Mathématiques

-

Tests d’hypothèses

Frédéric Menan

fmenan@cesi.fr

Table des matières

1 Exemple d'introduction (Référence : Lien Internet)

On a récemment avancé que le salaire moyen en France est de 1000 euros par mois.

On souhaite vérifier cette hypothèse. On note le salaire X.

Par expérience on sait que la dispersion des salaires français vaut σ.

Sur un échantillon aléatoire de n = 100 individus, on calcule la moyenne $\bar{X}$ des salaires.

Si $\bar{X} = 100$, a priori on peut rejeter l'hypothèse ; Si $\bar{X} = 1001$, a priori on peut accepter l'hypothèse.

Mais si $\bar{X} = 890$ ou $\bar{X} = 1010$?

La moyenne obtenue n'est ni très grande ni très petite par rapport à la valeur hypothétique, de telle sorte que la décision ne s'impose pas d'elle-même. Cela arrive fréquemment…. De plus, même lorsque la décision parait s'imposer on n'est jamais sûr de ne pas être tombé sur un échantillon ayant très peu de chances de se réaliser.

Comment être sûr de prendre la « bonne » décision ? Jamais. Tout au plus, on peut prendre la décision la plus probable. On posera le problème de la façon suivante : combien grande doit être la différence entre la moyenne expérimentale et l'affirmation pour rejeter l'affirmation ?

On fera l'hypothèse que le salaire moyen en France est de 1000 euros (H_0).

Dans ce cas,

$$T = \frac{\bar{X} - 1000}{\sigma / \sqrt{n}}$$

suit la loi normale centrée réduite N(0,1).

On peut alors déterminer la probabilité d'observer un écart absolu ≥ |t| (valeur de l'écart observé) lorsqu'on est effectivement sous H_0.

Dans notre exemple : on suppose un écart-type de 100.

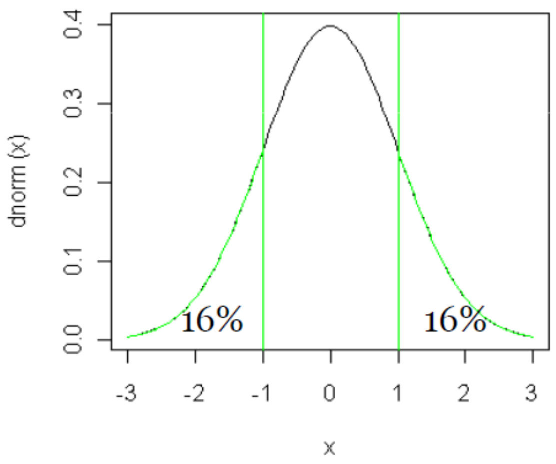
Cas 1 : $\bar{X} = 1010$, Alors T = ($\bar{X}$ - 1000) / σ/√n = 1, et P(|T|≥1) = 32% quand l'hypothèse est vraie.

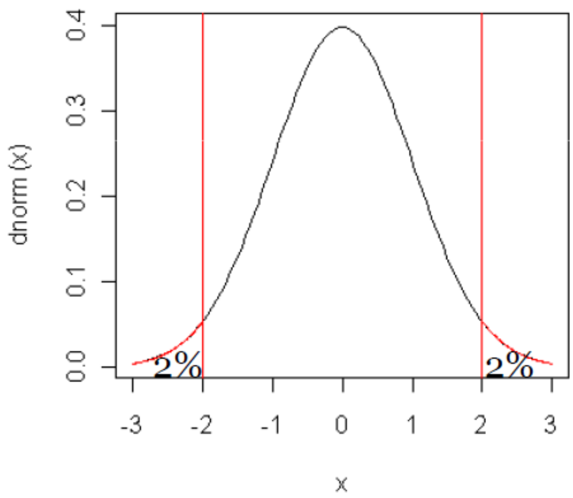
Cette probabilité est forte donc la différence de 10 n'est pas suffisamment significative pour réfuter l'affirmation.

Cas 2 : $\bar{X} = 980$, T = ($\bar{X}$ - 1000) / σ/√n = 2 et P(|T|≥2) = 4%

Les chances de réalisation d'une telle différence sont faibles ; on peut réfuter l'hypothèse.

Cas 1 : $\bar{X} = 1010$ Cas 2 : $\bar{X} = 980$





Conclusion de l'exemple

Pour décider si l'hypothèse formulée est supportée ou non par les observations, il faut une méthode qui permette de conclure si l'écart observé entre la valeur de la statistique obtenue dans l'échantillon et celle du paramètre spécifiée dans l'hypothèse est trop important pour être uniquement imputable au hasard de l'échantillonnage.

Cette méthode sera appelée test d'hypothèse. L'objectif d'un test d'hypothèse sera d'accepter ou de rejeter la validité d'hypothèses relatives à une ou plusieurs populations à partir de l'étude de un ou plusieurs échantillons aléatoires.

Dans notre exemple, le test consistera à dire que la différence entre la moyenne obtenue et la valeur théorique sera considérée comme suffisamment grande pour justifier le rejet lorsque la probabilité d'observer une telle différence sera suffisamment faible.

Que veut dire suffisamment faible ? Ce critère (seuil de probabilité α) est subjectif et dépendra du risque que l'on accepte de prendre en rejetant l'hypothèse alors qu'elle est vraie.

2 Définitions

2.1 Hypothèse statistique

Une hypothèse statistique est une affirmation concernant les caractéristiques d'une population (valeurs des paramètres, forme de la distribution des observations).

2.2 Hypothèse nulle (H_0) et hypothèse alternative (H_1)

L'hypothèse selon laquelle on fixe à priori un paramètre de la population à une valeur particulière s'appelle l'hypothèse nulle et est notée H_0. N'importe quelle autre hypothèse qui diffère de l'hypothèse H_0 s'appelle l'hypothèse alternative (ou contre-hypothèse) et est notée H_1. C'est l'hypothèse nulle qui est soumise au test et toute la démarche du test s'effectue en considérant cette hypothèse comme vraie.

Le test d'hypothèse doit fournir une règle permettant de faire un choix entre ces deux hypothèses.

2.3 Seuil de signification du test (risque d'erreur de première espèce α)

Le risque α de rejeter à tort l'hypothèse nulle H_0 alors qu'elle est vraie, s'appelle le seuil de signification du test et est défini par :

$$\alpha = P(\text{rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ est vraie})$$

A ce seuil de signification, on fait correspondre sur la distribution d'échantillonnage de la statistique une région de rejet de l'hypothèse nulle (appelée également région critique). L'aire de cette région correspond à la probabilité α.

Si l'on choisit $\alpha = 5\%$, alors on admet par avance que la variable d'échantillonnage peut prendre, dans 5% des cas, une valeur se situant dans la zone de rejet de H_0, bien que H_0 soit vraie, et ceci uniquement d'après le hasard de l'échantillonnage.

Sur la distribution d'échantillonnage correspondra une région d'acceptation de H_0 (ou région de non-rejet) de probabilité $1-\alpha$.

2.4 Risque d'erreur de deuxième espèce β

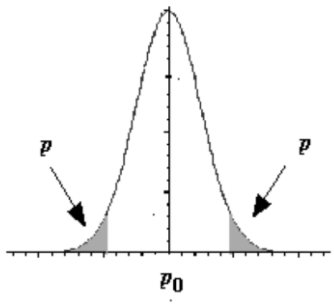
On appelle risque d'erreur de seconde espèce la probabilité β de rejeter H_1 et d'accepter H_0 alors que H_1 est vraie. Ceci se produit si la valeur de la statistique de test tombe dans la région d'acceptation alors que l'hypothèse H_1 est vraie.

Pour quantifier ce risque, il faut connaître la loi de probabilité de la statistique sous l'hypothèse H_1.

2.5 Test bilatéral

Si H_0 consiste à dire que la population estudiantine avec une fréquence de fumeurs « p » est représentative de la population avec une fréquence de fumeurs « p_0 », on pose alors :

$$H_0 : p = p_0 \text{ et } H_1 : p \neq p_0$$

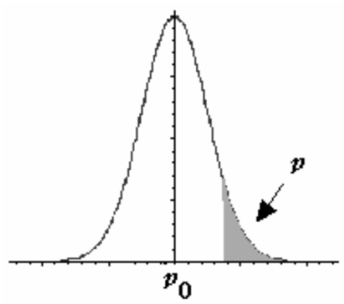


Le test sera bilatéral car on considère que la fréquence p peut être supérieure ou inférieure à la fréquence p_0. La région critique α en vert correspond à une probabilité α/2 de part et d'autre de la courbe.

2.6 Test unilatéral

Si l'on fait l'hypothèse que la fréquence de fumeurs dans la population estudiantine p est supérieure à la fréquence de fumeurs dans la population p_0, on pose alors

$$H_0 : p = p_0 \text{ et } H_1 : p > p_0$$



Le test sera unilatéral car on considère que la fréquence p ne peut être que supérieure à la fréquence p_0. La région critique α en vert correspond à une probabilité α.

3 Construction d’un test d’hypothèse

La construction d’un test consiste à déterminer entre quelles valeurs peut varier la variable aléatoire étudiée, en supposant l’hypothèse vraie, sur la seule considération du hasard de l’échantillonnage.

(1) définir l’hypothèse nulle, notée H_0, à contrôler ;
(2) choisir une statistique pour contrôler H_0 et définir la distribution de la statistique sous l’hypothèse « H_0 est réalisée » ;
(3) définir le niveau de signification du test et la région critique associée ;
(4) calculer, à partir des données fournies par l’échantillon, la valeur de la statistique ;
(5) prendre une décision concernant l’hypothèse posée.

4 Les différents types de tests

4.1 Introduction

En fonction de l'hypothèse testée, plusieurs types de tests peuvent être réalisés :

- Les tests destinés à vérifier si un échantillon peut être considéré comme extrait d'une population donnée, vis-à-vis d'un paramètre comme la moyenne ou la fréquence observée (tests de conformité) ou par rapport à sa distribution observée (tests d'ajustement). Dans ce cas la loi théorique du paramètre est connue au niveau de la population.
- Les tests destinés à comparer plusieurs populations à l'aide d'un nombre équivalent d'échantillons (tests d'égalité ou d'homogénéité) sont les plus couramment utilisés. Dans ce cas la loi théorique du paramètre est inconnue au niveau des populations. On peut ajouter à cette catégorie le test d'indépendance qui cherche à tester l'indépendance entre deux caractères, généralement qualitatifs.

4.2 Test de conformité

Consiste à confronter un paramètre calculé sur l'échantillon à une valeur pré-établie. Les plus connus sont les tests portant sur la moyenne, la variance ou sur les proportions.

<u>Test de comparaison d'une moyenne expérimentale à une moyenne théorique</u>

On souhaite savoir si un échantillon de moyenne μ appartient à une population d'espérance μ_0 ou appartient à une autre population.

Soit une population de caractère statistique d'espérance μ_0 et d'écart-type σ connu. Soit un échantillon de n individus, d'espérance μ que l'on estimera à l'aide de la moyenne expérimentale $\bar{X}$.

Etape 1. Mise en place des hypothèses

On fera l'hypothèse nulle $H_0 : \mu = \mu_0$. On souhaite rejeter ou pas H_0.

Hypothèse alternative :

- $H_1 : \mu \neq \mu_0$ pour un test bilatéral
- $H_1 : \mu > \mu_0$ ou $H_1 : \mu < \mu_0$ pour un test unilatéral

Etape 2. Détermination de la fonction discriminante T et de sa distribution

- Si l'écart-type σ de la population est connu, alors la variable

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

suit la normale centrée réduite N(0, 1).

- Si l'écart-type σ de la population est inconnu, on l'estime sur l'échantillon (valeur s donnée par la formule ${s^2}_{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$). Alors la variable

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{s\,/\sqrt{n}}$$

suit une loi de student à n-1 degrés de liberté.

Etape 3. Calcul des valeurs critiques de T (bornes de la zone de rejet)

On détermine à l'aide des lois (Normale ou Student) la valeur maximale t au seuil de signification α, c'est-à-dire vérifiant :

- $P(-t \leq T \leq t) = 1 - \alpha$ pour un test bilatéral
- $P(T \leq t) = 1 - \alpha$ pour un test unilatéral

Puis on détermine la zone de rejet :

- Pour un test bilatéral, la zone de rejet est : $]-\infty; -t] \cup [t; +\infty[$
- Pour un test unilatéral à gauche, la zone de rejet est : $]-\infty; -t]$
- Pour un test unilatéral à droite, la zone de rejet est : $[t; +\infty[$

Etape 4 .Calcul de la valeur de T prise dans l'échantillon, conclusion

On calcule la valeur t_0 prise par T dans l'échantillon étudié.

$$t_0 = \frac{\bar{X}_n - \mu}{s/\sqrt{n}} \text{ ou } t_0 = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- Si t_0 tombe dans la zone de rejet, on dira que l'écart observé est statistiquement significatif au seuil α. Cet écart est trop élevé et ne permet pas d'accepter H_0. On rejette H_0.

- Si t_0 se trouve dans la zone d'acceptation (donc hors de la zone de rejet), alors l'écart observé n'est pas significatif au seuil α. Cet écart sera imputé aux fluctuations d'échantillonnage. On accepte H_0.

5 Annexe. Autres tests d'hypothèses

5.1.1 Test d'homogénéité (ou test de comparaison)

Consiste à vérifier que K(K ≥ 2) échantillons proviennent de la même population ou, cela revient à la même chose, que la distribution de la variable d'intérêt est la même dans les K échantillons. Exemple : y a-t-il une différence entre le taux de glucose moyen mesuré pour deux échantillons d'individus ayant reçu des traitements différents ?

5.1.2 Test d'indépendance (ou test d'association)

Consiste à éprouver l'existence d'une liaison entre 2 variables. Exemple : est-ce que la distribution de la couleur des yeux observée dans la population française est indépendante du sexe des individus ?

5.1.3 Test d'ajustement : test du khi-deux

A partir d'un échantillon dont on a déterminé la distribution du caractère statistique, on souhaite savoir si l'échantillon suit une loi statistique connue (loi normale, ...). Les individus ont été comptés : on connait alors les effectifs n_i pour chaque modalité (ou pour chaque classe s'il y a eu regroupement par classes).

Calcul des effectifs théoriques

On calcule les effectifs théoriques n_{ti} à l'aide de la loi de loi statistique théorique. Ce sont les valeurs que les effectifs doivent avoir si notre caractère statistique obéit bien à cette loi.

Ecart entre les deux distributions

On compare les effectifs théoriques aux effectifs réellement observés à l'aide de la variable :

$$\chi^2 = \frac{(n_1 - n_{t_1})^2}{n_{t_1}} + \frac{(n_2 - n_{t_2})^2}{n_{t_2}} + \cdots + \frac{(n_k - n_{t_k})^2}{n_{t_k}}$$

Etape 1. Mise en place des hypothèses

- H_0 : Les observations suivent la distribution théorique spécifiée.
- H_1 : Les observations ne suivent pas la distribution théorique spécifiée

Etape 2. Détermination de la fonction discriminante du test et de sa distribution de probabilité

On calcule la variable χ^2

Etape 3. Calcul des valeurs critiques de χ^2 (bornes de la zone d'acceptation)

χ^2 > 0 donc la zone d'acceptation de H_0 a pour borne inférieure 0.

On va déterminer la valeur maximale ${\chi^2}_{max}$ que la variable χ^2 peut prendre, au seuil de signification α, lorsque les variations entre la distribution théorique et la distribution observée sont seulement dues aux fluctuations d'échantillonnage.

La valeur ${\chi^2}_{max}$ est définie par : $P(\chi^2 > {\chi^2}_{max}) = \alpha$

Etape 4 .Calcul de la valeur de χ^2 prise dans l'échantillon, conclusion

On calcule la valeur ${\chi^2}_0$ prise par χ^2 dans l'échantillon.

Si ${\chi^2}_0$ tombe dans la zone de rejet (${\chi^2}_0 > {\chi^2}_{max}$), on dira que l'écart-réduit est statistiquement significatif au seuil α : il est trop élevé. On rejette H_0.

Si ${\chi^2}_0$ tombe dans la zone d'acceptation (${\chi^2}_0 < {\chi^2}_{max}$), on dira que l'écart-réduit n'est pas statistiquement significatif au seuil α et qu'il est donc imputable aux seules fluctuations d'échantillonnage. On accepte H_0.

5.1.4 Test d'homogénéité : Comparaison de la moyenne de deux échantillons : test T

On veut savoir si la moyenne de la première population (m1) peut être ou non considérée comme égale à la moyenne de la deuxième population (m2).

On prendra un échantillon de chaque population et on comparera les moyennes X1 et X2.

Etape 1. Mise en place des hypothèses

$$H_0 : m1 = m2 \; ; \; H_1 : m1 \neq m2$$

Etape 2. Détermination de la fonction discriminante du test et de sa distribution de probabilité

La différence D = x1 – x2 sera étudiée. On détermine la loi de probabilité de D en se plaçant sous l'hypothèse H_0.

On suppose que l'on dispose de grands échantillons (n1 ≥ 30 et n2 ≥ 30) et que les deux variances des échantillons sont connues.

Les moyennes $\overline{X_i}$ suivent chacune une loi normale de moyenne m_i.

On peut estimer l'écart-type de chaque moyenne $\overline{X_i}$ (i=1,2) par l'estimateur : $\frac{\sigma_{echantillon\ i}}{\sqrt{n_i - 1}}$

Les moyennes $\overline{X_i}$ sont indépendantes donc :

- D = $\overline{X_1}$-$\overline{X_2}$ suit aussi une loi normale.
- E(D) = E($\overline{X_1}$) - E($\overline{X_2}$) = $m_1 - m_2$. Si on fait l'hypothèse H0 ($m_1 = m_2$), alors E(D) = 0.
- V(D) = V($\overline{X_1}$) + V($\overline{X_2}$) = $\frac{{\sigma^2}_{echantillon\ 1}}{n_1 - 1} + \frac{{\sigma^2}_{echantillon\ 2}}{n_2 - 1}$

On pose alors

$$T = \frac{D}{\sqrt{\frac{{\sigma^2}_{echantillon\ 1}}{n_1 - 1} + \frac{{\sigma^2}_{echantillon\ 2}}{n_2 - 1}}}$$

T suit la loi N(0,1). T sera la fonction discriminante du test.

Etape 3. Calcul des valeurs critiques de T (bornes de la zones d'acceptation)

La zone d'acceptation de H_0 sera centrée autour de 0. On doit déterminer dans la table de la loi N(0,1) la valeur maximale $t_{\alpha/2}$ telle que :

$$P(- t_{\alpha/2} \leq T \leq t_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Cette valeur maximale $t_{\alpha/2}$ représente l'écart maximal admissible entre T sous H_0 et T observée quand on suppose que l'écart est seulement du aux fluctuations d'échantillonnage au seuil de signification α.

Etape 4 .Calcul de la valeur de T prise dans l'échantillon, conclusion

On calcule la valeur t_0 prise par T dans l'échantillon.

- Si t_0 tombe dans la zone de rejet, on dira que l'écart-réduit est statistiquement significatif au seuil α : il est trop élevé. On rejette H_0.
- Si t_0 tombe dans la zone d'acceptation, l'écart-réduit n'est pas statistiquement significatif au seuil α. Il est donc imputable aux seules fluctuations d'échantillonnage. On accepte H_0.

6 Exercices

6.1 Exercice : temps de jeu hebdomadaire

Le temps hebdomadaire de jeu moyen pour l'ensemble des joueurs est μ=60min, écart-type σ=10min. Sur les millions de joueurs enregistrés, on prélève n=50 individus au hasard. Soit Xi le temps de jeu hebdomadaire de l'individu i, avec i=1…….n.

On note $\bar{X} = \frac{X_i + \cdots + X_n}{n}$ la moyenne obtenue sur l'échantillon.

1. D'après le théorème central limite, vers quelle loi de probabilité converge la variable $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$?
2. En déduire la probabilité pour que la moyenne du temps de jeu de l'échantillon prélevé soit comprise entre 58 et 62min.

Correction

Le temps hebdomadaire de jeu moyen pour l'ensemble des joueurs est μ=60min, écart-type σ=10min. Sur les millions de joueurs enregistrés, on prélève n=50 individus au hasard. Soit Xi le temps de jeu hebdomadaire de l'individu i, avec i=1…….n.

On note $\bar{X} = \frac{X_i + \cdots + X_n}{n}$ la moyenne obtenue sur l'échantillon.

1. D'après le théorème central limite, vers quelle loi de probabilité converge la variable $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$?

Vers la loi normale centrée réduite

2. En déduire la probabilité pour que la moyenne du temps de jeu de l'échantillon prélevé soit comprise entre 58 et 62min.

On cherche

$$P(58 < \bar{X} < 62)$$

Soit

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Alors

$$P(58 < \bar{X} < 62) = P\left(\frac{58-60}{\frac{10}{\sqrt{50}}} < Z < \frac{62-60}{\frac{10}{\sqrt{50}}}\right)$$

$$P(58 < \bar{X} < 62) = P(-1{,}414 < Z < 1{,}414) = 2.P(Z < 1{,}414) - 1$$

D'après la lecture de la loi N(0,1)

$$P(Z < 1{,}414) = 0{,}92145$$

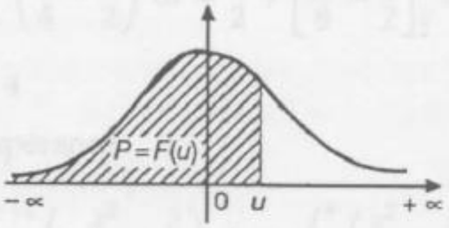
Donc

$$P(58 < \bar{X} < 62) = 0{,}8429$$

7 Annexes

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Probabilité $F(u)$ d'une valeur inférieure à u

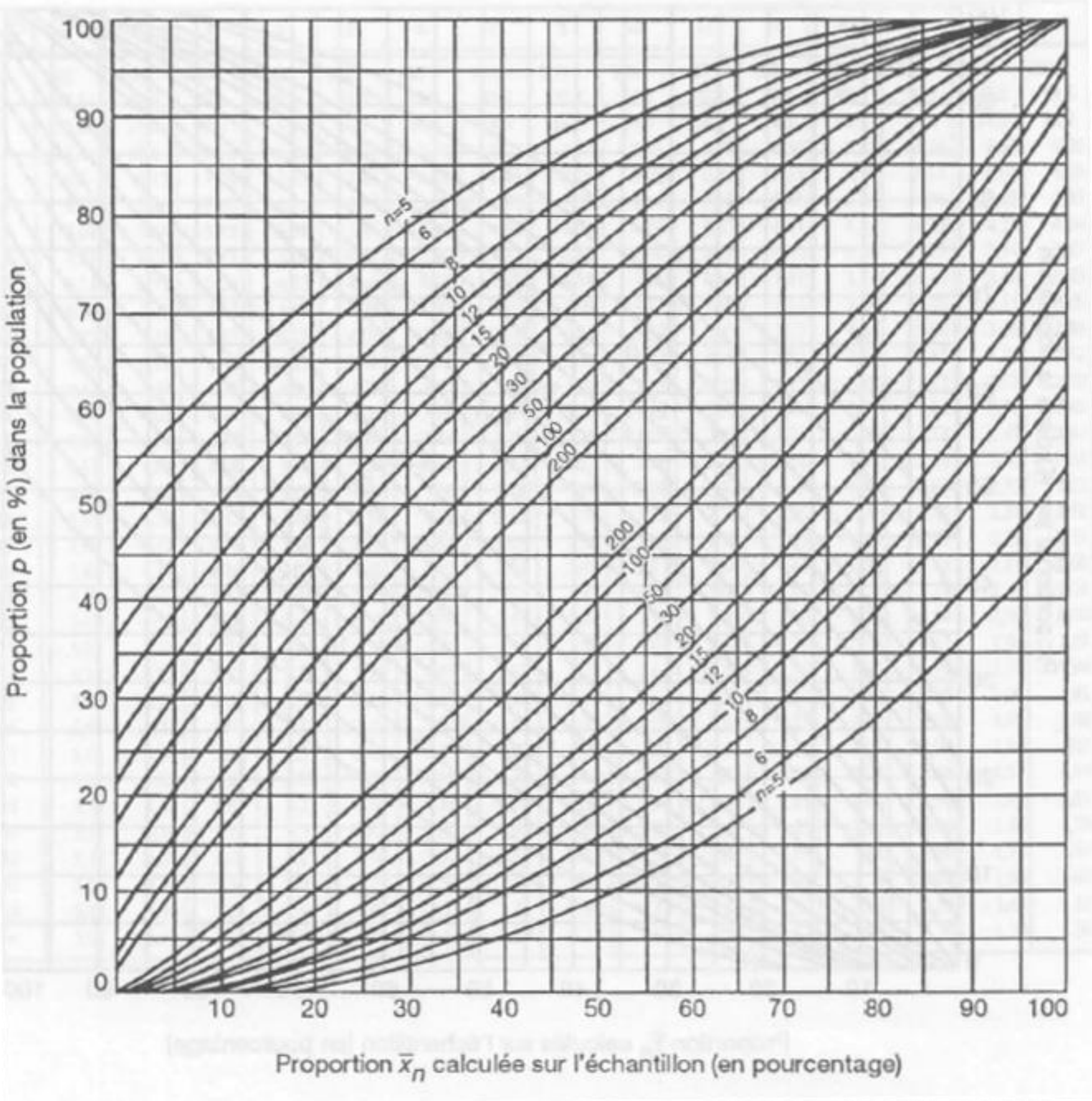


u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Tables pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$F(u)$	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

Intervalles de confiance pour une proportion p
Intervalle bilatéral de niveau de confiance 0,95
Intervalles unilatéraux de niveau de confiance 0,975



Fractiles d'ordre P de la loi de Student T_ν

ν \ P	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,999	0,9995
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
32	0,256	0,530	0,853	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622
34	0,255	0,529	0,852	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348	3,601
36	0,255	0,529	0,852	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	3,333	3,582
38	0,255	0,529	0,851	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	3,319	3,566
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
70	0,254	0,527	0,847	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
90	0,254	0,526	0,846	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183	3,402
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

8 Références bibliographiques

[1], [2]

[1] MOUCHIROUD, « Mathématiques : Outils pour la Biologie Deug SV – UCBL ».

[2] REDER, « Probabilités et statistiques. Cours et Exercices Bordeaux I ». 2002.