# Mathématiques

-

# Calcul Booléen

Frédéric Menan

fmenan@cesi.fr

# Table des matières

# 1 Calcul booléen

## 1.1 Références historiques, notions diverses

- Boole
- de Morgan
- Shannon
- Alan Turing

## 1.2 Borne inférieure, borne supérieure

Rappel : soit une relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur un ensemble $\mathcal{E}$. Si $x \preccurlyeq y$, on dit que l'élément x est un minorant de y et y est un majorant de x.

Quand l'ensemble des majorants communs à x et y possède un plus petit élément, on le note sup(x,y) ou encore $x \vee y$, et on l'appelle borne supérieure de x et y.

Quand l'ensemble des minorants communs à x et y possède un plus grand élément, on le note inf(x,y) ou encore $x \wedge y$, et on l'appelle borne inférieure de x et y.

*Exemple 1*

On ordonne les éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$={a,b,c,d,e,f,g,h} comme sur le diagramme de Hasse ci-dessous.

Les majorants de c sont g, d, et h.

Les majorants de f sont g et h.

Les majorants communs à c et f sont g et h. De plus, g est plus petit élément de l'ensemble {g,h}.

Par conséquent, $c \vee f = g$.

De même on a $c \wedge f = b$.

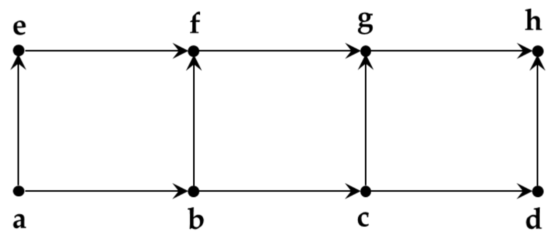



*Figure 1.*

<u>Propriétés</u>

Si on note a∨b la borne sup de a, b et a∧b la borne inf on montre

- a∨b=b∨a et a∧b=b∧a (commutativité)
- x∧(y∨z)=(x∧y)∨z et x∨(y∧z)=(x∨y)∧z (associativité)
- x∨x=x et x∧x=x (idempotence)
- x∧(x∨y)=x = x∨(x∧y) (absorption)

## 1.3 Treillis

<u>Définition</u>

Un ensemble ordonné $\mathcal{E}$ tel que tout couple (a,b) a une borne supérieure et une borne inférieure est appelé treillis (voir Exemple 1).

<u>Définition</u>

Soit x un élément, x' est un complément de x quand $x \wedge x' = \inf(\mathcal{E})$ et quand $x \vee x' = \sup(\mathcal{E})$.

Un treillis est dit complémenté quand chaque élément est complémenté.

*Exemple 2*

Sur le diagramme de la Figure 2, d et c sont des compléments de b.

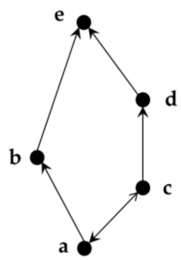



*Figure 2*

<u>Définition</u>

On dit qu'un treillis est distributif quand chaque opération ∧ et ∨ est distributive par-rapport à l'autre.

*Exemple 3*

Le treillis de la Figure 3 n'est pas distributif. En effet, on a $b \vee c = e$ et $d \wedge e = d$. Par conséquent, $d \wedge (b \vee c) = d$. Par ailleurs, $d \wedge b = a$ et $d \wedge c = a$ donc $(d \wedge b) \vee (d \wedge c) = a$. On voit donc que $d \wedge (b \vee c) \neq (d \wedge b) \vee (d \wedge c)$

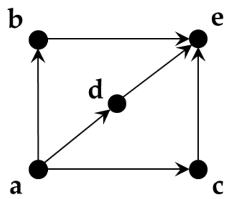



*Figure 3*

## 1.4 Algèbre de Boole

On appelle algèbre de Boole un treillis qui est distributif et complémenté.

*Figure 4. George Boole (1815-1864) ([https://georgeboole200.ucc.ie/#](https://georgeboole200.ucc.ie/#))*

Arrêtons-nous un peu dans tous ces termes et faisons une petite pause.

On a dit qu'un treillis était un ensemble ordonné avec une propriété supplémentaire : tout couple (a,b) a une borne supérieure et une borne inférieure.

Une algèbre de Boole est donc un ensemble (une collection d'éléments) où l'on a défini une relation d'ordre, cette relation possédant des propriétés particulières : tout couple (a,b) a une borne supérieure et une borne inférieure, tout élément a un complément, et chaque opération ∧ et ∨ est distributive par-rapport à l'autre.

*Exemple 4*

L'ensemble des mots binaires de longueur n, $\mathbb{B}^n$, est une algèbre de Boole.

<u>Théorème</u>

Chaque élément d'une algèbre de Boole possède un et un seul complément. On note $\bar{x}$ le complément de x (pour démontrer ce théorème, on suppose que x possède deux compléments y et z, et on montre que y=z)

## 1.5 Théorème de Stone

Toute algèbre de Boole finie a pour nombre d'éléments une puissance de 2.

Pour tout n≥0, il existe des algèbres de Boole ayant $2^n$ éléments.

Les diagrammes de Hasse des algèbres de Boole à $2^n$ éléments sont des n-cubes.

## 1.6 Opérations booléennes, théorème de De Morgan

σ est l'élément minimum et S est l'élément maximum

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Complémentarité | a∨$\bar{a}$=S | a∧$\bar{a}$ =σ | $\bar{\sigma} = S$ | $\bar{S} = \sigma$ |
| Élément neutre | a∨σ=a | a∨S=S | a∧σ=σ | a∧S=S |
| Distributivité | a∧(b∨c) = (a∧b)∨(a∧c) | | a∨(b∧c) = (a∨b)∧(a∨c) | |
| Associativité | a∨(b∨c) = (a∨b)∨c = a∨b∨c | | a∧(b∧c) = (a∧b)∧c = a∧b∧c | |
| Commutativité | a∨b= b∨a | | a∧b= b∧a | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Idempotence | a∨a=a | | a∧a=a | |
| Involution | $\bar{\bar{a}} = a$ | | | |
| Absorption | a∨(a∧b)=a | a∨($\bar{a}$∧b)= a∨b | a∧(a∨b)=a | a∧($\bar{a}$∨b)= a∧b |
| Théorème de De Morgan | $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$ | | $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$ | |
| Équivalences | $a \wedge b = a \ \Leftrightarrow a \preccurlyeq b$ | | $a \vee b = b \ \Leftrightarrow a \preccurlyeq b$ | |

### 1.6.1 Principe de dualité

Soit x le résultat d'un calcul réalisé à l'aide des opérations ∧ et ∨ et d'éléments y et z et/ou de leurs compléments.

Alors $\bar{x}$ le complément de x s'obtient avec le même calcul mais en intervertissant les opérations ∧ et ∨ et en écrivant $\bar{y}$ et $\bar{z}$ au lieu de y et z, et réciproquement

*Exemple 5*

Soit $x = (\bar{y} \wedge z) \vee (\bar{a} \wedge e)$ alors $\bar{x} = (y \vee \bar{z}) \wedge (a \vee \bar{e})$

## 1.7 Algèbre de Boole dans $\mathbb{B}^{\mathbf{1}} = \mathbb{B}$

On rappelle que $\mathbb{B} = \{0,1\}$. Dans $\mathbb{B}$ les opérations booléennes ont pour résultats

| x | y | x∧y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

*Tableau 1. « et ». On parle aussi de conjonction, d'intersection, de min, de produit « . »*

| x | y | x∨y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

*Tableau 2. « ou ». On parle aussi de disjonction, d'union, de max, de somme « + »*

| x | $\bar{x}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 0 |

*Tableau 3. Complément. On parle aussi de négation.*

## 1.8 Fonctions booléennes

Une fonction Booléenne de n variables binaires est une application de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{B}$ utilisant les opérations ∧ et ∨ et et complément.

*Exemple 6 : La fonction « ou exclusif » F(x,y)=(x∧$\bar{\mathbf{y}}$)∨($\bar{\mathbf{x}}$∧y)*

| x | y | F |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

*Figure 5. Table de vérité de la fonction "ou exclusif"*

Théorème

L'ensemble des fonctions Booléennes de n variables $\mathcal{F}_n = \mathbb{B}^{2^n}$ est une algèbre de Boole.

$\forall f \in \mathcal{F}_n, \forall g \in \mathcal{F}_n$ et $\forall a \in \mathbb{B}^n$

$f \leq g \;\Leftrightarrow f(a) \leq g(a)$

$u = f \vee g \;\Leftrightarrow u(a) = f(a) \vee g(a)$

$u = f \wedge g \;\Leftrightarrow u(a) = f(a) \wedge g(a)$

$w = \bar{f} \;\Leftrightarrow w(a) = \overline{f(a)}$

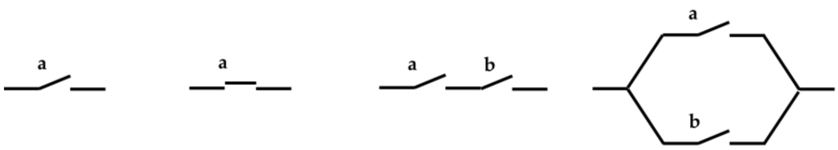
Le plus petit élément est la fonction qui ne prend que la valeur 0.

Le plus grand élément est la fonction qui ne prend que la valeur 1.

## 1.9 Chaînes de contacts, portes

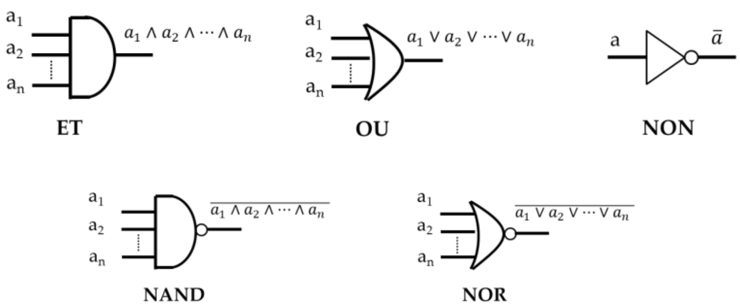
Une chaine de contacts est un circuit d'interrupteurs.

Interrupteurs de base




$f = a$ $\quad f = \bar{a}$ $\quad f = a \wedge b$ $\quad f = a \vee b$

Portes




Théorème

Toute fonction booléenne peut être synthétisée par une chaine de contacts.

Toute fonction booléenne peut être synthétisée par un circuit de portes.

## 1.10Fonctions usuelles et autres symboles

| Fonctions | Non ou (Nord) | Non et (Nand) | Ou exclusif (Xor) | Non oux |
|---|---|---|---|---|
| Equations | $S = \overline{a+b} = \bar{a}\,.\,\bar{b}$ | $S = \overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}$ | $S = a \oplus b = \bar{a}.b + a.\bar{b}$ | $S = \overline{a \oplus b} = \bar{a}.\bar{b} + a.b$ |

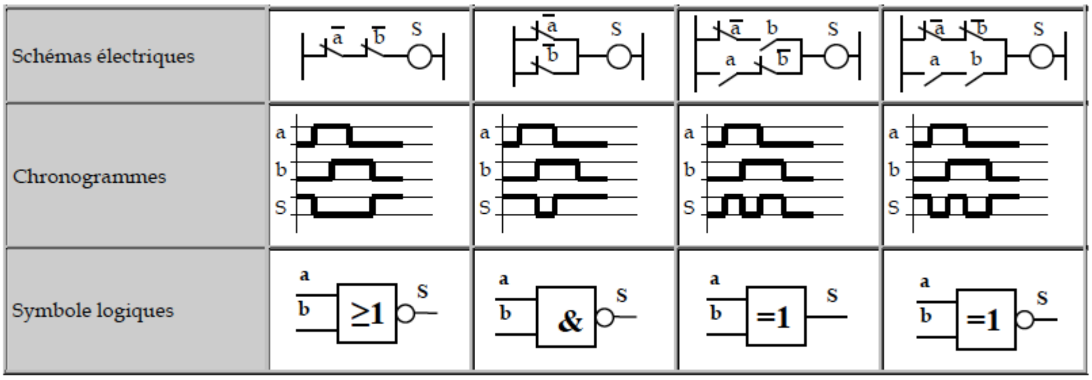



*Figure 6. Représentation des fonctions booléennes usuelles*

## 1.11 Forme canonique disjonctive

<u>Mise en évidence</u>

Soit la fonction booléenne $f$ dont on donne la table de vérité ci-dessous.

| x | y | z | $m_0$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $m_5$ | $m_6$ | $m_7$ | f |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | | | | | | | | 0 |
| 0 | 0 | 1 | | 1 | | | | | | | 0 |
| 0 | 1 | 0 | | | 1 | | | | | | 0 |
| 0 | 1 | 1 | | | | 1 | | | | | 1 |
| 1 | 0 | 0 | | | | | 1 | | | | 0 |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | 1 | | | 1 |
| 1 | 1 | 0 | | | | | | | 1 | | 1 |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | 1 | 1 |

A chaque ligne i, associons un terme produit, ou minterme, $m_i$, produit des variables x,y,z ou de leurs compléments, et tel que $m_i$=1.

Par exemple, on aura $m_0 = \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ car à la ligne 0, x=0, y=0 et z=0 donc $\bar{x}\bar{y}\bar{z} = 1$. De même, $m_1 = \bar{x}\bar{y}z$.

On voit sur la table de vérité que la fonction f prend la valeur 1 quand xyz sont représentés par un des mots binaires de $\mathbb{B}^3$ suivants : 011,101,110 ou 111.

- 011 est associé à $m_3 = \bar{x}yz$
- 101 est associé à $m_5 = x\bar{y}z$
- 110 est associé à $m_6 = xy\bar{z}$
- 111 est associé à $m_7 = xyz$

Dans ce cas, pourquoi ne pas écrire $f$ de la sorte :

$$f = m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7 = \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$$

On appellera cette formule la forme canonique disjonctive de $f$.

<u>Remarque</u>

En rappelant que l'ensemble des fonctions Booléennes de n variables $\mathcal{F}_n = \mathbb{B}^{2^n}$ est une algèbre de Boole, en associant le théorème de Stone et en laissant mijoter un peu, on montrerait formellement ce résultat.

*Exemple 7*

Soit la table de vérité de la fonction S ci-dessous.

Pour une fonction booléenne de 2 variables, $m_0 = \bar{x}.\bar{y}$ ; $m_1 = \bar{x}.y$ ; $m_2 = x.\bar{y}$ ; $m_3 = x.y$

La forme canonique de S est

$$S = \bar{x}.y \vee x.\bar{y}$$

| x | y | $m_0$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | S |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Quelques définitions

- La fonction booléenne $a_i$ associe à un n-uple la valeur de son ième bit : $a_i: a_1a_2 \dots a_n \to a_i$
- La fonction booléenne $\overline{a_i}$ associe à un n-uple le complémentaire de son ième bit : $\overline{a_i}: a_1a_2 \dots a_n \to \overline{a_i}$
- Les fonctions booléennes $a_i$ et $\overline{a_i}$ s'appellent des littéraux.
- Un minterme d'une fonction booléenne $f$ est un produit de n littéraux. On dit aussi que c'est un atome de $f$.

## 1.12Simplification des formules

En électronique, simplifier les circuits et donc minimiser la complexité, le prix et la quantité de composants à utiliser est une problématique importante. On va voir dans cette partie comment simplifier l'expression d'une fonction booléenne.

Définitions

Un *monôme* est un produit de littéraux (la différence avec un minterme est qu'un minterme contient n littéraux des n variables booléennes d'une fonction).

Les *facteurs premiers* d'un monôme sont les littéraux intervenant dans le monôme.

On dit qu'un monôme M divise m si tout facteur premier de m est un facteur premier de M.

*Exemple 8*

Le monôme $x_1\overline{x_3}$ divise le monôme $x_1x_2\overline{x_3}x_4$

Définition

Une *formule polynomiale* d'une fonction booléenne $f$ est une formule exprimant $f$ sous la forme de somme booléenne de monômes : $f = m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee \dots \vee m_p$

On a déjà vu une expression ressemblante : la forme canonique disjonctive. Mais alors quelle est la différence entre une formule polynomiale de $f$ et la forme canonique disjonctive de $f$ ?

Un peu de patience. On dit qu'une formule polynomiale est *réduite* s'il n'existe pas i et j avec i≠j tels que $m_i$ divise $m_j$. Or dans la forme canonique disjonctive, aucun minterme ne divise l'autre (voir Exemple 7). La forme canonique disjonctive est donc une formule polynomiale réduite.

<u>Définition</u>

Soient deux formules polynomiales réduites d'une même fonction booléenne $f$.

$$f = m_1 \vee m_2 \vee \dots \vee m_p$$

$$f = M_1 \vee M_2 \vee M_3 \vee \dots \vee M_q$$

On dit que la première *est plus simple que* la seconde si p≤q (elle contient moins de monômes) et si chaque $m_i$ divise au moins un des monômes $M_j$ (les monômes sont plus faciles à calculer).

On peut montrer que la relation « est plus simple que » est une relation d'ordre sur l'ensemble des formules polynomiales réduites d'une fonction booléenne $f$. On doit donc pouvoir trouver un élément minimal sur l'ensemble des formules polynomiales réduites d'une fonction booléenne $f$ ! ça tombe bien puisque l'enjeu de ce paragraphe est de simplifier les formules de fonctions booléennes. Cela nous amène à la définition ci-dessous.

<u>Définition</u>

On dit ainsi qu'une formule polynomiale d'une fonction booléenne $f$ est minimale si c'est un élément minimal de l'ensemble des formules polynomiales réduites d'une fonction booléenne $f$.

On va maintenant voir diverses méthodes pour simplifier la formule d'une fonction booléenne.

### 1.12.1 Utilisation des propriétés des opérations booléennes

Les propriétés du chapitre 1.6 sont simplement utilisées successivement.

*Exemple 9*

Soit la fonction F, fonction des variables booléennes $s_1$, $s_2$, $s_3$, $s_4$, $s_5$ et $s_6$

$$F = (s_1 \vee s_4)(s_1 \vee s_5)(s_3 \vee s_5)(s_3 \vee s_4)(s_2 \vee s_3 \vee s_5)(s_1 \vee s_2)$$

Par absorption et distributivité

$$(s_3 \vee s_5)(s_2 \vee s_3 \vee s_5) = s_3(s_2 \vee s_3 \vee s_5) \vee s_5(s_2 \vee s_3 \vee s_5) = s_3 \vee s_5$$

$$(s_1 \vee s_4)(s_3 \vee s_4) = s_4 \vee s_1 s_3$$

$$(s_1 \vee s_5)(s_1 \vee s_2) = s_1 \vee s_5 s_2$$

Ainsi

$$F = (s_3 \vee s_5)(s_4 \vee s_1 s_3)(s_1 \vee s_5 s_2)$$

Par distributivité, on a

$$F = s_1 s_3 \vee s_1 s_4 s_5 \vee s_2 s_4 s_5$$

### 1.12.2 Utilisation de la table de vérité

Si la fonction comporte peu de variables (2 ou 3), on peut établir sa table de vérité, passer par la forme canonique disjonctive et la simplifier.

### 1.12.3 Méthode de Karnaugh, diagramme de Karnaugh

On peut représenter une fonction booléenne à l'aide d'un diagramme de Karnaugh (Maurice Karnaugh).

Le diagramme de Karnaugh d'une fonction booléenne $f$ de n variables booléennes est un tableau de $2^n$ cases, dont les cases correspondant aux mots de $\mathbb{B}^n$ pour lesquels $f$ vaut 1 sont cochées ou grisées. Les cases cochées ou grisées correspondent donc aux mintermes de $f$.

Le diagramme de Karnaugh est un moyen pratique de représenter une fonction booléenne.

Il peut aussi être utilisé pour simplifier une fonction booléenne.

Étapes permettant de simplifier une formule par la méthode de Karnaugh

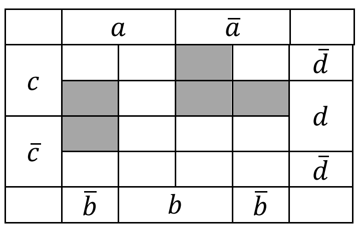
1. Dessiner le diagramme de Karnaugh de $f$. On le note $K_f$.
2. Trouver toutes les grosses cellules qui recouvrent $K_f$
3. Déterminer les grosses cellules indispensables (c'est-à-dire celles qui sont seules à recouvrir une des cases de $K_f$)
4. On obtient les formes polynomiales réduites par les sommes booléennes des monômes correspondant aux grosses cellules indispensables, complétées par les monômes correspondant aux grosses cellules qui complètent la couverture du diagramme
5. Parmi ces formes, on choisit celle qui contient le moins d'opérations

Remarque

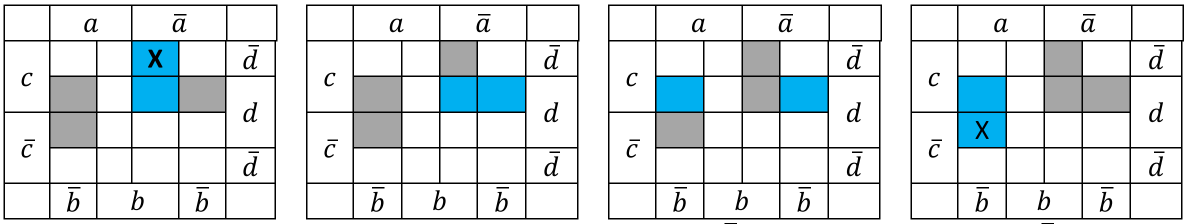
La simplification de formules booléennes est possible avec le diagramme de Karnaugh pour des formules simples et peu de variables. Ensuite l'utilisation de logiciels est nécessaire.

*Exemple 10*

Soit la fonction booléenne $f$, fonction de 4 variables, représentée par le diagramme de Karnaugh ci-dessous.



On observe 4 grosses cellules de 2 cases (en bleu ci-dessous)




$\bar{a}bc$ $\bar{a}cd$ $\bar{b}cd$ $a\bar{b}d$

On voit que la première cellule correspond au monôme $\bar{a}bc$ car entre ces deux cases, la variable d change de valeur.

Les deux cases avec une croix noire sont celles qui ne sont recouvertes que par une cellule. Les cellules indispensables sont donc $\bar{a}bc$ et $a\bar{b}d$.

La case qui correspond à $\bar{a}\bar{b}cd$ n'est pas recouverte par ces deux cellules. On doit donc ajouter le monôme correspondant à une des cellules qui recouvrent cette case.

On obtient deux formes polynomiales réduites possibles :

$$f_1 = \bar{a}bc \vee a\bar{b}d \vee \bar{b}cd$$

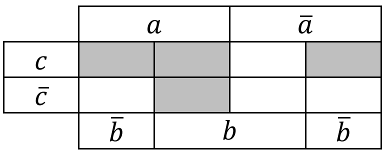
$$f_2 = \bar{a}bc \vee a\bar{b}d \vee \bar{a}cd$$

*Exemple 11*

Soit la fonction booléenne $f$ définie par la table de vérité :

| a | b | c | $f$ | Mintermes |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | $m_2 = \bar{a}.\bar{b}.c$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | $m_6 = a.\bar{b}.c$ |
| 1 | 1 | 0 | 1 | $m_7 = a.b.\bar{c}$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | $m_8 = a.b.c$ |

Son diagramme de Karnaugh correspondant est donné ci-dessous.




Sa forme canonique est

$$f = m_2 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_8 = \bar{a}.\bar{b}.c \vee a.\bar{b}.c \vee a.b.\bar{c} \vee a.b.c$$

# 1.13 Systèmes d'équations booléennes

## 1.13.1 Définition : systèmes d'équations booléennes

Résoudre un système d’équations booléennes mettant en jeu n variables booléennes, c’est déterminer tous les mots binaires de longueur n solutions de ces équations.

## 1.13.2 Méthodes de résolution

On peut résoudre un système d’équations booléennes par plusieurs méthodes.

### 1.13.2.1 Par les tables de vérité

Cette méthode est simple : deux fonctions booléennes sont égales si et seulement si leurs tables de vérité sont identiques.

On voit tout de même que l’opération peut se révéler fastidieuse si on étudie des fonctions de nombreuses variables.

### 1.13.2.2 Par les propriétés de l’algèbre de Boole

Théorème 1

Soient u, v et w des formules de variables booléennes.

On montre que l’ensemble des propriétés ci-dessous permet de simplifier toute formule booléenne en une somme booléenne de produits de littéraux et qui ne se divisent pas entre eux, sans modifier la fonction booléenne définie par la formule de départ.

Ces propriétés permettent toujours également d’obtenir la forme canonique disjonctive de la fonction.

1. $u \vee v \Leftrightarrow v \vee u$
2. $(u \vee v) \vee w \Leftrightarrow u \vee v \vee w$
3. $u(v \vee w) \Leftrightarrow uv \vee uw$
4. $\overline{uv} \Leftrightarrow \bar{u} \vee \bar{v}$
5. $\overline{u \vee v} \Leftrightarrow \bar{u}\bar{v}$
6. $\bar{\bar{u}} \Leftrightarrow u$
7. $u \vee u \Leftrightarrow u$
8. $u \vee \bar{u} \Leftrightarrow 1$
9. $uu \Leftrightarrow u$
10. $u\bar{u} \Leftrightarrow 0$
11. $u \vee uv \Leftrightarrow u$

Théorème 2

Soient f et g des fonctions booléennes, alors

$$(f = g) \Leftrightarrow ((f \wedge g) \vee (\bar{f} \wedge \bar{g})) = 1)$$

*Démonstration*

La table de vérité montre que $(f \wedge g) \vee (\bar{f} \wedge \bar{g})) = 1$ si et seulement si $f = g$.

| $f$ | Non $f$ | $g$ | Non $g$ | $f \wedge g$ | $\bar{f} \wedge \bar{g}$ | $(f \wedge g) \vee (\bar{f} \wedge \bar{g})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Démarche de résolution d'un système d'équations booléennes exploitant ce théorème

La démarche générale est de simplifier chaque équation pour obtenir une somme booléenne de produits de littéraux qui ne se divisent pas entre eux.

Puis on applique le théorème ci-dessous pour modifier les équations et obtenir un système comme ci-dessous :

$$\begin{cases} 1 = F_1 \\ 1 = F \ldots. \\ 1 = Fn \end{cases}$$

Les $F_1 \ldots. F_n$ étant eux aussi une somme booléenne de produits de littéraux qui ne se divisent pas entre eux.

Or ce système a les mêmes solutions que l'équation ci-dessous

$$1 = F_1 F_2 \ldots F_n$$

En effet pour que leur produit donne 1, il faut que chacun soit égal à 1.

Après simplification de cette équation, le but est d'obtenir une équation du type

$$1 = g_1 \vee g_2 \vee \ldots \vee g_n$$

Les $g_1 \ldots. g_n$ étant des produits des variables booléennes du système.

Reste alors à déterminer pour chaque $g_i$ les valeurs (0 ou 1) des variables booléennes (donc le mot binaire) correspondant à $g_i$=1.

*Exemple 12*

On cherche les mots binaires constitués des variables x,y,z,u tels que

$$x(y \vee u) = 1 \qquad \bar{x} \vee \bar{u} = yz \qquad \bar{x}z \vee yu = 0$$

Tout d'abord, avec les propriétés de l'algèbre de Boole on peut simplifier chaque équation pour obtenir une somme booléenne de produits de littéraux qui ne se divisent pas entre eux (on voit qu'on ne simplifie que la première).

$$xy \vee xu = 1 \qquad \bar{x} \vee \bar{u} = yz \qquad \bar{x}z \vee yu = 0$$

Ensuite avec le théorème 2 énoncé ci-dessus on a :

$$\begin{cases} 1 = xy \vee xu \\ 1 = (\bar{x} \vee \bar{u})yz \vee \overline{\bar{x} \vee \bar{u}}.\overline{yz} \\ 1 = \overline{\bar{x}z \vee yu} \end{cases}$$

Puis après simplification par les propriétés de l'algèbre de Boole ce système devient

$$\begin{cases} 1 = xy \vee xu \\ 1 = \bar{x}yz \vee \bar{u}yz \vee xu\bar{y} \vee xu\bar{z} \\ 1 = x\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{u} \vee \bar{z}\bar{u} \end{cases}$$

Or ce système a les mêmes solutions que l'équation

$$1 = (xy \vee xu).(\bar{x}yz \vee \bar{u}yz \vee xu\bar{y} \vee xu\bar{z}).(x\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{u} \vee \bar{z}\bar{u})$$

Enfin après simplification par les propriétés de l'algèbre de Boole cette équation devient

$$1 = x\bar{y}u \vee xyz\bar{u}$$

Cette équation revient à $x\bar{y}u = 1$ ou $xyz\bar{u} = 1$ (ou les deux bien évidemment).

Or

$$x\bar{y}u = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \; ou \; 1 \\ u = 1 \end{cases}$$

Et

$$xyz\bar{u} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ u = 0 \end{cases}$$

Finalement les mots binaires xyzu solutions du système d'équations

$$xy \vee xu = 1 \qquad \bar{x} \vee \bar{u} = yz \qquad \bar{x}z \vee yu = 0$$

sont 1001, 1011 ou 1110.

#### 1.13.2.3 Par le diagramme de Karnaugh

Soient f et g des fonctions booléennes, de diagrammes de Karnaugh $K_f$ et $K_g$.

- $f = 0 \;\Leftrightarrow Aucune\ case\ n'est\ grisée\ dans\ K_f$
- $f = 1 \;\Leftrightarrow Toutes\ les\ cases\ sont\ grisées\ dans\ K_f$
- $f \leq g \;\Leftrightarrow toute\ case\ grisée\ dans\ K_f\ est\ grisée\ dans\ K_g$
- Le diagramme de Karnaugh de $f \wedge g$ est $K_{fg}$ correspondant aux cases grisées à la fois dans $K_f$ et dans $K_g$
- Le diagramme de Karnaugh de $f \vee g$ est $K_{f\vee g}$ correspondant aux cases grisées dans $K_f$ ou dans $K_g$
- $f = g \;\Leftrightarrow\; K_f = K_g$

# 2 Liens utiles

Algèbre de Boole

- https://www.lri.fr/~de/CLM13-Boole.pdf
- Algèbre Booléenne https://www.youtube.com/watch?v=DyV7DNaKMpc

Systèmes d'équations, problèmes de couverture

- http://maths.cnam.fr/IMG/pdf/MVA003-9GC.pdf
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Alg%C3%A8bre_de_Boole_(structure)#Dualit%C3%A9
- Les ensembles ordonnés https://www.youtube.com/watch?v=NIXwKW64KyA

Introduction à l'électronique numérique IUT DE CACHAN

https://www.youtube.com/watch?v=Duh1N4gPdQc&list=PLRioX-4dGp5BTkm4Rgyr0VziYisU0-D-T

# 3 Références

[1], [2], [3]

[1] G. Serane, Mathématiques de la physique appliquée à l'usage des candidats au certificat de T.M.P est élèves-ingénieurs et des ingénieurs. Paris: DUNOD, 1965.

[2] J. Vélu, Méthodes mathématiques pour l'informatique: cours et exercices corrigés, 5è ed. in Info Sup. Malakoff: Dunod, 2019.

[3] J. Vélu, G. Avérous, I. Gilles, et F. Santi, Mathématiques pour l'informatique: rappels de cours, méthodes, exercices et problèmes avec corrigés détaillés. in Sciences sup. Paris: Dunod, 2008.