euclidien et espace préhilbertien

Un espace préhilbertien réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire.

Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

# 9 Inégalité de Cauchy-Schwartz

Soit E un espace préhilbertien réel. Alors $\forall (x, y) \in E^2$

$$|\langle x|y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$$

# 10 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

## 10.1 Introduction

Si $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une famille libre de E, espace vectoriel de dimension finie, il existe une unique famille orthonormale $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ telle que

$$\forall k \in [\![1;p]\!] \qquad Vect(u_1, u_2, \dots, u_k) = Vect(e_1, e_2, \dots, e_k)$$

$$\forall k \in [\![1;p]\!] \qquad \langle e_k, u_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*$$

Par conséquent, tout espace vectoriel euclidien admet une base orthonormale.

Remarques

$Vect(u_1, u_2, \dots, u_k)$ est le sous-espace engendré par les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_k$.

$Vect(u_1, u_2, \dots, u_k)$ est le sous-espace engendré par les vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_k$.

L'ensemble $[\![1;p]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre 1 et k.

## 10.2 Création d'une base orthonormée : orthonormalisation de Gram-Schmidt

Par cette méthode, on crée une base orthonormée. Elle est constituée de vecteurs normaux entre eux (leur produit scalaire est nul) et de norme 1.

On crée tout d'abord une base orthogonale $(v_i)$. Les vecteurs de cette base sont orthogonaux entre eux mais pas de norme 1.

Partant d'une base quelconque $(e_i)$.

On définit $v_1$ tel que $v_1 = e_1$.

On définit ensuite $v_2$ tel que $v_2 = e_2 + \alpha . v_1$ avec $\alpha$ tel que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

On définit ensuite $v_3$ tel que $v_3 = e_3 + \beta v_1 + \gamma v_2$ avec $\beta$ et $\gamma$ tels que $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$ et $\langle v_2, v_3 \rangle = 0$.

On continue de telle sorte à obtenir une base orthogonale $(v_i)$.

Il reste à normer les vecteurs $(v_i)$ pour obtenir une base orthonormale.

On définit les vecteurs $(u_i)$ tels que

$$u_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère la base

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On souhaite transformer cette base en une base orthonormale.

Soit la base orthogonale $(v_1, v_2, v_3)$. On crée cette base de la façon suivante :

$$v_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = e_2 + \alpha . v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tel que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Alors

$$\langle v_2, v_1 \rangle = \alpha + 1 + \alpha + 1 + \alpha = 2 + 3\alpha = 0$$

Ainsi, $\alpha = -\frac{3}{2}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

On définit ensuite

$$v_3 = e_3 + \beta v_1 + \gamma v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta - \frac{2\gamma}{3} \\ \beta + \frac{\gamma}{3} \\ 1 + \beta + \frac{\gamma}{3} \end{pmatrix}$$

Tel que $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$ et $\langle v_2, v_3 \rangle = 0$. Alors

$$\begin{cases} \beta - \frac{2\gamma}{3} + \beta + \frac{\gamma}{3} + 1 + \beta + \frac{\gamma}{3} = 0 \\ -\frac{2}{3} . \left( \beta - \frac{2\gamma}{3} \right) + \frac{1}{3} . \left( \beta + \frac{\gamma}{3} \right) + \frac{1}{3} . \left( 1 + \beta + \frac{\gamma}{3} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\beta = -1 \\ -2. \left( \beta - \frac{2\gamma}{3} \right) + \left( \beta + \frac{\gamma}{3} \right) + \left( 1 + \beta + \frac{\gamma}{3} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = -\frac{1}{3} \\ -2. (-1 - 2\gamma) + (-1 + \gamma) + (-1 + \gamma) = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = -\frac{1}{3} \\ 2 + 4\gamma - 1 + \gamma - 1 + \gamma = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = -\frac{1}{3} \\ \gamma = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} \beta - \frac{2\gamma}{3} \\ \beta + \frac{\gamma}{3} \\ 1 + \beta + \frac{\gamma}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\ 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Il reste maintenant à normer les vecteurs $v_i$ obtenus. Pour cela on divise leurs composantes par la norme du vecteur.

$\|v_1\| = \sqrt{3}$ ; $\|v_2\| = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ; $\|v_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \sqrt{2}.\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La base $(u_1, u_2, u_3)$ est une base orthonormée.

<u>Remarque</u>

On peut appliquer la méthode de Gram-Schmidt à une base quelconque.

## 10.3 Théorème (admis)

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E, espace euclidien, alors

$$\forall x \in E \; x = \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i \rangle . e_i$$

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} x_i . e_i \quad et \quad \forall y = \sum_{i=1}^{n} y_i . e_i \qquad \langle x|e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$$

# 11 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

## 11.1 Définitions

Soit E un espace préhilbertien réel. $(x, y) \in E^2$. On dit que x et y sont orthogonaux si et seulement si

$$\langle x|y\rangle = 0$$

On note $x \perp y$.

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace de E. On appelle orthogonale de F, noté $F^{\perp}$, l'ensemble

$$F^{\perp} = \{x \in E | \forall y \in F, x \perp y\}$$

Exemple

E est l'ensemble des fonctions continues de [a,b] à valeurs dans ℝ avec

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Soit $f : x \to x$ et $g : x \to 2x^2 - 1$

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 x.(2x^2 - 1)dx = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 0$$

Donc $f \perp g$.

## 11.2 Théorème

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace de dimension finie.

Pour tout x de E, il existe un unique vecteur y de F tel que $x - y \in F^{\perp}$

# 12 Exercices

#### 12.1.1.1 Exercice : espace vectoriel ?

Soit $\mathbb{R}^{+*}$ muni d'une addition notée $\oplus$ définie par $x \oplus y = xy$ et d'une multiplication par un scalaire réel définie par $\lambda . x = x^{\lambda}$.

Montrer que $(\mathbb{R}^{+*}, \oplus, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

**Correction**

$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$

- $x . y \in \mathbb{R}^{+*}$ (interne)
- $x \oplus y = y \oplus x = xy = yx$ (commutative)
- $(x \oplus y) \oplus z = xyz$ et $x \oplus (y \oplus z) = xyz$ (associative)
- $x \oplus 1 = 1 \oplus x = x$ (neutre)
- $x \oplus 1/x = 1/x \oplus 1 = 1$ (symétrique)

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$

- $\lambda (x \oplus y) = (xy)^{\lambda} = x^{\lambda} . y^{\lambda} = x^{\lambda} \oplus y^{\lambda} = \lambda x \oplus \lambda y$
- $(\lambda + \mu) x = x^{\lambda + \mu} = x^{\lambda} . x^{\mu} = x^{\lambda} \oplus x^{\mu} = (\lambda x) \oplus (\mu x)$
- $\lambda (\mu x) = \lambda x^{\mu} = x^{\lambda \mu} = \left(x^{\lambda}\right)^{\mu} = (\lambda x) \mu$
- $1 . x = x^1 = x$

#### 12.1.1.2 Exercice : Gram Schmidt

Soit l'espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit la famille $(V_1, V_2, V_3)$ telle que

$V_1 = (1, -1,1)$ $V_2 = (1,0,0)$ et $V_3 = (1, -1,0)$.

1/ Montrer que la famille est libre

2/ En déduire une base orthonormale par la méthode de Gram-Schmidt

**Correction**

2/ On obtient

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, -1,1)$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2,1, -1)$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0,1,1)$$

### 12.1.1.3 Exercice : séries de Fourier

Soit T>0.

On considère $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions T-périodiques continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ car c'est un sous-espace de l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

On muni $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{T}.\int_0^T f(t).g(t).dt$$

Soient les fonctions, pour tout entier naturel n, :

$$c_n = \cos(n\omega t)$$

Et pour n≠0

$$s_n = \sin(n\omega t)$$

Avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$

1/ On considère la famille $\mathcal{F} = \{c_n|n \in \mathbb{N}\} \cup \{s_n|n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille orthogonale.

2/ En déduire une base orthonormale de $E_n = vect(\{c_n|0 \leq k \leq n\} \cup \{s_n|1 \leq k \leq n\})$

3/ Déterminer l'expression de $p_n(f)$, projeté orthogonal de la fonction f sur $E_n$

## Correction

1/ Il faut montrer que pour tout m, pour tout n

$$\langle c_m|c_n\rangle = 0$$

$$\langle s_m|s_n\rangle = 0$$

$$\langle s_m|c_n\rangle = 0$$

$$\langle c_m|c_n\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos m\omega t\,.\cos n\omega t\,.dt$$

Si $m \neq n$,

$$\langle c_m|c_n\rangle = \frac{1}{2T}.\left[\frac{\sin(m+n)\omega t}{(m+n)\omega} + \frac{\sin(m-n)\omega t}{(m-n)\omega}\right]_0^T = 0$$

Si $m = n$,

- si $n \neq 0$,

$$\langle c_n|c_n\rangle = \frac{1}{2\mathrm{T}}\left[\frac{\sin 2n\omega t}{2n\omega} + t\right]_0^T = \frac{1}{2} = \|c_n\|^2$$

- si $n = 0$,

$$\|c_0\|^2 = \frac{1}{2T}.[2t]_0^T = 1$$

$$\langle s_m|s_n\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \sin m\omega t\,.\sin n\omega t\,.dt$$

Si $m \neq n$, $\langle s_m|s_n\rangle = 0$

Si $m = n$,

$$\langle s_n|s_n\rangle = \frac{1}{2T}\int_0^T (1-\cos 2n\omega t)dt = \frac{1}{2} = \|s_n\|^2$$

Pour m entier naturel non nul et n entier naturel :

$$\langle s_m|c_n\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \sin m\omega t\,.\cos n\omega t\,.dt = \frac{1}{2T}.\int_0^T \sin(m+n)\omega t + \sin(m-n)\omega t\,.dt$$

Si $m \neq n$

$$\langle s_m|c_n\rangle = \frac{1}{2T}.\left[\frac{-\cos(m+n)\omega t}{(m+n)\omega} - \frac{\cos(m-n)\omega}{(m-n)\omega}\right]_0^T = 0$$

Si $m = n$

$$\langle s_n|c_n\rangle = \frac{1}{2T}.\left[\frac{-\cos 2n\omega t}{(2n)\omega}\right]_0^T = 0$$

2/ Une base orthonormale de En est

$$\{c_0\} \cup \{\sqrt{2}.c_k|1 \leq k \leq n\} \cup \{\sqrt{2}.s_k|1 \leq k \leq n\}$$

3/ Soit $p_n(f)$ le projeté orthogonal de f sur En

$$p_n(f) = \langle c_0|f\rangle.c_0 + \sum_{k=1}^{n}\langle\sqrt{2}.c_k|f\rangle.\sqrt{2}.c_k + \sum_{k=1}^{n}\langle\sqrt{2}.s_k|f\rangle.\sqrt{2}.s_k$$

$$\langle c_0|f\rangle = \frac{1}{T}.\int_0^T f(t).dt$$

On appelle cette grandeur $a_0(f)$

$$\langle c_k|f\rangle = \frac{1}{T}.\int_0^T f(t).\cos k\omega t\,.dt = \frac{1}{2}.a_k(f)$$

$$\langle s_k|f\rangle = \frac{1}{T}.\int_0^T f(t).\sin k\omega t\,.dt = \frac{1}{2}.b_k(f)$$

$$p_n(f) = a_0(f).c_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k(f).c_k + \sum_{k=1}^{n} b_k(f).s_k$$

Pour tout t

$$p_n(f)(t) = a_0(f)(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(f).\cos k\omega t + \sum_{k=1}^{n} b_k(f).\sin k\omega t$$

On retrouve la série de Fourier associée à la fonction f.

#### 12.1.1.4 Exercice : espace vectoriel

Montrer que $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire suivantes n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$k(a, b) = (k^2a, k^2b)$$

### Correction

$$(k + m)(a, b) = ((k + m)^2a, (k + m)^2b)$$
$$k(a, b) + m(a, b) = (k^2a + m^2a, k^2b + m^2b) \neq (k + m)(a, b)$$

Or La loi de composition externe notée . doit vérifier $(\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u$

#### 12.1.1.5 Exercice : espace vectoriel

Montrer que $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire suivantes n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

$$(a, b) + (c, d) = (a, b)$$
$$k(a, b) = (ka, kb)$$

### Correction

L'addition n'est pas commutative. $u + v \neq v + u$

#### 12.1.1.6 Exercice : espace vectoriel ?

Montrer que $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et multiplication par un scalaire telles que ci-dessous n'est pas un espace vectoriel.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$k(a, b) = (ka, b)$$

### Correction

Soient m et k deux réels

$$(m+k)(a,b) = \big((m+k)a, b\big) = (ma+ka, b)$$

$$m(a,b) + k(a,b) = (ma,b) + (ka,b) = (ma+ka, 2b)$$

$$(m+k)(a,b) \neq m(a,b) + k(a,b)$$

#### 12.1.1.7 Exercice : sous-espace vectoriel

Dans $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni des lois habituelles, on considère le sous-ensemble suivant :

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$$

$V_1$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ?

### Correction

Rappel de cours : un sous-ensemble F **non vide** d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est un **sous-espace vectoriel** de E si, et seulement si pour tout u et v de F, $u + v \in F$ et pour tout u de F et pour tout $\lambda$ de $\mathbb{K}$, $\lambda . u \in F$.

Le sous-ensemble $V_1$ n'est pas vide car il contient (0,0,0).

Soient (x,y,z) et (x',y',z') deux éléments quelconques de $V_1$ et $\lambda$ un scalaire quelconque.

Soit $\alpha = (x,y,z) + \lambda.(x',y',z')$, alors $\alpha = (x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z') = (x+\lambda x', y+\lambda y', 0)$.

Donc $\alpha \in V_1$. Finalement, $V_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

#### 12.1.1.8 Exercice : sous-espace vectoriel

Dans $\mathbb{R}^3$ muni des lois habituelles, les sous-ensembles ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \right\}$$

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x-y)^2 = 2x + y\}$$

### Correction

F n'est pas vide car il contient (0,0,0). Soient u et v des éléments de F et $\lambda$ un réel, alors $u + v \in F$ et $\lambda . u \in F$ donc F est un sous-espace vectoriel. Pour G, l'élément u=(0,1,0) appartient à G car on a bien $(0-1)^2 = 2 \times 0 + 1$. Si G est un sous-espace vectoriel il doit être stable par multiplication. Or pour l'élément $-u$: $(0-(-1))^2 \neq 2 \times 0 + (-1)$ donc l'élément $-1 \times u$ n'appartient pas à G. G n'est pas un sous-espace vectoriel.

#### 12.1.1.9 Exercice : combinaison linéaire

Dans $\mathbb{R}^3$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ écrire le vecteur $v = (-1,2,5)$ comme combinaison linéaire des vecteurs

$$e_1 = (1,1,1), e_2 = (1,2,3), e_3 = (2,-1,1)$$

## Correction

Coefficients $(-6,3,2)$

```
import numpy as np
from scipy import linalg
# On veut résoudre le système A.X=B. On sait que la solution est X=inv(A).B
# Définition de la matrice du système linéaire
A = np.array([(1,1,2),(1,2,-1),(1,3,1)])
print('matrice du système linéaire')
print(A)
print('')
# Calcul du déterminant
detA=linalg.det(A)
print('determinant de A =',detA)
print('')
# Définition du second membre
B = np.array([(1),(-2),(5)])
print('second membre =',B)
print('')
# Inverse de la matrice A
iA = linalg.inv(A)
print('inverse de A')
print(iA)
print('')
# Calcul de X
X=iA.dot(B)
print('solution X =',X)
print('')
```

### 12.1.1.10 Exercice : combinaison linéaire

Dans $\mathbb{R}^3$ espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ écrire le vecteur $v = (2, -5,3)$ comme combinaison linéaire des vecteurs

$$e_1 = (1, -3,2), e_2 = (2, -4,1), e_3 = (1, -5,7)$$

## Correction

Pas de solution, on ne peut pas écrire v comme combinaison linéaire de ces 3 vecteurs.

### 12.1.1.11 Exercice : combinaison linéaire

Pour quelles valeurs de k le vecteur $u = (1, -2, k)$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs

$$v = (3,0,2), w = (2, -1, -5)$$

## Correction

On peut écrire la matrice formée par ces 3 vecteurs et chercher les valeurs de k qui annulent son déterminant.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -5 & k \end{vmatrix} = -3k - 8 + 2 - 30 = 0 \Leftrightarrow k = 12$$

### 12.1.1.12 Exercice : combinaison linéaire

On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ qui admet

$$e_1 = (2,1,0), e_2 = (1,-1,2), e_3 = (0,3,-4)$$

comme partie génératrice.

A quelle condition sur $x$,$y$ et $z$ l'élément $(x,y,z)$ appartient-il à F ?

## Correction

Il doit exister trois réels $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$ tels que

$$(x,y,z) = \lambda_1.e_1 + \lambda_2.e_2 + \lambda_3.e_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Il faut alors : $2x - 4y - 3z = 0$

### 12.1.1.13 Exercice : famille génératrice

La famille $\{(1,1);(1,-1)\}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^2$ ?

## Correction

Soit (a,b) un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$. A-t-on $(a,b) = x(1,1) + y(1,-1)$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ?

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$$

Donc la famille $\{(1,1);(1,-1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

### 12.1.1.14 Exercice : famille libre

La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ d'éléments de $\mathbb{R}^3$ avec $v_1 = (1,1,-1)$ $v_2 = (2,1,3)$ et $v_3 = (0,-1,5)$ est-elle libre ? est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$ ? quelle relation lie ces vecteurs ? quel est l'espace qu'ils engendrent ?

## Correction

On voit que

$$v_3 = -2v_1 + v_2$$

La famille n'est pas libre et pas génératrice car la dimension de l'espace qu'elle engendre est 2.

### 12.1.1.15 Exercice : famille libre

Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\{(1 \quad 1 \quad -1), (0 \quad 2 \quad 1), (0 \quad 0 \quad 5)\}$ est-elle libre ?

## Correction

$$\lambda_1(1,1,-1)+\lambda_2(0,2,1)+\lambda_3(0,0,5)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_1+2\lambda_2=0 \\ -\lambda_1+\lambda_2++5\lambda_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=0 \\ \lambda_3=0 \end{cases}$$

La famille est libre.

### 12.1.1.16 Exercice : éléments indépendants

Dans l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles définies sur l'intervalle [0,1] de $\mathbb{R}$, les fonctions suivantes sont-elles linéairement indépendantes ?

$$f: x \to 1 \quad g: x \to \sqrt{x} \quad h: x \to x^2$$

## Correction

Une famille $(u_1, u_2, \dots., u_p)$ de E est une **famille libre** si et seulement si

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$$

Soit pour tout x de [0,1]

$$\alpha . f(x) + \beta . g(x) + \gamma . h(x) = 0$$

Cette égalité doit être vraie pour tout x de [0,1] donc pour $x=0$,

$$\alpha . f(0) + \beta . g(0) + \gamma . h(0) = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$$

$$\beta . g(x) + \gamma . h(x) = 0 \Leftrightarrow \beta . \sqrt{x} + \gamma . x^2 = 0 \Leftrightarrow \beta + \gamma . \frac{x^2}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$$

Finalement, $\gamma = 0$ donc

$$\alpha . f(x) + \beta . g(x) + \gamma . h(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

La famille est libre, les fonctions f,g,h sont linéairement indépendantes. On ne peut écrire aucune des trois fonctions avec une combinaison linéaire des deux autres.

### 12.1.1.17 Exercice : éléments indépendants

Dans l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles définies sur l'intervalle [0,1] de $\mathbb{R}$, les fonctions suivantes sont-elles linéairement indépendantes ?

$$f: x \to 1 \quad g: x \to \left|x - \frac{1}{2}\right| \quad h: x \to x^2$$

## Correction

Une famille $(u_1, u_2, \dots., u_p)$ de E est une **famille libre** si et seulement si

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$$

Soit pour tout x de [0,1]

$$\alpha. f(x) + \beta. g(x) + \gamma. h(x) = 0$$

Cette égalité doit être vraie pour tout x de [0,1] donc

Pour $x = 0$

$$\alpha + \frac{\beta}{2} = 0$$

Pour $x = \frac{1}{2}$

$$\alpha + \frac{\gamma}{4} = 0$$

Pour $x = 1$

$$\alpha + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$$

Finalement, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ donc

$$\alpha. f(x) + \beta. g(x) + \gamma. h(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

La famille est libre, les fonctions f,g,h sont linéairement indépendantes. On ne peut écrire aucune des trois fonctions avec une combinaison linéaire des deux autres.

#### 12.1.1.18 Exercice : produit scalaire

En considérant l'espace vectoriel E des fonctions continues sur [a,b] à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

montrer que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

### Correction

Inégalité de Cauchy-Schwartz : $|\langle x|y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$. $\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$ et $\|g\| = \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$
Donc

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

#### 12.1.1.19 Exercice : produit scalaire

Soit E l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à 2, muni du produit scalaire

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(x).g(x).dx$$

Déterminer une base du sous-espace vectoriel V orthogonal à h définie par $h(x) = 2x - 1$.

V est l'ensemble des vecteurs f de E pour lesquels $\langle h|f\rangle = 0$.

## Correction

Soit f un élément de V tel que

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Alors

$$\langle f|h\rangle = \int_0^1 f(x).h(x).dx = 0$$

$$\int_0^1 (2x-1).(ax^2+bx+c).dx = 0 \Leftrightarrow a + b = 0$$

### 12.1.1.20 Exercice : solutions d'une équation différentielle

Soit a une fonction et y une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (1)

$$y' + a.y = 0$$

1/ Soit $S_H$ l'ensemble des solutions de l'équation (1)

Montrer que l'ensemble $S_H$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (fonctions dérivables et dont la dérivée est continue)

2/ Montrer que la fonction $\varphi = e^A$ avec A primitive de a, est une base de $S_H$

3/ Soient les réels $x_0$ et $y_0$. Montrer qu'il existe une unique solution $\phi$ de $S_H$ vérifiant

$$\phi(x_0) = y_0$$

## Correction

1/ $0 \in S_H$ donc $S_H$ n'est pas l'ensemble vide

Soient $\varphi$ et $\Psi$ deux éléments de $S_H$ et $\lambda$ un réel.

$\varphi' = a.\varphi$ donc $\lambda\varphi' = a.(\lambda\varphi)$

$\Psi' = \mathrm{a}.\Psi$ donc $\lambda\varphi' + \Psi' = (\lambda\varphi' + \Psi') = a.\lambda\varphi + a.\Psi = \mathrm{a}.(\lambda\varphi + \Psi)$

$S_H$ est donc un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2/ Soit A une primitive de a et $\varphi = e^A$. Alors

$$\varphi' = A'.e^A = a.e^A = a.\varphi$$

Donc la fonction $\varphi$ est une solution de (1). Soit la fonction $\Psi \in S_H$. Comme $\varphi = e^A$, $\varphi$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction $k = \Psi/\varphi$.

Alors $\Psi = k.\varphi$ et on a

$$\Psi' = k'.\varphi + k.\varphi' = a.\Psi$$

Or $a.\Psi = a.k.\varphi$ et $\varphi' = a.\varphi$ donc

$$\Psi' = k'.\varphi + ak\varphi = ak\varphi$$

Finalement, $k'.\varphi = 0$ et comme $\varphi$ ne s'annule pas, $k' = 0$ et k est une constante.

On a montré que $\varphi = e^A$ et que si $\Psi \in S_H$, alors $\Psi = k.\varphi$ avec k constante.

Donc $\{\varphi\}$ est une base de $S_H$ donc $\dim_{\mathbb{R}} S_H = 1$. Une base de $S_H$ est $e^A$ avec A primitive de a.

3/ Les solutions de (1) sont de la forme $\phi = k.e^A$

Il existe une solution satisfaisant à la condition $\phi(x_0) = y_0$ si :

$$y_0 = k.e^{A(x_0)}$$

Donc $k = y_0.e^{-A(x_0)}$. L'unique fonction $\phi$ solution de (1) et vérifiant la condition est :

$$\phi(x) = y_0.e^{-A(x_0)}.e^{A(x)} = y_0.e^{A(x)-A(x_0)} = y_0.e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$$

# 13 Références

[1]

[1] J. Quinet et J. Fazekas, *Algèbre*, 6 éd. corrigée. in Cours élémentaire de mathématiques supérieures, no. 1. Paris: Dunod, 1976.