# Mathématiques

-

## Calcul propositionnel

## Raisonnements

Frédéric Menan

fmenan@cesi.fr

11/2024

# Table des matières

# 1 Introduction

## Quelques définitions

Chiffre : 1/ caractère dont on se sert pour représenter les nombres (chiffres romains, chiffres arabes). 2/ code utilisé pour la transmission de messages secrets

Nombre : concept mathématique représentant une quantité (www.le-dictionnaire.com)

Axiome : énoncé admis car considéré comme évident (la notion d'énoncé sera détaillée ultérieurement)

Conjecture : proposition mathématique dont on ignore la valeur de vérité (vraie ou fausse). Une fois prouvée, une conjecture devient un théorème.

Théorème : énoncé déduit d'axiomes ou d'autres théorèmes et démontré par des règles de raisonnement.

Corollaire : résultat qui découle directement d'un théorème prouvé.

Lemme : théorème servant d'intermédiaire pour démontrer un théorème plus important.

Une preuve d'un théorème est une construction qui permet de montrer que l'on a bien utilisé les règles de raisonnement communément admises pour démontrer le théorème.

## Notations

- $\mathbb{N}$ : ensemble des nombres entiers naturels {0,1,2,3,………}
- $\mathbb{N}$* : ensemble des nombres entiers strictement positifs {1,2,3,………}
- $\mathbb{Z}$ : ensemble des nombres entiers relatifs {…,-3,-2,-1,0,1,2,3………}
- $\mathbb{Q}$ : ensemble des nombres rationnels {p/q avec p entier relatif et q entier naturel différent de 0}
- $\mathbb{R}$ : ensemble des nombres réels
- $\mathbb{R}+$ : ensemble des nombres réels positifs
- $\mathbb{B}$ : ensemble des bits $\mathbb{B} = \{0,1\}$
- ∈ / ∉ appartient à / n'appartient pas à
- ∃ / ∄ il existe / il n'existe pas
  ∅ : ensemble vide
- ∪ : union de deux ensembles
- ∩ : intersection de deux ensembles
- $\wp$(E) : ensemble des parties de E
- ∀ : pour tout
- $F^E$ : ensemble des applications de E dans F
- card(E) : cardinal de E
- $n!$ : factorielle de n. $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$
- $A_n^p$ : nombre d'arrangements de p parmi n éléments
- $C_n^p$ : nombre de combinaisons de p parmi n éléments
- $\sum_{i=1}^{n}$ : somme pour i variant de 1 à n
- inf(E) : plus petit élément de l'ensemble ordonné E
- sup(E) : plus grand élément de l'ensemble ordonné E

- $\bar{A}$ : complémentaire de A
- P(B/A) : probabilité de B sachant A
- $\neg$ : négation
- $\wedge$ : connecteur logique et (somme booléenne)
- $\vee$ : connecteur logique ou (produit booléen)
- $\mathcal{F}n$ : ensemble des fonctions booléennes de n variables booléennes
- $\Longrightarrow$ : implication
- $\Longleftrightarrow$ : équivalence
- $\forall x\ P(x)$ : la proposition P(x) est vraie quel que soit x
- $\exists x\ P(x)$ : il existe au moins un x pour qui la proposition P(x) est vraie

# 2 Calcul propositionnel

Dans nos contrées occidentales, on attribue les débuts de la logique aux philosophes de la Grèce Antique.


http://www.unsamediquelconque.net/?s=socrate

Ce chapitre a pour but de fournir au lecteur des démarches de raisonnement utiles à tous et précieuses pour détecter et se protéger des raisonnements fallacieux qui ternissent aujourd'hui les débats publics de toutes sortes. S'il est vrai que « 100% des gagnants ont tenté leur chance », ça ne veut pas dire que 100% des joueurs ont gagné…

On aura le droit de dire que « les éléphants savent voler », et il suffira d'ajouter que cette proposition est fausse. Et pourtant, en calcul propositionnel, il sera vrai de dire que si les éléphants savent voler, alors les poissons savent marcher !

Appliquer un raisonnement, ce n'est donc pas seulement démontrer un théorème, c'est développer un cadre de pensée propice à la réflexion, au codage, à la communication, à la psychologie, au management….etc.

On apprendra le pouvoir du contre-exemple ou la subtilité du raisonnement par récurrence qui consiste à montrer que quelque chose est vrai sans jamais vraiment le démontrer...

Mais avant tout cela, on abordera « la langue des mathématiques » avec ses symboles, son vocabulaire, son formalisme à respecter pour comprendre un énoncé ou exposer un raisonnement sans ambiguïté. En français le placement d'une virgule, un point d'exclamation ou d'interrogation, ou encore l'ordre des mots peuvent changer le sens d'une phrase, on verra qu'il en est de même pour « la langue » des mathématiques.

## 2.1 Définitions

### 2.1.1 Propositions, prédicats

Considérons pour le moment une proposition comme une phrase, une affirmation, qui est soit vraie, soit fausse, mais pas les deux à la fois.

On parle aussi d'*assertion*.

*Exemple 1*

- Soit p « 6+6 = 12 ». C'est une proposition, elle a la valeur « vraie ».
- Soit p « $\pi$ est égal à 65,18 ». C'est une proposition car elle ne souffre d'aucune ambiguïté. Mais elle a bien sûr la valeur « fausse ».
- « Il pleut ». Cette phrase est vraie ou fausse, ça dépend du lieu et de la date où vous êtes en train de lire ce cours. On ne peut donc pas raisonnablement en faire une proposition.
- « Tout nombre réel strictement négatif n'est pas un carré ». Ce n'est pas une proposition car on ne précise pas de quel carré on parle. Il est vrai que « Tout nombre réel strictement négatif n'est pas un carré d'un nombre réel » mais il est faux de dire que « Tout nombre réel strictement négatif n'est pas un carré d'un nombre complexe »

Lorsqu'une proposition est associée à une ou plusieurs variables x,y,z, on parle en fait de *prédicat* P(x,y,z).

Lorsqu'un prédicat associe une seule variable à une proposition, on écrit le prédicat sous la forme P(x), et on parle de *propriété* de la variable x.

Par souci de simplicité et avec beaucoup de tolérance, on pourra confondre la notion de proposition et de prédicat et on parlera souvent d'*affirmation*.

*Exemple 2*

- Soit E l'ensemble des élèves d'un cours de maths. Soit x ∈ E. P(x) est le prédicat « l'élève x a entendu parler du théorème de Pythagore ».
- Soit P(x) « Pour tout x réel, on a $x^2 \geq 0$ ». Ce prédicat est vrai.
- Soit un ensemble E, et la variable y. Soit le prédicat P(E,y) « $x^2 + y = 0$ admet des solutions dans E ». En fonction de E et de y, ce prédicat est vrai ou faux (faux pour E=$\mathbb{R}$ et y=9, vrai pour E=$\mathbb{R}$ et y=-9, vrai pour E=$\mathbb{C}$ l'ensemble des complexes et y=9)

Remarque

On voit qu'une proposition et un prédicat ne peuvent souffrir d'une ambiguïté qui rendrait leur valeur de vérité sujettes au temps qu'il fait, à l'interprétation d'une expression ou d'un mot, ou à une mauvaise définition de l'ensemble dans lequel on considère les variables mathématiques. C'est tout un premier enjeu qui s'offre à nous : repérer des affirmations sans ambigüité pour les valider en tant que propositions/prédicats !

Dans l'immédiat, apportons encore une définition avant de revenir sur la notion de proposition.

### 2.1.2 Énoncé

Un énoncé est une proposition dépendant d'une ou plusieurs variables, qui est vraie pour toutes les valeurs possibles de ces variables. Un énoncé est donc toujours vrai. Les propriétés des objets mathématiques sont ainsi décrites par des énoncés.

*Exemple 3*

- « Il fait chaud ce matin » n'est pas un énoncé car cette proposition peut être vraie ou fausse selon le jour.
- « L'entier naturel n est divisible par 3. » Vrai ou faux suivant l'entier n considéré, donc ce n'est pas un énoncé.
- « L'entier naturel n est pair ou impair. » Vrai quel que soit l'entier n considéré donc c'est un énoncé.

Remarque

On voit qu'il est indispensable, quand on veut avancer un énoncé, de préciser dans quel(s) ensemble(s) se trouvent les variables qui en dépendent.

*Exemple 4*

« x est divisible par 2. »

Ceci est vrai si on raisonne sur l'ensemble des nombres entiers pairs. Donc on peut affirmer l'énoncé : « Pour tout entier x pair, x est divisible par 2 »

Mais ce prédicat est faux et donc n'est pas un énoncé si on raisonne sur l'ensemble des réels !

## 2.2 Connexions et calcul propositionnel

Toutes ces phrases et affirmations subissent la dure loi de l'ambiguité des termes de la langue française, de l'articulation des mots de liaisons et demandent une grande précision quant à la nature des variables mathématiques considérées.

En calcul propositionnel, on souhaiterait s'affranchir de toute ambiguité de la langue pour uniquement nous intéresser aux liens possibles entre plusieurs propositions. Ainsi on aimerait s'intéresser à la valeur que prend une proposition en fonction de la façon dont on l'a définie à partir d'autres propositions.

Apportons alors une autre définition à la notion de proposition : une *proposition* est un *objet mathématique* qui a deux valeurs possibles : vrai ou faux, mais pas les deux à la fois. En algèbre de Boole, dans un prochain module, on s'amusera à attribuer 0 à la valeur « faux » et 1 à la valeur « vrai », mais ceci est une autre histoire….

Si la proposition p est une variable, on devrait pouvoir faire des calculs ? il suffirait de prendre une ou plusieurs propositions et de les additionner, les soustraire, pour obtenir d'autres propositions vraies ou fausses. Comment quand on additionne des nombres, des complexes, des matrices, ……

C'est le principe du calcul propositionnel. Ce qui relie plusieurs propositions entre elles sera appelé une *connexion*. Une connexion associe entre elles une ou plusieurs propositions pour former une nouvelle proposition.

La valeur de vérité (V ou F) de la proposition obtenue ne dépend que de la valeur de vérité des propositions qui ont servi à la former, tout comme la valeur du réel que l'on obtient en le calculant à partir de plusieurs réels.

Plus précisément, on associe la valeur vraie ou la valeur fausse à la proposition obtenue à partir de n propositions reliées entre elles par des connexions : $\{0;1\}^n \to \{0;1\}$.

### 2.2.1 Les trois connexions principales

Toute connexion se déduit de trois connexions principales : la négation, la conjonction et la disjonction.

#### 2.2.1.1 La négation

La proposition « non p » est vraie si p est fausse, et fausse si p est vraie. On la note aussi « $\bar{p}$ », ou « ¬p ».

| p | $\bar{p}$ |
|---|---|
| V | F |

| | |
|---|---|
| F | V |

*Figure 1. Table de vérité de la négation*

*Exemple 5*

Soit n un nombre entier. La négation de p : « n est pair » est « non p » : « n n'est pas pair ».

On peut aussi utiliser « il est faux que » pour obtenir la négation d'une proposition : « il est faux que n est pair ». Au fond peu importe, du moment que l'on comprend bien que la phrase est la négation de « n est pair ». En calcul propositionnel, la négation de p est simplement $\bar{p}$ et ça nous évite de longues réflexions sur la bonne utilisation des mots…….

Remarque

La négation de la négation d'une proposition p est synonyme de la proposition p.

#### 2.2.1.2 La conjonction « et »

La proposition « p et q » est vraie si p est vraie et q est vraie. La proposition « p et q » est fausse sinon. On la note aussi p∧q ou tout simplement p.q.

| p | q | p∧q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

*Figure 2. Table de vérité de la conjonction*

Exemple 6

Soit p la proposition « Cette carte est un roi » et q la proposition « Cette carte est un cœur ». « p et q » est vraie si la carte est le roi de cœur et est fausse pour toute autre carte. p∧q : « cette carte est le roi de cœur ».

#### 2.2.1.3 La disjonction « ou »

La proposition « p ou q » est vraie si l'une (au moins) des deux propositions est vraie. La proposition « p ou q » est fausse si p et q sont fausses. On la note aussi p∨q.

| p | q | p∨q |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

*Figure 3. Table de vérité de la disjonction*

*Exemple 7*

Soit p la proposition « Cette carte est un roi » et q la proposition « Cette carte est un cœur ». « p ou q » est vraie si la carte est un roi (quelle que soit sa couleur) ou si la carte est un cœur, ou les deux. Elle est fausse pour toute autre carte.

*Exemple 8*

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Soit x un élément de E. Soit la proposition p : « $x \in A$ » et soit la proposition q : « $x \in B$ ». On a $p \vee q$ : « $x \in A$ ou $x \in B$ », c'est-à-dire « $x \in A \cup B$ »

### 2.2.2 Connexions usuelles

#### 2.2.2.1 L'implication

L'implication se dit « p implique q », ou « si p alors q », ou « si p est vraie alors q est vraie ». On note $p \Longrightarrow q$.

Toute proposition fausse implique une autre proposition, vraie ou fausse. Donc si la proposition p est fausse alors la proposition $p \Longrightarrow q$ est vraie. L'implication est donc en fait la connexion « (non p) ou q » et sa table de vérité est donnée ci-dessous.

| p | q | $p \Longrightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

<u>Remarque</u>

Lorsque $p \Longrightarrow q$, on dit que p est une condition suffisante de q.

On dit aussi que q est une condition nécessaire de p.

#### 2.2.2.2 L'équivalence

L'équivalence est définie par :

« $p \Leftrightarrow q$ » est la proposition « $(p \Longrightarrow q)$ et $(q \Longrightarrow p)$

| p | q | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

L'équivalence se dit de plusieurs manières

- « p équivaut à q »
- « p si et seulement si q »
- « q est une condition nécessaire et suffisante de p »
- « pour que p, il faut et il suffit que q »

## 2.3 Formules propositionnelles

En combinant des propositions à l'aide de connecteurs, on obtient des formules propositionnelles.

On associe à chaque formule propositionnelle une table de vérité.

### 2.3.1 Contradiction, tautologie

Une formule propositionnelle qui donne toujours des propositions vraies, quelles que soient les valeurs des propositions dont elle résulte, est une tautologie.

Une formule propositionnelle qui donne toujours des propositions fausses, quelles que soient les valeurs des propositions dont elle résulte, est une contradiction (ou antilogie).

### 2.3.2 Modèle d'une formule propositionnelle, conséquence d'une formule propositionnelle, formules propositionnelles synonymes

Soit une formule propositionnelle construite à partir des propositions p,q,r..etc.

Un modèle d'une formule propositionnelle est un choix des valeurs de vérité des propositions p,q,r.. qui conduit à une proposition vraie.

Deux formules propositionnelles sont compatibles quand elles ont au moins un modèle commun. Dans le cas contraire on dit qu'elles sont incompatibles, ou contradictoires.

On dit que des formules propositionnelles sont synonymes quand elles ont même table de vérité.

*Exemple 9*

p ⇒ q et sa contraposée (non q) ⇒ (non p) sont synonymes.

On dit que g est conséquence de f quand tout modèle de f est aussi modèle de g (f⇒ $g$ est alors une tautologie). Ainsi, si à chaque fois que f a la valeur vraie, g a la valeur vraie, alors g est conséquence de f.

Remarque : quand g a la valeur fausse, f a donc la valeur fausse. Mais g peut avoir la valeur vraie alors que f a la valeur fausse.

*Exemple 10*

On voit sur la table de vérité ci-dessous que « $p \Rightarrow r$ » est conséquence de $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ car chaque fois que $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$, « $p \Rightarrow r$ » est vraie

On confirme l'intuition que « si p implique q et q implique r, alors p implique r ».

| p | q | r | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow r$ | $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ | $p \Rightarrow r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | F | F | F |
| V | F | V | F | V | F | V |
| V | F | F | F | V | F | F |
| F | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | V | F | F | V |
| F | F | V | V | V | V | V |
| F | F | F | V | V | V | V |

*Exemple 11*

Déterminer des formules propositionnelles f,g et h dépendant des variables p,q et r qui admettent les tables de vérités suivantes

| p | q | r | f | g | h |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | F | V |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V | V |
| V | F | V | V | V | V |
| V | F | F | F | F | F |
| F | V | V | F | F | F |
| F | V | F | V | V | V |
| F | F | V | V | V | V |
| F | F | F | V | F | V |

On peut écrire f, g ou h de la façon suivante :

$$f = f1 \vee f2 \vee \dots \vee fn$$

Chaque expression f1, f2, fn correspond à une ligne de la table de vérité où f est vraie et peut s’exprimer comme le produit de p,q,r ou leur complément qui donne à f la valeur V.

Par exemple quand p, q et r sont vraies alors f est vraie donc f1=pqr

Quand p vaut V, q vaut F et r vaut V on a f vraie donc f2=$p\bar{q}r$

Réponses possibles

$$f = pqr \vee p\bar{q}r \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r}$$

$$g = pq\bar{r} \vee p\bar{q}r \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r$$

$$h = pqr \vee pq\bar{r} \vee p\bar{q}r \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r}$$

### 2.3.3 Lois de De Morgan

$$\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$$

$$\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$$

| p | q | $p \vee q$ | $\overline{p \vee q}$ | $\bar{p} \wedge \bar{q}$ |
|---|---|---|---|---|
| F | F | F | V | V |
| F | V | V | F | F |
| V | F | V | F | F |
| F | V | V | F | F |

| p | q | $p \wedge q$ | $\overline{p \wedge q}$ | $\bar{p} \vee \bar{q}$ |
|---|---|---|---|---|
| F | F | F | V | V |
| F | V | F | V | V |
| V | F | F | V | V |
| V | V | V | F | F |

## 2.4 Quantificateurs

### 2.4.1 Le quantificateur ∀ : « pour tout »

L’affirmation

$$\forall x \in E \quad P(x)$$

se lit « pour tout x appartenant à E, P(x) »

L'affirmation est vraie lorsque la proposition P est vraie pour tous les éléments x de l'ensemble E.

*Exemple 12*

- $\forall x \in [1,+\infty[\ (x^2 \geq 1)$ est une proposition vraie
- $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 < 0)$ est une proposition fausse

### 2.4.2 Le quantificateur ∃ : « il existe »

L'affirmation

$$\exists x \in E,\ \ P(x)$$

est vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de E pour lequel P est vraie.

On lit « il existe un x appartenant à E tel que P(x) soit vraie ».

*Exemple 13*

- $\exists x \in \mathbb{R}\ x < 0$ est vrai
- $\exists x \in \mathbb{R}\ x^2 = -3$ est faux

### 2.4.3 La négation des quantificateurs

La négation de

$$\forall x \in E \quad P(x)$$

est

$$\exists x \in E \quad non\ P(x)$$

pour nier une affirmation, on écrit donc ∀ à la place de ∃, et vice versa.

Nier « strictement inférieur à » consiste à le remplacer par « supérieur ou égal à ».

Nier « = » consiste à écrire « ≠ »……..etc.

*Exemple 14*

- La négation de $\exists x \in E \quad P(x)$ est $\forall x \in E \quad non\ P(x)$
- Soit $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y > 0 \quad (x + y > 10)$. Sa négation est $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y > 0 \quad (x + y \leq 10)$

### 2.4.4 L'importance de l'ordre des quantificateurs dans une affirmation

L'ordre des quantificateurs est important. Ainsi les affirmations ci-dessous sont différentes :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad (x + y > 0)$$

$$\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (x + y > 0)$$

# 3 Raisonnements

## 3.1 Raisonnement direct

On veut montrer que la proposition « p ⟹ q » est vraie. On suppose que p est vraie et on montre qu'alors q est vraie.

On parle aussi de « modus ponens ».

Le modus ponens est en fait la propriété : $p \wedge (p \Rightarrow q)$ a pour conséquence q (voir chapitre précédent)

## 3.2 Cas par cas

Si l'on souhaite vérifier une proposition P(x) pour tous les x dans un ensemble E, on montre la proposition pour les x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A.

## 3.3 Contraposée

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante :

La proposition « p ⟹ q » est équivalente à « non(q) ⟹ non(p) ».

Par conséquent, pour montrer la proposition « p ⟹ q », on peut montrer que si non(q) est vraie, alors non(p) est vraie.

On parle aussi de « Modus tollens ».

le modus tollens est en fait la propriété : $\bar{q} \wedge (p \Rightarrow q)$ a pour conséquence $\bar{p}$ (voir chapitre précédent)

*Exemple 15*

Soit n ∈ ℕ. Montrer que si $n^2$ est pair alors n est pair.

Le raisonnement par contraposition consiste alors à montrer que si n est impair, alors $n^2$ est impair.

Si n est impair, il existe un entier k tel que 2k+1. Dans ce cas, $n^2=(2k+1)^2=4k^2+2k+1=2.k'+1$ avec l'entier $k'=2k^2+2k$.

Donc $n^2$ est impair. Si n est impair, alors $n^2$ est impair donc par contraposition, si $n^2$ est pair alors n est pair.

## 3.4 Absurde

On souhaite montrer que la proposition « p ⟹ q » est vraie.

On suppose à la fois que p est vraie et que q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si p est vraie alors q doit être vraie et donc « p ⟹ q » est vraie.

## 3.5 Contre-exemple

Si l'on veut montrer que l'affirmation

$$\forall x \in E \quad P(x)$$

est fausse, alors il suffit de trouver un x de E tel que p(x) soit faux. Ce x est appelé un contre-exemple.

*Exemple 16*

Montrer que l'affirmation $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 < 0$ est fausse. Pour x = 4, $x^2 = 16$ donc $x^2 \geq 0$ donc l'affirmation est fausse.

## 3.6 Récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une proposition p(n) est vraie pour tout entier naturel n.

La démonstration comporte deux étapes :

Étape 1. On montre que p est vraie pour la première valeur de n (par exemple si on veut montrer qu'elle est vraie pour tous les entiers naturels n ≥ 4, dans l'étape 1 on montre que p est vraie pour n=4).

Étape 2. On suppose p(n) vraie, et on démontre que la proposition p(n + 1) au rang suivant est vraie.

Par le principe de récurrence, p(n) est vraie pour tout entier naturel n.

*Exemple 17*

Soit une suite (Un) avec $U_0$=2 et pour tout entier n,

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2$$

On veut montrer par récurrence que pour tout entier n,

$$U_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Étape 1. Pour n=0,

$$U_0 = 4 - \frac{1}{2^{0-1}} = 4 - 2 = 2$$

La proposition est démontrée pour n=0.

Étape 2. On suppose la proposition vraie au rang n. Montrons que dans ce cas elle est vraie au rang n+1.

Ainsi on suppose que

$$U_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Montrons que sous cette hypothèse, on a

$$U_{n+1} = 4 - \frac{1}{2^{n+1-1}} = 4 - \frac{1}{2^n}$$

La suite (Un) est définie par

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2$$

Si on suppose que la proposition est vraie au rang n, alors

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + 2 = 2 - \frac{1}{2^n} + 2 = 4 - \frac{1}{2^n}$$

Conclusion

Si la proposition est vraie au rang n, alors on a démontré qu'elle est vraie au rang n+1. De plus, elle est vraie au rang 0. Donc par principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout entier n.

# 4 Exercices

### 4.1.1 QCM

Extrait du livre [1].

Un nombre premier se définit comme tout nombre entier naturel différent de 1 qui ne peut être divisé que par lui-même et par l'unité. Son comportement particulier a attiré l'attention de nombreux mathématiciens. Les nombres premiers sont non seulement entourés d'un halo de mystère, mais en outre, ils rechignent à livrer leurs secrets. Pour l'heure, aucune formule ne peut engendrer des nombres premiers de façon ininterrompue. On ne connait pas non plus leur répartition. Il n'est même pas évident de savoir si un nombre est premier ou non.

Ce sont les grecs qui découvrirent leur propriété primordiale, leur rôle de bâtisseurs de nombres. Les grecs s'aperçurent en effet que tout nombre naturel supérieur à 1 peut se décomposer de façon unique en produit de nombres premiers.

Pour prouver que l'ensemble des nombres premiers était infini, Euclide partit de l'hypothèse que les nombres premiers forment un ensemble fini, ce qui signifiait qu'il existe un dernier nombre premier $p_n$, supérieur à tous les autres.

Soit $P=\{2,3,...,p_j,......,p_n\}$ l'ensemble des nombres premiers. Ceux-ci permettent de construire d'autres nombres, comme celui correspondant au produit de tous les nombres premiers plus 1 :

$$q = p_1 * p_2 * \ldots * p_j * \ldots * p_n + 1$$

Comme q est plus grand que $p_n$, ce ne peut être un nombre premier. Par conséquent il peut se décomposer en produit de facteurs premiers. Comme tous les nombres premiers sont compris dans P, alors il existe au moins un élément de P qui divise q. Soit pi cet élément. Nous savons que celui-ci divise également $q = p_1 * p_2 * \ldots * p_j * \ldots * p_n + 1$ puisque pi est l'un des facteurs de ce produit. Si pi divise q et q-1, alors il doit aussi diviser leur différence

$$\frac{q}{p_i} - \frac{q-1}{p_i} = \frac{1}{p_i}$$

Or aucun nombre premier ne divise le nombre 1. Donc l'ensemble P n'est pas fini, donc l'ensemble des nombres premiers est infini. Par ce raisonnement, Euclide prouva qu'il était impossible de construire un tableau contenant tous les nombres premiers.

Comment a été démontré ce résultat ?

1/ Par l'absurde

2/ Par contraposée

3/ Par récurrence

4/ Au cas par cas

Feedback : supposer quelque chose et montrer que ça n'a pas de sens……

Réponse : par l'absurde

### 4.1.2 QCM

La contraposée de l'implication « si je suis malade, je reste chez moi » est (une seule réponse possible)

1/ Si je ne suis pas malade, alors je ne reste pas chez moi

2/ Si je ne reste pas chez moi, alors je ne suis pas malade

3/ Si je reste chez moi, alors je ne suis pas malade

4/ Si je reste chez moi, alors je suis malade

Feedback : Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante : la proposition « $p \Longrightarrow q$ » est équivalente à « $non(q) \Longrightarrow non(p)$ ».

Réponse : 2/ Si je ne reste pas chez moi, alors je ne suis pas malade

### 4.1.3 Exercice : les nombres premiers

Extrait du livre « Une révolution de la théorie des nombres. Gauss » 2018

Un nombre premier se définit comme tout nombre entier naturel différent de 1 qui ne peut être divisé que par lui-même et par l'unité. Son comportement particulier a attiré l'attention de nombreux mathématiciens. Les nombres premiers sont non seulement entourés d'un halo de mystère, mais en outre, ils rechignent à livrer leurs secrets.

Pour l'heure, aucune formule ne peut engendrer des nombres premiers de façon ininterrompue. On ne connait pas non plus leur répartition. Il n'est même pas évident de savoir si un nombre est premier ou non.

Ce sont les grecs qui découvrirent leur propriété primordiale, leur rôle de bâtisseurs de nombres. Les grecs s'aperçurent en effet que tout nombre naturel supérieur à 1 peut se décomposer de façon unique en produit de nombres premiers.

Pour prouver que l'ensemble des nombres premiers était infini, Euclide eut recours au raisonnement par l'absurde. Il partit de l'hypothèse que les nombres premiers forment un ensemble fini, ce qui signifiait qu'il existe un dernier nombre premier $p_n$, supérieur à tous les autres.

Soit $P=\{2,3,...,p_j,......,p_n\}$ l'ensemble des nombres premiers. Ceux-ci permettent de construire d'autres nombres, comme celui correspondant au produit de tous les nombres premiers plus 1 :

$$q = p_1 * p_2 * ... * p_j * ... * p_n + 1$$

1/ Montrer que q ne peut être un nombre entier

Si q ne peut être un nombre entier alors il peut se décomposer en produit de nombres entiers.

Comme tous les nombres premiers sont compris dans P, alors il existe au moins un élément de P qui divise q. Soit $p_i$ cet élément.

1/ Montrer qu'alors, sous ces hypothèses, le nombre

$$\frac{q}{p_i} - \frac{q-1}{p_i} = \frac{1}{p_i}$$

est divisible par $p_i$

2/ En conclure que l'ensemble des nombres premiers est infini

## Correction

Un nombre premier se définit comme tout nombre entier naturel différent de 1 qui ne peut être divisé que par lui-même et par l'unité. Son comportement particulier a attiré l'attention de nombreux mathématiciens. Les nombres premiers sont non seulement entourés d'un halo de mystère, mais en outre, ils rechignent à livrer leurs secrets.

Pour l'heure, aucune formule ne peut engendrer des nombres premiers de façon ininterrompue. On ne connait pas non plus leur répartition. Il n'est même pas évident de savoir si un nombre est premier ou non.

Ce sont les grecs qui découvrirent leur propriété primordiale, leur rôle de bâtisseurs de nombres. Les gres s'aperçurent en effet que tout nombre naturel supérieur à 1 peut se décomposer de façon unique en produit de nombres premiers.

Pour prouver que l'ensemble des nombres premiers était infini, Euclide eut recours au raisonnement par l'absurde. Il partit de l'hypothèse que les nombres premiers forment un ensemble fini, ce qui signifiait qu'il existe un dernier nombre premier $p_n$, supérieur à tous les autres.

Soit P={2,3,...,$p_j$,......,$p_n$} l'ensemble des nombres premiers. Ceux-ci permettent de construire d'autres nombres, comme celui correspondant au produit de tous les nombres premiers plus 1 :

$$q = p_1 * p_2 * \dots * p_j * \dots * p_n + 1$$

Comme q est plus grand que $p_n$, ce ne peut être un nombre premier. Par conséquent il peut se décomposer en produit de facteurs premiers. Comme tous les nombres premiers sont compris dans P, alors il existe au moins un élément de P qui divise q. Soit $p_i$ cet élément. Nous savons que celui-ci divise également $q - 1 = p_1 * p_2 * \dots * p_j * \dots * p_n$ puisque pi est l'un des facteurs de ce produit.

Si $p_i$ divise q et q-1, alors il doit aussi diviser leur différence

$$\frac{q}{p_i} - \frac{q-1}{p_i} = \frac{1}{p_i}$$

Or cela est absurde car aucun nombre premier ne divise le nombre 1.

Donc l'ensemble P n'est pas fini, donc l'ensemble des nombres premiers est infini.

Par ce raisonnement, Euclide prouva qu'il était impossible de construire un tableau contenant tous les nombres premiers.

### 4.1.4 QCM

L'assertion « x est un réel tel que 0 ≤ x ≤ 36 ⇒ √x ≤ 6 » est

1/ Vraie

2/ Fausse

3/ On ne sait pas

Feedback : est-ce que si $0 \leq x \leq 36$ alors on a toujours $\sqrt{x} \leq 6$ ?

Réponse : 1 vraie

### 4.1.5 QCM

L'assertion « θ est un réel tel que cos(θ)=1 ⇒ θ=0 » est

1/ Vraie

2/ Fausse

3/ On ne sait pas

Feedback : est-ce que θ peut prendre d'autres valeurs que 0 et montrer aussi cos(θ)=1 ?

Réponse : affirmation fausse car θ peut prendre d'autres valeurs que 0 et montrer aussi cos(θ)=1 (par exemple la valeur 2π). Par contre on a θ=0 ⇒ cos(θ)=1

### 4.1.6 QCM

L'affirmation « Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers. » est-elle un énoncé ? (c'est-à-dire une affirmation toujours vraie)

1/ Vraie

2/ Fausse

3/ On ne sait pas

Feedback : c'est la conjecture de Goldbach

https://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_de_Goldbach

Réponse : 3

C'est la conjecture de Goldbach. On ne sait toujours pas aujourd'hui si cette conjecture est vraie ou fausse !

### 4.1.7 Q4

Soit l'affirmation « pour tout $x \in [-a, a] \cos(x) > 1/2$ »

Proposer des valeurs de a permettant de faire de cette affirmation un énoncé (c'est-à-dire une affirmation toujours vraie) ?

Cocher la ou les bonnes réponses

1/ $a = \pi/6$

2/ $a = \pi/3$

3/ $a = 0.0000001$

4/ $a = 15$

Feedback : tracer un cercle trigonométrique pour se faire une idée

Réponse : 1, 2 et 3

### 4.1.8 Q5

L'affirmation « Le carré d'un nombre entier n est supérieur ou égal à 1 » est-elle un énoncé ? (c'est-à-dire une affirmation toujours vraie)

1/ Oui

2/ Non

3/ On ne sait pas

Feedback : montrer que quelque chose est vrai n'est pas toujours aisé mais un seul contre-exemple suffit à montrer la valeur fausse d'une affirmation

Réponse : 2

Cette proposition est fausse pour n=0. Ce n'est donc pas un énoncé mathématique.

### 4.1.9 QCM

Soit l'affirmation « pour tout a ∈ E, l'équation $x^2=a$ admet deux solutions réelles distinctes »

Avec les ensembles E ci-dessous, cette affirmation est-elle un énoncé (c'est-à-dire une affirmation toujours vraie) ?

Cocher la ou les bonnes réponses

1/ $E = ]0;+\infty[$

2/ $E = \mathbb{R}$

3/ $E = [5\,;26]$

4/ $E = \mathbb{N}^*$

5/ $E = \mathbb{C}$

Feedback : il faut que a soit un réel strictement positif

Réponse : 1, 3 et 4

### 4.1.10 QCM

Soient p et q deux propositions. La négation de $p \wedge q$ est (cocher les bonnes réponses)

1/ $\overline{p \wedge q}$

2/ $\bar{p} \vee \bar{q}$

3/ $p \vee \bar{q}$

4/ $\bar{p} \wedge \bar{q}$

Feedback : Lois de Morgan

Réponse : 1 et 2

$\overline{p \wedge q}$

$\bar{p} \vee \bar{q}$ (Lois de Morgan)

| p | q | p et q | $\overline{p \wedge q}$ | non p ou non q | non p et non q |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

### 4.1.11 QCM

Soient p et q deux propositions. La négation de

$$p \vee \overline{p \wedge q}$$

est

1/ $\bar{q}$

2/ q

3/ une proposition toujours vraie

4/ une proposition toujours fausse

5/ $\bar{p} \wedge q$

Feedback : on peut s'aider des tables de vérité ou simplifier la formule à l'aide des propriétés des connexions

Réponse : une proposition toujours fausse

On peut le démontrer par les tables de vérité

| p | q | p et q | non (p et q) | p ou non (p et q) | non (p ou non (p et q)) |
|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | V | V | F |
| F | V | F | V | V | F |
| V | F | F | V | V | F |
| V | V | V | F | V | F |

On peut aussi le démontrer par simplification de la formule

Lois de Morgan : $\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$

Donc la proposition peut s'écrire $p \vee \bar{p} \vee \bar{q}$. Or $p \vee \bar{p}$ est toujours vraie donc $p \vee \bar{p} \vee \bar{q}$ est toujours vraie

Donc sa négation est une proposition toujours fausse.

### 4.1.12 QCM

La négation de « le nombre 522 n'est pas divisible par 3 mais il est divisible par 7 » est :

1/ le nombre 522 est divisible par 3 mais il est divisible par 7

2/ le nombre 522 est divisible par 3 ou il est divisible par 7

3/ le nombre 522 est ni divisible par 3 ni divisible par 7

4/ le nombre 522 est divisible par 3 ou il n'est pas divisible par 7

Feedback : mettre l'affirmation sous forme de proposition reliées par des connexion et utiliser De Morgan

Réponse : 4/ le nombre 522 est divisible par 3 ou il n'est pas divisible par 7

Soit p la proposition « le nombre 522 n'est pas divisible par 3 » et soit q la proposition « « le nombre 522 est divisible par 7 »

L'affirmation est donc $p \wedge q$

La négation est donc $\bar{p} \vee \bar{q}$ : « le nombre 522 est divisible par 3 ou il n'est pas divisible par 7 »

### 4.1.13 QCM

La négation de « ce quadrilatère n'est ni un losange ni un rectangle » est :

1/ ce quadrilatère est un losange et un rectangle

2/ ce quadrilatère est un losange ou un rectangle

3/ ce quadrilatère est un losange et n'est pas un rectangle

4/ ce quadrilatère n'est pas un losange ou n'est pas un rectangle

Feedback : mettre l'affirmation sous forme de proposition reliées par des connexion et utiliser De Morgan

Réponse : 2/ ce quadrilatère est un losange ou un rectangle

Soit p la proposition « ce quadrilatère n'est pas un losange » et soit q la proposition « « ce quadrilatère n'est pas un rectangle »

L'affirmation est donc $p \wedge q$

La négation est donc $\bar{p} \vee \bar{q}$ : « ce quadrilatère est un losange ou un rectangle »

### 4.1.14 QCM

Soit p la proposition « un carré est un triangle » et soit q la proposition « un carré est un rond »

Comment traduire l'affirmation « un carré n'est ni un triangle ni un rond » ?

Plusieurs réponses possibles

1/ $\bar{p} \vee \bar{q}$

2/ $\bar{p} \wedge \bar{q}$

3/ $\overline{p \vee q}$

4/ $p \vee q$

Feedback : De Morgan

Réponse : 2 et 3

3 (De Morgan) revient à dire « il est faux de dire qu'un carré est un triangle ou un rond » donc « un carré n'est ni un triangle ni un rond »

### 4.1.15 QCM

La négation de « être ou ne pas être » est (cocher les bonnes réponses)

1/ Ne pas être

2/ Telle est la question

3/ être

4/ une contradiction (proposition toujours fausse)

5/ une tautologie (proposition toujours vraie)

6/ être et ne pas être

Feedback : mettre l'affirmation sous forme de proposition reliées par des connexions

Réponse : 4 et 6

Soit p la proposition « être »

« être ou ne pas être » est la proposition $p \vee \bar{p}$ qui a toujours la valeur vraie quelle que soit p

Donc sa négation a toujours la valeur fausse

Par ailleurs, en utilisant les lois De Morgan, $\overline{p \vee \bar{p}} = \bar{p} \wedge p$

### 4.1.16 QCM

« Soit n un entier naturel. Pour que n soit pair, ……………. que n soit un multiple de 4 »

Compléter cette phrase avec la bonne expression

1/ il faut

2/ il suffit

3/ il faut et il suffit

4/ aucune réponse ne convient

Feedback : Si n est un multiple de 4, alors n est pair ? et si n est pair, alors n est un multiple de 4 ?

Réponse : 2

Si n est un multiple de 4, alors n est pair (n=4k=2.(2k))

Par contre si n est pair, n n'est pas nécessairement un multiple de 4 (exemples : 2, 6)

### 4.1.17 QCM

Cocher les affirmations vraies parmi celles-ci-dessous

1. si 6 est plus petit que 7 alors 7 est plus petit que 6
2. si 7 est plus petit que 6 alors 6 est plus petit que 7
3. π vaut 4 implique qu'un carré a ses 4 côtés de longueur égale
4. π vaut environ 3.14 implique que 2+2=4
5. π vaut environ 3.14 implique que 2+2=5
6. π vaut 4 implique que 2+2=5

Feedback : toute proposition fausse implique une proposition vraie !

Réponse : 2, 3, 4, 6

Table de vérité de l'implication

| p | q | p$\Longrightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

### 4.1.18 QCM

Soit A une forme propositionnelle qui dépend des variables p, q, r et qui est définie par :

$$A = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Déterminer sa table de vérité

| p | q | r | A |
|---|---|---|---|
| V | V | V | |
| V | V | F | |
| V | F | V | |
| V | F | F | |
| F | V | V | |
| F | V | F | |
| F | F | V | |
| F | F | F | |

Feedback : s'aider d'une table de vérité

Réponse

| p | q | r | $p \Rightarrow q$ | $p \Rightarrow r$ | A |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | F | F |
| V | F | V | F | V | V |
| V | F | F | F | F | V |
| F | V | V | V | V | V |
| F | V | F | V | V | V |
| F | F | V | V | V | V |
| F | F | F | V | V | V |

### 4.1.19 QCM

Soient p, q et r trois propositions

Relier les 3 formes propositionnelles 1, 2, 3 de la table de vérité à 3 formes proposées ci-dessous

A. $\bar{p} \vee (q \wedge \bar{r})$
B. $(\bar{p} \vee q) \wedge \bar{r}$

C. $(\overline{p \vee q}) \wedge \bar{r}$
D. $\overline{p \vee (q \wedge \bar{r})}$
E. $\overline{(p \vee q) \ \wedge \bar{r}}$

| p | q | r | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | V | F |
| V | V | F | F | F | V |
| V | F | V | F | V | F |
| V | F | F | F | F | F |
| F | V | V | F | V | F |
| F | V | F | F | F | V |
| F | F | V | F | V | F |
| F | F | F | V | V | V |

Réponse 1C / 2E / 3B

### 4.1.20 QCM

Combien de lignes contient la table de vérité d'une forme propositionnelle qui dépend de n variables ?

1/ $n^2$

2/ 2n

3/ n

4/ $2^n$

Feedback : il s'agit de n choix successifs de 2 valeurs

Réponse : $2^n$

### 4.1.21 QCM

Soit B une forme propositionnelle qui dépend des variables p, q, r

Si VVV et VVF sont des modèles d'une forme propositionnelle B, alors la forme propositionnelle

$$C = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow B)$$

est une tautologie.

1/ vrai

2/ faux

Feedback : s'aider d'une table de vérité et revoir la définition d'une tautologie

Réponse : vrai. Par une table de vérité, même sans avoir toutes les valeurs de B, on constate que C est toujours vraie.

| p | q | r | $p \Rightarrow q$ | B | $p \Rightarrow B$ | C |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | V | V | V |
| V | F | V | F | ? | ? | V |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | F | F | F | ? | ? | V |
| F | V | V | V | ? | V | V |
| F | V | F | V | ? | V | V |
| F | F | V | V | ? | V | V |
| F | F | F | V | ? | V | V |

## 4.1.22 QCM

Soit A une forme propositionnelle qui dépend des variables p, q, r et définie par :

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

Cette forme est-elle conséquence de $p \Rightarrow q$ ? Autrement dit, tout modèle de A est-il modèle de $p \Rightarrow q$ ?

On pourra écrire sa table de vérité pour s'aider.

1/ vrai

2/ faux

Feedback : s'aider d'une table de vérité et revoir la notion de conséquence d'une forme propositionnelle

Réponse : faux

Sur la table de vérité, on voit sur la seconde ligne que quand p prend la valeur V, q la valeur V et r la valeur F, alors $(p \Rightarrow q)$ a la valeur vraie mais A a la valeur fausse.

| p | q | r | $p \Rightarrow q$ | $p \Rightarrow r$ | A |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | F | F |
| V | F | V | F | V | V |
| V | F | F | F | F | V |
| F | V | V | V | V | V |
| F | V | F | V | V | V |
| F | F | V | V | V | V |
| F | F | F | V | V | V |

## 4.1.23 QCM

Cocher ci-dessous les formules propositionnelles qui sont des tautologies

1/ $p \Rightarrow p$

2/ $p \vee \bar{p}$

3/ $p \wedge p$

4/ $p \Rightarrow \bar{p}$

5/ $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

Feedback : s'aider d'une table de vérité et revoir la définition d'une tautologie

Réponse

1, 2 et 5

| p | q | $q \Rightarrow p$ | $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | F | V | V |
| F | V | F | V |
| F | F | V | V |

### 4.1.24 QCM

Relier les questions de la colonne de gauche à leur réponse en colonne de droite.

| Question | Réponse |
|---|---|
| Que peut-on dire d'une forme propositionnelle qui a pour conséquence une contradiction ? | Rien |
| Que peut-on dire d'une forme propositionnelle qui a pour conséquence une tautologie ? | Rien |
| Que peut-on dire d'une forme propositionnelle qui est conséquence d'une contradiction ? | C'est une contradiction |
| Que peut-on dire d'une forme propositionnelle qui est conséquence d'une tautologie ? | C'est une tautologie |

Feedback

- On dit que g est conséquence de f quand tout modèle de f est aussi modèle de g.
- Ainsi, si à chaque fois que f a la valeur vraie, g a la valeur vraie, alors g est conséquence de f.
- Quand g a la valeur fausse, f a donc la valeur fausse. Mais g peut avoir la valeur vraie alors que f a la valeur fausse.

Réponse

- Que peut-on dire d'une forme propositionnelle qui a pour conséquence une contradiction ? C'est une contradiction
- Que peut-on dire d'une forme propositionnelle qui a pour conséquence une tautologie ? rien
- Que peut-on dire d'une forme propositionnelle qui est conséquence d'une contradiction ? rien
- Que peut-on dire d'une forme propositionnelle qui est conséquence d'une tautologie ? C'est une tautologie

### 4.1.25 QCM

Soit f une forme propositionnelle donnée.

Que peut-on dire de g quand on a à la fois :

$f \vee g$ est une tautologie et $f \wedge g$ est une contradiction

1/ g est synonyme de f

2/ g est synonyme de la négation de f

3/ g est une tautologie

4/ g est une contradiction

Feedback : définition d'une tautologie et d'une contradiction. On pourra aussi s'aider d'une table de vérité

Écrire les tables de vérité et voir les valeurs que doit prendre g pour satisfaire les deux propriétés énoncées

Réponse : 2/ g est synonyme de la négation de f

### 4.1.26 QCM

Cocher les bonnes réponses

Pour tous réels x et y, on note P(x,y) la proposition $x+y^2=0$. Cocher les propositions suivantes ci-dessous qui sont vraies

1/ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, P(x,y)$

2/ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, P(x,y)$

3/ $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, P(x,y)$

4/ $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, P(x,y)$

5/ $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, P(x,y)$

Feedback : l'ordre des quantificateurs est important

Réponse : 4 et 5 sont vraies

### 4.1.27 QCM

Quelle est la négation de la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R}\ g(x) < 0$$

1/ $\forall x \in \mathbb{R}\ g(x) > 0$

2/ $\exists x \in \mathbb{R}\ g(x) \geq 0$

3/ $\exists x \in \mathbb{R}\ g(x) < 0$

4/ $\exists x \in \mathbb{R}\ g(x) \leq 0$

Feedback : pour nier une affirmation, on écrit ∀ à la place de ∃, et vice versa, et on écrit « ≠ »

Réponse

$$\exists x \in \mathbb{R}\ g(x) \geq 0$$

### 4.1.28 QCM

Compléter les formules ci-dessous avec un des connecteurs $\Leftrightarrow, \Rightarrow$

$$x \in \mathbb{R}\ x = 3 \ldots\ldots\ldots x^2 = 9$$

$$x \in \mathbb{R}\ x = 3\ ou\ x = -3 \ldots\ldots\ldots x^2 = 9$$

$$x \in \mathbb{R}\ x = 0 \ldots\ldots\ldots cosx = 1$$

$$x \in \mathbb{R}\ k \in \mathbb{N}\ x = 0 + 2k\pi \ldots\ldots\ldots cosx = 1$$

Feedback : chercher l'implication ou l'équivalence

Réponse

$$x \in \mathbb{R}\ x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$$

$$x \in \mathbb{R}\ x = 3\ ou\ x = -3 \Leftrightarrow x^2 = 9$$

$$x \in \mathbb{R}\ x = 0 \Rightarrow cosx = 1$$

$$x \in \mathbb{R}\ k \in \mathbb{N}\ x = 0 + 2k\pi \Leftrightarrow cosx = 1$$

### 4.1.29 QCM

Soit E un ensemble de réels. On rappelle que pour tout réel x, $|x| = \max(x; -x)$.

Qu'implique l'affirmation « $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in E, |x| \leq M$ » ?

Cocher les bonnes réponses

1/ E est l'ensemble des réels

2/ E est nécessairement l'ensemble vide

3/ E=[-M,M]

4/ Tous les éléments de E sont inférieurs ou égaux à M

5/ Tous les éléments de E sont positifs

6/ Tous les éléments de E sont supérieurs ou égaux à -M

7/ Aucun ensemble E ne peut satisfaire cette affirmation

8/ Il existe un élément de l'ensemble E strictement inférieur à M

Feedback : l'affirmation veut dire que tout élément de E est compris entre -M et M inclus

Réponse : 4 et 6

5 est fausse car E peut contenir des réels négatifs supérieurs à -M

8 est fausse car E peut ne contenir que l'élément M

### 4.1.30 QCM

La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x^2 = y$ » est

1/ $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x^2 = y$

2/ $\forall x \in \mathbb{R},\ \ \forall y \in \mathbb{R},\ x^2 \neq y$

3/ $\exists x \in \mathbb{R},\ \ \forall y \in \mathbb{R},\ x^2 = y$

4/ $\exists x \in \mathbb{R},\ \ \forall y \in \mathbb{R},\ x^2 \neq y$

Feedback : pour nier une affirmation, on écrit ∀ à la place de ∃, et vice versa, et on écrit « ≠ »

Réponse : 4

### 4.1.31 QCM

Soit l'affirmation

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |U_n - \lambda| < \varepsilon$$

La négation de cette affirmation est

1/ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq N_0, |U_n - \lambda| \geq \varepsilon$

2/ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq N_0, |U_n - \lambda| < \varepsilon$

3/ $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq N_0, |U_n - \lambda| \geq \varepsilon$

4/ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |U_n - \lambda| > \varepsilon$

Réponse : 1

Pour nier un quantificateur, il faut prendre l'autre

Pour nier « strictement inférieur à » il faut prendre « supérieur ou égal à »

### 4.1.32 QCM

Soit E l'ensemble des élèves d'un cours de maths.

Soit P le prédicat P(x)= « l'élève x connait le théorème de Thalès »

Soit Q le prédicat Q(x)= « l'élève x sait ce qu'est un nombre pair »

On nous informe que

$$\forall x \in E\ (P(x) \wedge Q(x))$$

C'est-à-dire : pour tout x de E, P et Q sont vraies. Alors

1/ Tous les élèves du cours de maths connaissent le théorème de Thalès ou savent ce qu'est un nombre pair mais pas les deux

2/ Il existe un élève du cours de maths qui ne connait pas le théorème de Thalès

3/ Tous les élèves du cours de maths connaissent le théorème de Thalès et savent ce qu'est un nombre pair

Feedback : revoir les quantificateurs (il existe, pour tout) et les symboles « et » et « ou »

Réponse : 3

## 4.1.33 QCM

Soient les propositions P « Marie joue du piano » et Q « Marie fait du tennis » et R « Marie fait de la biologie »

Relier les affirmations (colonne de gauche) aux traductions en langage symbolique (colonne de droite)

| | |
|---|---|
| Marie joue du piano et fait de la biologie mais pas de tennis | non (R et (non P)) |
| Marie joue du piano et fait du tennis mais pas à la fois de la biologie et du tennis | (P et Q) et non (Q et R) |
| Il est faux que Marie fasse de la biologie sans jouer du piano | P et R et non Q |
| Il est faux que Marie ne joue pas du piano et fasse quand même du tennis | non R et non Q et P |
| Il est faux que Marie fasse de la biologie ou du tennis sans jouer au piano | non ((non P) et Q) |

Feedback : revoir les quantificateurs (il existe, pour tout) et les symboles « et » et « ou »

Réponse

| | |
|---|---|
| Marie joue du piano et fait de la biologie mais pas de tennis | P et R et non Q |
| Marie joue du piano et fait du tennis mais pas à la fois de la biologie et du tennis | (P et Q) et non (Q et R) |
| Il est faux que Marie fasse de la biologie sans jouer du piano | non (R et (non P)) |
| Il est faux que Marie ne joue pas du piano et fasse quand même du tennis | non ((non P) et Q) |
| Marie ne fait ni biologie ni du tennis mais elle joue du piano | non R et non Q et P |

## 4.1.34 QCM

Soient les propositions P « Jean joue au tennis » et Q « Jean aime courir »

Relier les affirmations (colonne de gauche) aux traductions en langage symbolique (colonne de droite)

| | |
|---|---|
| Jean joue au tennis et il aime courir | $\text{nonQ} \wedge P$ |
| Si Jean joue au tennis, alors il aime courir | $\text{nonP} \wedge \text{nonQ}$ |
| Jean n'aime ni courir, ni jouer au tennis | $\text{nonQ} \vee \text{nonP}$ |
| Jean n'aime pas courir mais il joue au tennis | $P \wedge Q$ |
| Si Jean n'aime pas courir, alors il ne joue pas au tennis | $P \Rightarrow Q$ |
| Jean n'aime pas courir ou n'aime pas jouer au tennis | $\text{nonQ} \Rightarrow \text{nonP}$ |

Réponse

| | |
|---|---|
| Jean joue au tennis et il aime courir | $P \wedge Q$ |

| | |
|---|---|
| Si Jean joue au tennis, alors il aime courir | $P \Rightarrow Q$ |
| Jean n'aime ni courir, ni jouer au tennis | nonP∧nonQ |
| Jean n'aime pas courir mais il joue au tennis | nonQ∧P |
| Si Jean n'aime pas courir, alors il ne joue pas au tennis | nonQ⇒nonP |
| Jean n'aime pas courir ou n'aime pas jouer au tennis | nonQ∨nonP |

### 4.1.35 QCM

La suite (Un) définie par $U_0 = 0$ ; $U_1 = 3$ et pour tout entier n,

$$U_{n+2} = U_{n+1} + 2U_n$$

Après quelques expérimentations, on intuite que

$$U_n = 2^n - (-1)^n$$

Comment démontrer rigoureusement ce résultat ?

1. Par l'absurde
2. Par contraposée
3. Par récurrence
4. Au cas par cas

Feedback : quand une proposition dépend d'un entier n, on est souvent tenté par un type particulier de raisonnement

Réponse : 3, par récurrence

- On voit que la proposition est vraie pour n=0 et n=1
- On suppose qu'elle est vraie au rang n (n≥2), on montre alors que sous cette hypothèse, elle est vraie au rang n+1
- On a montré la proposition par principe de récurrence

### 4.1.36 QCM

La démonstration de la formule du binôme de Newton peut se faire par récurrence.

1/ vrai

2/ faux

Feedback : voir cours

Réponse : vrai

### 4.1.37 QCM

Pour montrer qu'elle est fausse, donner un contre-exemple de la proposition « Pour tout nombre entier n strictement positif il existe trois entiers x,y,z tels que n = $x^2+y^2+z^2$ ».

Feedback : chercher un contre-exemple en commençant par 1 puis 2 puis 3 puis 4…….

Réponse : 7. Les seuls carrés plus petits sont $0^2$, $1^2$ et $2^2=4$ mais en les sommant on ne fait pas 7

### 4.1.38 QCM

Toute forme propositionnelle du type $(p \wedge q) \vee D$ avec D une forme propositionnelle quelconque, admet VVV et VVF pour modèles

1/ vrai

2/ faux

Feedback : qu'est-ce que le modèle d'une forme propositionnelle ?

Réponse : vrai

Quand p et q sont vraies, $p \wedge q$ est vraie et $(p \wedge q) \vee D$ est vraie quelle que soit D. Donc VVV et VVF sont des modèles de $(p \wedge q) \vee D$

### 4.1.39 QCM

Soit n un entier naturel différent de 0. Si 8 ne divise pas $n^2-1$, alors n est pair

Démonstration

Supposons que n est impair. Alors il existe un entier naturel p tel que n=2p+1

Dans ce cas, $n^2-1=4p^2+4p=4p(p+1)$. Donc $n^2-1$ est un multiple de 4 et $n^2-1$ est aussi un multiple de 8 car p ou p+1 est pair donc un multiple de 2.

Finalement, si n est impair, alors 8 divise pas $n^2-1$, donc si 8 ne divise pas $n^2-1$, alors n est pair

Comment a été démontré ce résultat ?

1/ Par l'absurde

2/ Par contraposée

3/ Par récurrence

4/ Au cas par cas

Feedback : la proposition « p $\Longrightarrow$ q » est équivalente à « non(q) $\Longrightarrow$ non(p) ».

Réponse : par contraposée

### 4.1.40 QCM

Théorème :

Le plus petit diviseur strictement supérieur à 1 d'un entier strictement supérieur à 1 est un nombre premier.

Démonstration :

Soit n un entier strictement supérieur à 1. On considère l'ensemble de ses diviseurs strictement supérieurs à 1. Comme n fait partie de cet ensemble, ce n'est pas l'ensemble vide et on peut noter p son plus petit élément. Si p n'est pas premier, il a un diviseur a autre que 1 et p. Dans ce cas, a divise n car a divise p et p divise n. Par conséquent, a est un diviseur de n strictement supérieur à 1 et strictement inférieur à p. Comme il n'en existe pas (on a choisi comme le plus petit élément de l'ensemble des diviseurs de n strictement supérieurs à 1), alors a n'existe pas et p est premier.

Comment a été démontré ce théorème ?

- 1/ Par l'absurde
- 2/ Par contraposée
- 3/ Par récurrence
- 4/ Au cas par cas

Feedback : supposer quelque chose et montrer que ça n'a pas de sens……

Réponse : 3, par l'absurde

### 4.1.41 QCM

Que peut-on dire de l'affirmation « $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \geq 0$ » ?

1/ Elle est vraie

2/ Elle est fausse

3/ Elle est vraie si on impose que x soit positif

4/ Elle est vraie si on change $\geq$ en ≤

Réponse : 2/ Elle est fausse

On peut le démontrer avec un raisonnement par l'absurde

### 4.1.42 QCM

Soit n un entier naturel différent de 0. Si 8 ne divise pas $n^2$-1, alors

- 1/ n est pair
- 2/ n est impair
- 3/ n+1 est pair
- 4/ n+1 est impair

Réponse : 1 et 4

### 4.1.43 Exercice : le binôme de Newton

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, pour tous réels x et y

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . x^{n-k} . y^{k}$$

avec

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

# 5 Références bibliographiques

[2]

[1] *Gauss: une révolution de la théorie des nombres*. Barcelone: RBA Coleccionables, 2018.

[2] J. Vélu, G. Avérous, I. Gilles, et F. Santi, *Mathématiques pour l'informatique: rappels de cours, méthodes, exercices et problèmes avec corrigés détaillés*. in Sciences sup. Paris: Dunod, 2008.