Mathématiques

-

Processus Stochastiques

Frédéric Menan

fmenan@cesi.fr

2025

Table des matières

1 Historique

- XVIIIe : étude des jeux de hasard
- Fin XIXe : émergence de la théorie, applications en physique, biologie, sciences sociales
- Première moitié du XXe : développement des outils mathématiques, des concepts généraux
- Seconde moitié du XXe : révolution numérique, développement des simulations et des résolutions approchées

Andreï Andreïevitch Markov

- Diplômé de l'université de Saint-Pétersbourg
- Devient professeur à l'université de Saint-Pétersbourg en 1886
- Devient membre de l'Académie des sciences en 1896

https://www.universalis.fr/encyclopedie/andrei-andreievitch-markov/

Andreï Andreïevitch Markov (1856-1922) mathématicien russe (image : wikipedia)

Applications

- Jeux de hasard (ruine du joueur.....)

Un joueur démarre avec une somme Xo = x

Le casino démarre avec la somme a – x

Le jeu s'arrête à la ruine du joueur ou à sa fortune

Soit $Y_t = \begin{cases} 1 \; si \; le \; joueur \; gagne \; à \; la \; manche \; t \;\; avec \; p(Y_t = 1) = p \\ -1 \; si \; le \; joueur \; perd \; à \; la \; manche \; t \; avec \; p(Y_t = -1) = 1 - p \end{cases}$

$$X_t = X_0 + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_t$$

La suite de va Xt est un processus stochastique appelé chaine de Markov car

$$P(X_t = i | X_0 = x, X_1 = i_1, \dots., X_{t-1} = i_{t-1}) = P(X_t = i | X_{t-1} = i_{t-1})$$

Applications

- Divers : tireur à l'arc.

Il effectue un tir à 50 mètres. S'il réussit il passe à 60 mètres, sinon il retente sa chance à 50 mètres.

A 60 mètres, s'il réussit il passe à 70 mètres, sinon il revient à 50 mètres.

A 70 mètres, s'il réussit il passe à 80 mètres, sinon il revient à 60 mètres.

A 80 mètres, s'il réussit il reste à cette distance, sinon il revient à 70 mètres.

Applications

- Finance

Evolution du cours X d'un produit sur le marché

- ✓ $X_{t+\Delta t} = h.X_t$ en cas de hausse
- ✓ $X_{t+\Delta t} = b.X_t$ en cas de baisse

avec $0 < b < 1 < h$

$X_{t+\Delta t} = (h.Y_t+b.(1- Y_t)).X_t$

Avec Y_t : variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre p sur {0,1}

Soit le processus stochastique $Z_t = Z_{t-1} + Y_t$

On montre que

$$X_t = X_0.h^{Z_t}.b^{t-Z_t}$$

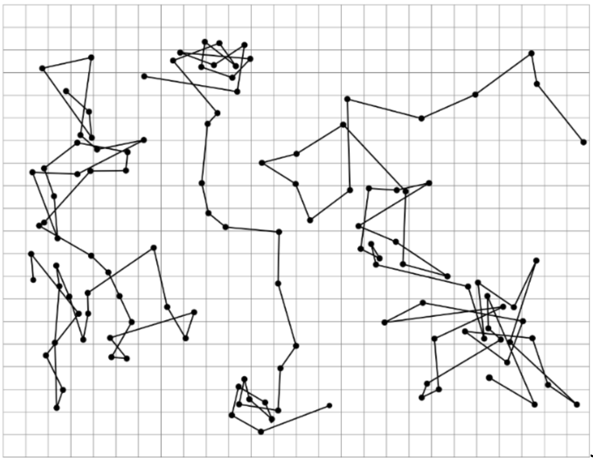
- Pagerank de Google

Applications

- Mouvement brownien

Description mathématique du mouvement aléatoire d'une « grosse » particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les « petites » molécules du fluide environnant.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Mouvement_brownien



J. B. Perrin, SVG drawing by MiraiWarren — SVG drawing based on File:PerrinPlot2.gif, itself from J. B. Perrin, "Mouvement brownien et réalité moléculaire," *Ann. de Chimie et de Physique* (VIII)

Applications

- Dynamique des populations
- Evolutions économiques et sociales
- Fiabilité, prévision de pannes et d’évènements
- Réseaux (transports, énergie, communication)
- Gestion de stocks
- Gestion de services (files d’attentes)
- Physique, physique statistique
- Traitement d’image

2 Définitions

On appelle processus stochastique une famille de variable aléatoires $X(t)$ à valeurs réelles où t est un paramètre réel.

Si l'espace des paramètres, ou espace du temps T, est de la forme $T=\{0,1,2...\}$, alors on parle de processus stochastique à temps discret. On écrira X_n au lieu de $X(t)$

Si l'espace des paramètres, ou espace du temps T, est de la forme $T=[0,\infty[$, alors on dira que $\{X(t); t\geq 0\}$ est un processus stochastique à temps continu.

Si $X(t) = x$, on dit que « le processus est dans l'état x à l'instant t ». On appellera « espace des états » l'ensemble S des valeurs prises par X.

La forme prise par un processus stochastique lors d'une expérience aléatoire est appelée réalisation ou trajectoire de ce processus.

 # Exemple fil rouge : disponibilité de deux machines #

Une unité de production comprend deux machines qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Chaque machine a la fiabilité p au cours d'une journée, donc sa probabilité de tomber en panne pendant cette période est de $1 – p$. Dans ce cas, elle sera réparée pendant la nuit et sera en état de marche le jour suivant. Une seule machine peut être réparée à la fois.

Soit X_n le nombre de machines en panne au début de la n-ième journée.

$\{X_n ; n = 0,1,2...\}$ est un processus stochastique à temps discret et à 2 états : 0 et 1.

3 Chaines de Markov

3.1 Probabilité de transition

On suppose que l'on connait, pour chaque paire d'états i,j et pour chaque instant n, la probabilité $p_{ij}(n)$ que le processus soit dans l'état j à l'instant n+1, étant donné qu'il se trouve dans i à l'instant n.

On notera cette probabilité :

$$p_{ij}(n) = p(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

On l'appellera par la suite *probabilité de transition à une étape.*

 # Exemple fil rouge : disponibilité de deux machines #

Calculer les probabilités de transition à une étape

3.2 Propriété de Markov et Chaîne de Markov

Quand l'état présent du processus (son état à l'instant n) suffit pour connaitre son évolution future, on parle de propriété de Markov.

En d'autres termes, chaque variable aléatoire X_k ne dépend pas de X_{k-2}, ...X_0 et dépend seulement de X_{k-1}.. En termes mathématiques, on écrit :

$$p(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, X_0 = i_0) = p(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

Pour tout n≥0 et pour des états quelconques j, i, i_{n-1}, i_0 de S

Une chaîne vérifiant la propriété de Markov sera appelée chaîne de Markov. On parle aussi de processus stochastique sans mémoire.

Remarque : une chaîne de Markov est dite homogène dans le temps quand les probabilités de transition $p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$ sont indépendantes du temps. Alors on a : $p_{ij}(n) = p_{ij}$ pour tout n

3.3 Matrice de transition

On peut écrire ces probabilités conditionnelles p_{ij} sous forme matricielle. On la notera $P = (p_{ij})$.

Propriétés de la matrice de transition

- Matrice carrée
- Tous les termes sont positifs ou nuls
- La somme des termes de chaque ligne est égale à 1
- Quand on part de l'état i, on est sûr de se retrouver ensuite dans un état j avec j dans S

 # Exemple fil rouge : disponibilité de deux machines #

Ecrire la matrice de transition P

3.4 Graphe des transitions

On peut également écrire ces probabilités conditionnelles p_{ij} sous forme de graphe.

 # Exemple fil rouge : disponibilité de deux machines #

Tracer le graphe des transitions

4 Probabilités d'état d'une chaîne de Markov en fonction du nombre n de transitions

4.1 Probabilités de transition à n étapes

Soit $p_{ij}^{(n)}$ la probabilité qu'une chaine de Markov passe de l'état i à l'état j en n transitions ou étapes.
On a : $p_{ij}^{(n)} = P(X_{k+n} = j \mid X_k = i)$ avec $n \geq 1$ et $k \geq 1$

Or

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in S} P(X_n = j, X_{n-1} = k \mid X_0 = i) \qquad (n \geq 2)$$

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in S} P(X_n = j \mid X_{n-1} = k, X_0 = i).P(X_{n-1} = k \mid X_0 = i)$$

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in S} P(X_n = j \mid X_{n-1} = k).P(X_{n-1} = k \mid X_0 = i)$$

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in S} p_{kj}^{(1)}.p_{ik}^{(n-1)}$$

Soit $P^{(n)}$ la matrice de probabilité des transitions à n étapes : $P^{(n)} = p_{ij}^{(n)}$

On vient de montrer que :

$$P^{(n)} = P^{(n-1)}.P = P^n$$

4.2 Loi de probabilité de Xn

Soient les probabilités d'état $\pi_k(n) = P(X_n = k)$.

On peut alors écrire un vecteur ligne $\pi(n) = (\pi_1(n), \pi_2(n), ...)$, que l'on nommera la distribution de Xn.

D'après le théorème des probabilités totales,

$$\pi_k(n) = \sum_{i \in S} \pi_i(0).p_{ik}^{(n)}$$

En notation matricielle, on écrira : $\pi(n) = \pi(0).P^n$

Les résultats établis ci-dessus montrent qu'une chaine de Markov est totalement définie si l'on connait sa matrice des probabilités de transition à une étape, ainsi que la distribution de X_0.

C'est la simplicité de la structure mathématique de ce type de processus qui explique son intérêt théorique et pratique.

5 Comportement asymptotique : régime transitoire, régime permanent, distribution limite

L'étude précédente, à savoir l'expression des probabilités d'état d'une chaîne de Markov en fonction du nombre n de transitions, consiste à étudier le régime transitoire du processus.

On constate souvent que la distribution π(n) converge vers une distribution limite quand n→∞. Si tel est le cas, on dit que cette dernière définit le régime permanent du processus stochastique. Contrairement au régime transitoire, le régime permanent n'est pas influencé par le choix de la distribution initiale.

On dira qu'une chaîne de Markov converge vers π ou possède une distribution limite π si

$$\lim_{n\to\infty} \pi(n) = \pi$$

indépendamment de la distribution initiale π(0).

La convergence d'une chaine de Markov est donc une propriété qui ne dépend que de la matrice P.

<u>Théorème</u>

Si la matrice de transition P est telle qu'une au moins de ses puissances n'a que des termes strictement positifs, alors π(n) → π quelle que soit la distribution initiale π(0).

De plus, on aura $P^n \to P^*$ quand n → +∞. π sera une distribution à termes strictements positifs et P* une matrice dont toutes les lignes sont identiques au vecteur limite π. On aura aussi π.P* = π

6 Distributions stationnaires

6.1 Définition et méthodes de calcul

Une distribution de probabilité est dite stationnaire si elle n'est pas affectée par une ou plusieurs transitions d'une chaine de Markov.

Une distribution de probabilité discrète $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_m)$ sera donc stationnaire par-rapport à une matrice stochastique P si elle vérifie $\pi.P = \pi$

π est donc un vecteur propre à gauche de P associé à la valeur propre 1.

<u>Résolution</u>

$\pi.P = \pi \Leftrightarrow \forall j \in S,$

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}$$

De plus on sait que De plus on sait que $\sum_{k \in S} \pi_k = 1$

Exemple : soit la chaine de Markov définie par : $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

Alors on cherche la distribution π telle que $(\pi1 \quad \pi2 \quad \pi3) = (\pi1 \quad \pi2 \quad \pi3).\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

Soit encore

$$\begin{cases} \pi2 + 1/4.\pi3 = 1/2.\pi1 \\ 1/4.\pi3 = \pi2 \\ 1/2.\pi1 = 1/2.\pi3 \\ \pi1 + \pi2 + \pi3 = 1 \end{cases}$$

On obtient : π = (4/9;1/9;4/9)

6.2 Existence et unicité des distributions stationnaires

Notion d'états communicants : deux états i et j communiquent entre eux si l'on peut passer de i à j et de j à i avec des probabilités non nulles.

Notion de classe : la définition d'états communicants permet de partitionner S en classes disjointes.

S = C1 U C2 U … U Cr de telle manière que tous les états d'une classe communiquent entre eux et que deux états appartenant à deux classes différentes ne communiquent pas.

Classe finale : une classe est dite finale s'il est impossible de la quitter. Une classe non finale sera dite transitoire.

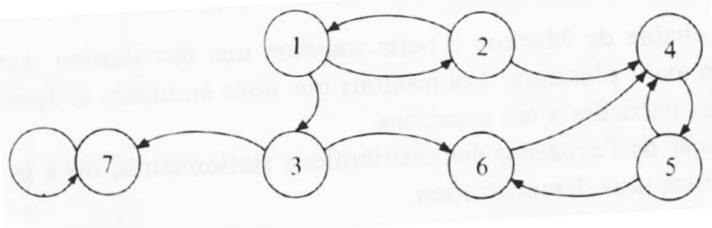
Remarque : si tout couple d'état est communicant, on parle de chaine irréductible.

Exemple

Chaque arc indique une probabilité ≠ 0.

Classes transitoires : {1,2} et {3}.

Classes finales : {4,5,6} et {7}



Théorèmes

Une chaine de Markov admet une unique distribution stationnaire ssi elle comprend une seule classe finale.

Pour une chaine de Markov finie, il existe toujours au moins une distribution stationnaire (ce qui n’est plus nécessairement vrai si l’espace des états est infini)

Si π est la distribution limite d’une chaine de Markov, alors π est l’unique distribution stationnaire de cette chaine.

Une chaine de Markov peut avoir une unique distribution stationnaire sans qu’elle converge vers cette dernière.

7 Chaînes de Markov absorbantes

7.1 Définitions

Un état i d'une chaîne de Markov est dit absorbant si le processus ne peut plus quitter cet état une fois qu'il y est entré, en d'autres termes si $p_{ii} = 1$.

Une chaîne de Markov est dite absorbante si elle comprend au moins un état absorbant et si l'on peut passer de n'importe quel état à un état absorbant.

Exemple

Une école propose une formation de 3 ans. Chaque année peut-être réussie ou non. Une année non réussie peut être répétée au plus une fois. La réussite des 3 ans est récompensée par un diplôme. Cette formation est une chaine de Markov à 3 états non absorbants (les 3 années) et 2 états absorbants (sortir de l'école avec le diplôme ou sans).

7.2 Délai d'absorption / probabilité d'absorption

Quand on rencontre une chaine de Markov absorbante, on se pose en général 2 questions :

1. S'il y a plusieurs états absorbants, quelle est la probabilité pour un processus d'être absorbé par un état donné ?
2. Combien de transitions faudra-t-il pour que le processus soit absorbé ?

Soient :

- Ni le nombre de transitions jusqu'à l'absorption en partant de l'état i.
- n_i = E(Ni) = temps moyen jusqu'à absorption en partant de i
- b_{ij} : probabilité que le processus soit absorbé dans j si son état initial est i

On considère des chaines de Markov comprenant plusieurs états absorbants. Le théorème ci-dessous permet de calculer la probabilité que le processus soit absorbé par un état donné.

Théorème

Soit j un état absorbant et S' l'ensemble de tous les états non absorbants. Alors les probabilités b_{ij} sont les solutions du système d'équations :

$$b_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in S'} p_{ik}.b_{kj}$$

Ce résultat est une conséquence du **théorème des probabilités totales**.

Démo

Soit S'' l'ensemble des états absorbants

Par le théorème des probabilités totales on a

$$b_{ij} = \sum_{k\in S} p_{ik}b_{kj} = \sum_{k\in S'} p_{ik}b_{kj} + \sum_{k\in S''} p_{ik}b_{kj}$$

$$b_{ij} = \sum_{k\in S'} p_{ik}b_{kj} + p_{ij}.1$$

Le théorème ci-dessous permet de répondre à la question 2 (Combien de transitions faudra-t-il pour que le processus soit absorbé ?)

Théorème

Les quantités n_i sont les solutions du système d'équations :

$$n_i = 1 + \sum_{k\in S'} p_{ik}.n_k$$

où i est un état non absorbant et S' est l'ensemble de tous les états non absorbants.

Démo

On suppose qu'il y a un seul état absorbant j. On part de l'état i avec i≠j

Soit Ak l'évènement : le processus passe de i à k lors de la première unité de temps

Alors

$$E(N_i) = \sum_{k\in S} E(N_i|A_k).p(A_k)$$

Or par définition $p(A_k) = p_{ik}$

De plus, si $E(N_i)$ est le temps moyen jusqu'à absorption en partant de l'état i et $E(N_k)$: temps moyen jusqu'à absorption en partant de l'état k, alors $E(N_i|A_k) = E(N_k) + 1$

Donc

$$E(N_i) = \sum_{k\in S}(E(N_k) + 1).p_{ik}$$

$$E(N_i) = \sum_{k\in S} E(N_k)p_{ik} + \sum_{k\in S} p_{ik}$$

Or $\sum_{k\in S} E(N_k)p_{ik} = \sum_{k\in S'} E(N_k)p_{ik}$ car $E(N_j) = 0$

De plus, $\sum_{k\in S} p_{ik} = 1$ par définition des probabilités de transition

Donc

$$E(N_i) = \sum_{k\in S} E(N_k)p_{ik} + \sum_{k\in S} p_{ik} = \sum_{k\in S'} E(N_k)p_{ik} + 1$$

8 Exercices

8.1.1 Exercice : chaines de Markov, questions de cours

Soit une chaine de Markov comportant des états absorbants.

Soient :

Ni le nombre de transitions jusqu'à l'absorption en partant de l'état i.

$n_i = E(N_i)$ = temps moyen jusqu'à absorption en partant de i

Soient m et j des états absorbants de cette chaine.

b_{ij} : probabilité que le processus soit absorbé dans j si son état initial est i

Calculer n_m, b_{mm}, et b_{mj}

Correction

$n_m = 0$; $b_{mm} = 1$; $b_{mj} = 0$

8.1.2 Exercice : 3 étapes de production

Dans une production en série, les articles passent par 3 étapes de fabrication.

Ils sont inspectés à la fin de chaque étape. Ils peuvent alors présenter 3 situations possibles :

- totalement défectueux (probabilité p, l'article est jeté)
- légèrement défectueux (probabilité q, il passe une seconde fois par la même étape)
- sain (probabilité r avec $p + q + r = 1$), il va à la prochaine étape ou est livré

On prendra $p = 0.1$; $q = 0.3$

a. Combien d'états comporte cette chaine de Markov ?

b. Quels sont les états absorbants ?

c. Déterminer les probabilités p_{ij}

d. Estimer la durée moyenne jusqu'à ce qu'un article quitte la machine

e. Estimer la probabilité qu'un article quittant la machine soit en bon état

Correction

EXEMPLE. Dans une production en série, les articles passent par 3 étapes de fabrication; ils sont inspectés à la fin de chaque étape. Ils peuvent alors présenter 3 états possibles: totalement défectueux, (probabilité p; dans ce cas l'article est jeté), légèrement défectueux (probabilité q, il passe une seconde fois par la même étape), en bon état (probabilité r avec $p + q + r = 1$). Trouver la durée moyenne jusqu'à ce qu'un article quitte la machine ainsi que la probabilité qu'un article quittant la machine soit en bon état (on prendra $p = 0{,}1$ et $q = 0{,}3$).

Ce processus de fabrication peut être décrit par une chaîne de Markov à 5 états; chaque article peut se trouver dans une des 3 étapes (états 1 à 3); en plus, il peut quitter la production soit en bon état (4) soit parce qu'il est totalement défectueux (5). Les deux derniers états sont absorbants, par ailleurs on a

$$p_{11} = p_{22} = p_{33} = q$$
$$p_{12} = p_{23} = p_{34} = r$$
$$p_{15} = p_{25} = p_{35} = p.$$

Les autres p_{ij} sont nulles.

Les quantités n_1, n_2, n_3 sont alors déterminées par le système d'équations

$$\begin{aligned} n_1 &= 1 + qn_1 + rn_2 \\ n_2 &= 1 \qquad\quad + qn_2 + rn_3 \\ n_3 &= 1 \qquad\quad + qn_3 \end{aligned}$$

d'où $n_1 = 3{,}7$ étapes.

D'autre part

$$\begin{aligned} b_{14} &= qb_{14} + rb_{24} \\ b_{24} &= \qquad\quad qb_{24} + rb_{34} \\ b_{34} &= r \qquad\qquad + qb_{34} \end{aligned}$$

d'où $b_{14} = r^3/(1-q)^3 = 0{,}630$. □

Question e/

On doit estimer b14 : probabilité que le processus soit absorbé dans 4 si son état initial est 1

Dans le cours : soit j un état absorbant et S' l'ensemble de tous les états non absorbants, alors

Soit j = 4 (l'article quitte la production en bon état).

$$b_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in S'} p_{ik} . b_{kj}$$

8.1.3 Exercice : disponibilité de machines non réparées[1]

Soit un dispositif technique comprenant deux éléments montés en parallèle et fonctionnant indépendamment l'un de l'autre.

Chaque élément a une fiabilité égale à p au cours d'une journée et *il n'y a pas de possibilité de réparation*.

Xn est le nombre d'éléments en panne au début de la n-ième journée (n = 0, 1, ….).

a) Combien d'états possède cette chaîne de Markov ?
b) Déterminer les probabilités de transition correspondantes et réaliser le graphe des transitions.
c) Cette chaîne de Markov est-elle absorbante ? Si oui, quel est l'état absorbant et quelle est la distribution limite de cette chaîne ?
d) Ecrire la matrice de transition P
e) Les deux éléments sont en état de fonctionnement à n = 0. Quelle est la distribution du nombre d'éléments en panne après n jours ?
f) Combien de jours seront nécessaires pour passer de 0 à 2 machines en panne ?

Correction

2.2.3 Exemples

EXEMPLE (système en parallèle). Soit un dispositif technique comprenant deux éléments montés en parallèle et fonctionnant indépendamment l' un de l'autre (sect. 6.2). Chaque élément a une fiabilité égale à p au cours d'une journée, et il n'y a pas de possibilité de réparation.

Si X_n est le nombre d'éléments en panne au début de la n-ième journée ($n = 0, 1, \dots$), on a ainsi défini une chaîne de Markov à trois états, 0, 1 et 2; les probabilités de transition correspondantes, que l'on calcule de façon élémentaire, sont indiquées dans le graphe des transitions donné par la figure 2.2.

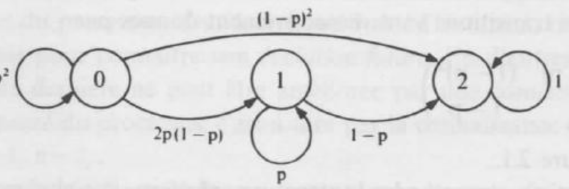


Fig. 2.2.

Si l'on admet que les deux éléments sont en état de fonctionnement à l'instant $n = 0$, c'est-à-dire que $X_0 = 0$, on peut s'intéresser aux questions suivantes :

- Quelle est la distribution du nombre d'éléments en panne après 1, 2, …, n jours?
- Quelle est la durée de bon fonctionnement de ce dispositif, c'est-à-dire quelle est la distribution du temps nécessaire pour le processus de passer de 0 à 2?

Les réponses à ces questions seront données dans les sections 2.3 et 2.6. □

[1] Inspiré de Ruegg

Processus de type absorbant avec 2 comme unique état absorbant.

Chaine de Markov convergente avec (0,0,1) comme distribution limite.

Tôt ou tard le processus sera absorbé dans 2, avec une probabilité égale à 1.

$$P = \begin{pmatrix} p^2 & 2p(1-p) & (1-p)^2 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Avec cette matrice il est alors immédiat de calculer P^n pour $n \geq 2$

$$p_{00}^{(n)} = p^{2n}$$

$$p_{01}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{00}^{k}.p_{01}.p_{11}^{n-k-1} = 2p(1-p)\sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1+k} = 2p^n(1-p^n)$$

$$p_{02}^{(n)} = 1 - p_{00}^{(n)} - p_{01}^{(n)} = p_{01}^{(n)} = (1-p^n)^2$$

$$p_{11}^{(n)} = p^n$$

$$p_{12}^{(n)} = 1 - p^n$$

On en déduit que :

$$\pi(n) = \pi(0).p^n = (p^{2n}, 2p^n(1-p)^n, (1-p^n)^2)$$

Cet exemple est de type absorbant avec 2 comme unique état absorbant.

Il s'agit d'une chaine de Markov convergente ayant (0, 0, 1) comme distribution limite.

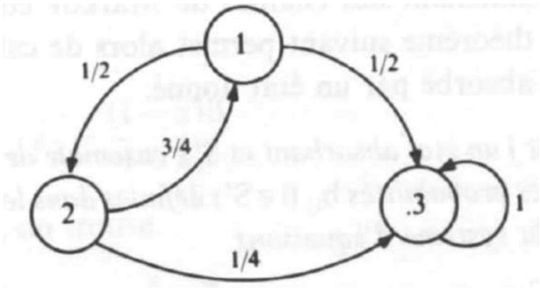
Tôt ou tard, le processus sera absorbé dans 2 avec une probabilité égale à 1.

$$\begin{cases} n_0 = 1 + p^2.n_0 + 2p(1-p)n_1 \\ n_1 = 1 + pn_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_0 = \dfrac{1+2p}{1-p^2} \\ n_1 = \dfrac{1}{1-p} \end{cases}$$

8.1.4 Exercice : chaine à 3 états dont 1 état absorbant

Inspiré de [1]. Soit la chaine de Markov représentée par le graphe de transition suivant



Soient :

- o Ni le nombre de transitions jusqu'à l'absorption en partant de l'état i.
- o n_i = E(Ni) = temps moyen jusqu'à absorption en partant de i

On souhaite calculer le nombre de transitions pour que le processus soit absorbé

a. Calculer la probabilité $P(N_1=1)$: probabilité de passer de l'état 1 à l'état 3 en 1 étape
b. Calculer la probabilité $P(N_1=2)$: probabilité de passer de l'état 1 à l'état 3 en 2 étapes
c. De même, calculer les probabilités $P(N_1=3)$ (3 étapes) et $P(N_1=4)$ (4 étapes)
d. En déduire $n_1 = E(n_1)$

Formulaire : rappel sur les séries géométriques : on utilise la formule, valable pour 0<a<1

$$\sum_{k=1}^{\infty} k.a^{k-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$$

Correction

$P(N_1=1) = 1/2$

$P(N_1=2) = 1/2*1/4 = 1/8$

$P(N_1=3) = 1/2*3/4*1/2 = 3/16$

$P(N_1=4) = 1/2*3/4*1/2*1/4 = 3/64$

Finalement,

$$P(N_1 = 2k-1) = \frac{1}{2}.\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1}$$

$$P(N_1 = 2k) = \frac{1}{8}.\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1}$$

$$n_1 = E(n_1) = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)\frac{1}{2}.\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k)\frac{1}{8}.\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1}$$

$$n_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (2k)\frac{1}{2}.\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)\frac{1}{2}.\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4}.\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1}$$

$$n_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k.\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^{k} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} k.\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1}$$

$$n_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k.\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^{k} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} k.\left(\frac{3}{8}\right)^{k-1}$$

$$n_1 = \frac{1}{(1-a)^2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{1-a} + \frac{1}{4}.\frac{1}{(1-a)^2} = 2{,}4$$

Remarque : rappel de la formule

$$\sum_{k=1}^{\infty} k.a^{k-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$$

Valable pour 0<a<1

9 Références bibliographiques

[1], [2]

[1] A. Ruegg, *Processus stochastiques: avec applications aux phénomènes d'attente et de fiabilité*, 1. éd. in Méthodes mathématiques pour l'ingénieur, no. 6. Lausanne: Presses polytechniques romandes, 1989.

[2] REDER, « Probabilités et statistiques. Cours et Exercices Bordeaux I ». 2002.