Mathématiques

-

Limites, continuité
Intégration
Dérivation
Fonctions usuelles

Frédéric Menan

fmenan@cesi.fr

Table des matières

1 Etude des Fonctions

1.1 Fonction réelle d'une variable réelle

1.1.1 Fonctions monotones – strictement monotones

1.1.1.1 Fonction croissante

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I, on dit que f est croissante sur I si on a

$\forall(x_1, x_2) \in I^2, si\ x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Elle est strictement croissante si $f(x_1) < f(x_2)$.

1.1.1.2 Fonction décroissante

On définit de même une fonction décroissante.

1.1.2 Fonction paire / impaire

1.1.2.1 Fonction paire

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I, on dit que f est paire si

$$\begin{cases} \forall x \in I, -x \in I \\ \forall x \in I, f(-x) = f(x) \end{cases}$$

La courbe de f admet un axe de symétrie Oy.

1.1.2.2 Fonction impaire

Dans ce cas, $f(-x) = -f(x)$.

La courbe de f admet un centre de symétrie en O, origine du repère.

1.1.3 Remarque

Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. En effet

$$f(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

$\frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big)$: fonction paire

$\frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$: fonction impaire

1.1.4 Fonction périodique

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f admet pour période le réel T≠0 si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f(x + T) = f(x)$$

1.2 Limite d'une fonction

Dans ce paragraphe, f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et on notera a un élément de l'intervalle I ou l'une de ses extrémités.

1.2.1 Définition

On dit que f admet pour limite en a le réel L si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x-a| \leq \delta \Longrightarrow |f(x)-L| \leq \varepsilon$$

Traduction : pour tout réel ε strictement positif, il existe un δ strictement positif tel que pour tout x de I, si la valeur absolue de x-a est inférieur ou égale à δ, alors la valeur absolue de $f(x) - L$ est inférieur ou égale à ε.

Explication : si f admet pour limite en a le réel , pour n'importe quel écart ε entre f(x) et L, aussi petit soit-il, lorsque la différence entre x et a devient suffisamment petite, alors la différence entre f(x) et L est inférieur au petit écart ε.

On écrit

$$\lim_{a} f = L \text{ ou } \lim_{x \to a} f(x) = L$$

1.2.2 Limite quand x tend vers l'infini

On dit que f admet une limite L lorsque x tend vers l'infini si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \geq x_0, |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

1.2.3 Quand f a pour limite +∞ en a

On dit que f admet pour limite +∞ quand x tend vers a si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}\ |x-a| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \geq a$$

On note

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

1.2.4 Unicité de la limite

Si f admet L pour limite en a, cette limite est unique.

<u>Démonstration</u>

On admet que f admet deux limites L et L'.

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta_1 > 0 : \forall x_1 \in I, |x-a| \leq \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon_1$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0, \exists \delta_2 > 0 : \forall x_2 \in I, |x-a| \leq \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - L'| \leq \varepsilon_2$$

Pour $\delta = \inf\{\delta_1 ; \delta_2\}$

$$|x-a| \leq \delta$$

$$|f(x) - L| + |f(x) - L'| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$|L - L'| \leq \varepsilon$$

Ce qui n'est pas vérifié pour $\varepsilon = \frac{1}{2}(L - L')$

Donc L=L'.

1.2.5 Proposition

Soit f une fonction définie sur Df admettant une limite finie b en a, alors $\lim_a f = b \Leftrightarrow \lim_a f - b = 0$

Démonstration

$$\lim_a f = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, |x - a| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \lim_a f - b = 0$$

1.2.6 Proposition

Si a est un réel fini, dire que $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{h \longrightarrow 0} f(a + h) = L$

Démonstration

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, |x - a| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall a + h \in D_f, |a + h - a| \leq \delta \Longrightarrow |f(a + h) - L| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \longrightarrow 0} f(a + h) = L$$

1.2.7 Remarque

Une fonction n'admet pas nécessairement de limite en tout point de son intervalle de définition I.

1.2.8 Limite à droite, limite à gauche

Soit f définie sur intervalle I de $\mathbb{R}$, on dit que f admet une limite à droite en a si la fonction $f_{|I \cap]a;+\infty[}$ admet une limite en a. La fonction f admet une limite à gauche en a si la fonction $f_{|I \cap]-\infty;a[}$ admet une limite en a.

Exemple

La fonction partie entière E admet une limite à droite en 1 égale à 1 et une limite à gauche égale à 0.

En effet

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, |x - 1| \; avec \; x > 1 \Longrightarrow |E(x) - 1| \leq \varepsilon$$

Donc

$$\lim_{x \to 1 \; et \; x > 1} E(x) = 1$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, |x - 1| \; avec \; x < 1 \Longrightarrow |E(x) - 0| \leq \varepsilon$$

Donc

$$\lim_{x \to 1 \; et \; x < 1} E(x) = 0$$

1.2.9 Définition

Une propriété portant sur une fonction I définie sur un intervalle I est vraie au voisinage de a si

- Lorsque a réel, elle est vraie sur $I \cap]a-\alpha; a+\alpha[$ avec α>0
- Lorsque a=+∞ elle est vraie pour $I \cap]C; +\infty[$ avec C réel
- Lorsque a=-∞ elle est vraie pour $I \cap]-\infty; b[$ avec b réel

1.2.10 Proposition

Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.

Démonstration

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, |x-a| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

$$\Longrightarrow -\varepsilon \leq f(x) - L \leq \varepsilon$$

$$L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon$$

Corollaire

Si $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L$ et L>0 alors il existe un voisinage de a sur lequel f>0.

Démonstration

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f, |x-a| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

Pour $\varepsilon = \frac{L}{2}$

$$|f(x) - L| \leq \frac{L}{2}$$

$$-\frac{L}{2} \leq f(x) - L \leq \frac{L}{2}$$

$$0 < \frac{L}{2} \leq f(x) \leq \frac{3L}{2}$$

1.2.11 Opérations algébriques sur les limites

1.2.11.1 Somme

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I et a un point de I tel que

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = L$$

$$\lim_{x \longrightarrow a} g(x) = L'$$

Alors

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) + g(x) = L + L'$$

Démonstration

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = L' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Longrightarrow |g(x) - L'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $\delta \quad = \min\{\delta_1 \,; \delta_2\}$

$$|f(x) - L| + |g(x) - L'| \leq \varepsilon$$

Donc $\forall x \in I$

$$|f(x) + g(x) - (L + L')| \leq \varepsilon$$

1.2.11.2 Produit par un scalaire

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et λ un réel, alors $\lim\limits_{x \to a} \lambda . f(x) = \lambda . L$

Démonstration

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}$$

$$\Longrightarrow |\lambda| . |f(x) - L| \leq \frac{\varepsilon . |\lambda|}{|\lambda| + 1}$$

$$\Longrightarrow |\lambda f(x) - \lambda L| \leq \varepsilon$$

1.2.11.3 Produit

Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I et a un point de I tel que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = L'$$

Alors

$$\lim_{x \to a} f(x) . g(x) = L . L'$$

Démonstration

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in I, |x - a| \leq \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \sqrt{\varepsilon}$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = L' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in I, |x - a| \leq \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - L'| \leq \sqrt{\varepsilon}$$

$$|f(x)g(x) - L.L'| \leq |f(x)g(x) - Lg(x)| + |L.g(x) - L.L'|$$

$$\leq |g(x)| . |f(x) - L| + |L| . |g(x) - L'|$$

Or $\lim\limits_{x \to a} f(x) - L = 0$ et g est une fonction bornée au voisinage de a donc

$$\lim_{x \to a} g . (f(x) - L) = 0$$

$\lim\limits_{x \to a} g(x) - L' = 0$ donc $\lim\limits_{x \to a} |L| . |g(x) - L'| = 0$

$$\lim_{a} f . g - L . L' = 0$$

$$\lim_{a} f.g = L.L'$$

1.2.11.4 Inverse

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ et $L \neq 0$ alors

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$$

Démonstration

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| = \frac{|f(x) - L|}{|L||f(x)|}$$

Or $|f(x) - L| \to 0$

Pour $\varepsilon = \frac{|L|}{2}$,

$$\exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \frac{|L|}{2}$$

$$-\frac{|L|}{2} \leq f(x) - L \leq \frac{|L|}{2}$$

$$L - \frac{|L|}{2} \leq f(x) \leq \frac{|L|}{2} + L$$

Si L>0,

$$\frac{L}{2} \leq f(x) \leq \frac{3L}{2}$$

Si L<0,

$$\frac{3L}{2} \leq f(x) \leq \frac{L}{2}$$

Donc $\frac{1}{f(x)}$ est bornée

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L} = 0$$

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$$

1.2.12 Limite d'une fonction composée

Soient f et g deux fonctions telles que

$$f: I \to J$$

$$g: J \to \mathbb{R}$$

Soit $a \in I$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ avec $l \in J$

On suppose que g admet une limite L en l.

Alors la fonction composée $g \circ f$ admet pour limite L :

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = L$$

1.2.13 Formes indéterminées

On ne peut déterminer la limite d'une fonction lorsque les calculs amènent aux résultats ci-dessous :

Formes indéterminées
$\infty - \infty$
$0 \times \infty$
$\frac{\infty}{\infty}$
$\frac{0}{0}$
1^{∞}
∞^{0}

Exemple : $f(x) = \frac{e^x}{x}$ quand x tend vers l'infini.

Voir alors les formulaires sur les « croissances comparées ».

Les développements limités permettent notamment de déterminer les limites lorsqu'on on rencontre une forme indéterminée.

1.3 Théorèmes de comparaison

1.3.1 Proposition

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I telles que

$$\forall x \in I, |f(x)| \leq |g(x)|$$

Alors si $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ alors $\lim_{x \to a} f(x) = 0$

Démonstration

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Longrightarrow |g(x)| \leq \varepsilon$$

Or $|f(x)| \leq |g(x)|$ donc $|f(x)| \leq \varepsilon$

1.3.2 Proposition

Si $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$ et

Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$.

Si $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

1.3.3 Encadrement

Soient f,g et h des fonctions définies sur un intervalle I et a un réel de I, telles que

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a} g(x) = L$$

$$\forall x \in I, f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

Alors

$$\lim_{x \longrightarrow a} h(x) = L$$

Démonstration

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

$$0 \leq h(x) - f(x) \leq g(x) - f(x)$$

Or

$$\lim_{x \longrightarrow a} g(x) - f(x) = 0$$

Donc

$$\lim_{x \longrightarrow a} h(x) - f(x) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow a} h(x) = \lim_{x \longrightarrow a} f(x)$$

1.3.4 Proposition

Soit f une application monotone sur un intervalle d'extrémités α et β, définie en tout point de cet intervalle et à valeurs dans ℝ. Alors en tout point a de] α ; β [, f admet une limite à droite et une limite à gauche en a.

Démonstration

Supposons que f est croissante et a un réel de] α ; β [. Soit l'ensemble

$$A = (f(x); x\epsilon I | f(x) \geq f(a))$$

A est non vide car $x_0 = a + \frac{\beta}{2}$ appartient à A. A est minoré par f(a) donc inf(A) existe et on appelle inf(A)=m.

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists C \in]\alpha\,; \beta[$ avec $C \geq a$ tel que $m \leq f(C) \leq m + \varepsilon$

Or f est croissante donc $\forall x \in]a\,; C[$

$$m \leq f(x) \leq f(C) \leq m + \varepsilon$$

$$0 \leq f(x) - m \leq \varepsilon$$

$$|f(x) - m| \leq \varepsilon$$

Donc

$$\lim_{x \longrightarrow a \ et\ x > a} f(x) = m$$

Donc f admet une limite à droite en a.

Même raisonnement pour la limite à gauche.

1.4 Continuité d'une fonction en un point

1.4.1 Définition

Soient une fonction f définie sur I de $\mathbb{R}$ et un réel a de I.

On dit que f est continue en a si elle admet une limite finie en a.

1.4.2 Proposition

Soient une fonction f définie sur I de $\mathbb{R}$ et un réel a de I.

Alors f est continue en a $\Leftrightarrow \lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$.

Démonstration

Soit $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = b$ alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \colon \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

Si on avait $b \neq f(a)$, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}|b - f(a)|$, on aurait $\forall x \in I$ si $|x - a| \leq \delta$ alors

$$|f(x) - b| \leq \frac{1}{2}.|b - f(a)|$$

Pour x=a,

$$|f(a) - b| \leq \frac{1}{2}.|f(a) - b|$$

$$1 \leq \frac{1}{2}$$

L'hypothèse $b \neq f(a)$ est fausse donc si f est continue en a alors $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$.

La réciproque est immédiate : Si $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$ alors f est continue en a.

1.4.3 Continuité à droite / à gauche

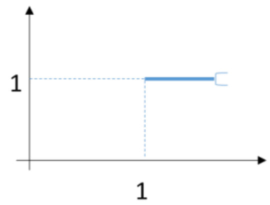
On dit que f définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est continue à droite en un point a de I si $f_{I \cap [a;+\infty[}$ est continue en a, continue à gauche si $f_{I \cap [-\infty;a[}$ est continue en a

Exemple : partie entière E(x)

I=[0 ;2]

$1 \in I$ et E est continue à droite en I.

$$E_{|[0;2] \cap [1;+\infty[} = E_{|[1;2]}$$



1.4.4 Proposition

Soient une fonction f définie sur I de ℝ et un réel a de I.

Alors dire que f est continue ⟺ f est continue à droite en a et continue à gauche en a.

1.4.5 Proposition

Soit x_n une suite de réels de limite L et f une fonction définie sur un intervalle contenant L et continue sur L, alors $(f(x_n))$ converge vers $f(L)$.

Démonstration

$$\lim(x_n) = L \iff \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x_n - L| \leq \delta$$

La fonction f est continue en L :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_1 > 0 \colon \forall x \in I, |x - L| \leq \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - f(L)| \leq \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq n_0, |x_n - L| \leq \delta_1 \Longrightarrow |f(x_n) - f(L)| \leq \varepsilon$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(L)$$

1.5 Fonction continue sur un intervalle

1.5.1 Définition

On dit que f est continue sur un intervalle I si elle est continue en chaque point de cet intervalle.

Si f est continue sur un intervalle I, sa valeur absolue est continue sur I.

Si f et g sont deux fonctions continues sur I, alors sup{f,g} est continue sur I.

Si f est continue sur un intervalle I, alors f est continue sur tout intervalle $J \subset I$.

Si f est continue sur [a ;b] et [b ;c] avec a<b<c alors f est continue sur [a ;c].

1.5.2 Composée de fonctions continues

Soient f et g deux fonctions telles que

$$f \colon I \to J$$

$$g \colon J \to \mathbb{R}$$

Alors $g \circ f$ est continue sur I.

1.5.3 Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle]a ;b[avec a<b et continue sur]a ;b[et telle qu'il existe un réel L tel que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Alors la fonction $\tilde{f}$ définie sur [a ;b[par

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) \; si \; x \in]a; b[\\ \tilde{f}(a) = L \end{cases}$$

$\tilde{f}$ est le prolongement par continuité de f en a.

1.5.4 Proposition

Lorsqu'un point a n'est pas élément de I, f admet une limite finie en a si et seulement si on peut prolonger la fonction f par continuité en a.

Démonstration

($\Longrightarrow$)

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

On peut prolonger f par continuité en a en posant $f(a) = L$.

($\Longleftarrow$) si on peut prolonger f par continuité en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ est un réel fini.

1.5.5 Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f définie et continue sur un intervalle [a ;b] où a<b, telle que $f(a) < f(b)$ (ou $f(a) > f(b)$) alors

$$\forall y \in]f(a); f(b)[\; ou \;]f(b); f(a)[\qquad \exists C \in [a; b]: f(c) = y$$

1.5.6 Proposition

Si la fonction f est continue sur un segment [a ;b] alors f est bornée sur [a ;b] et elle atteint ses bornes.

1.6 Fonction continue par morceaux

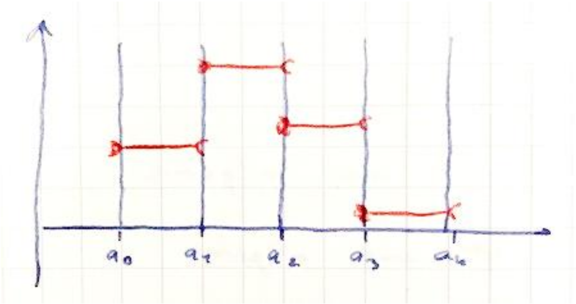
1.6.1 Définitions

Soient a et b deux réels tels que a<b. On appelle subdivision de [a,b] toute famille finie $a_0, a_1, \ldots., a_n$ de réels tels que

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

Soit f une fonction définie sur [a,b], f est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $(a_0, \ldots., a_n)$ de [a,b] et des escaliers $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ tels que

$$\forall i \in [\![0; n-1]\!] \; f_{]a_i; a_{i+1}[} = \lambda_i$$

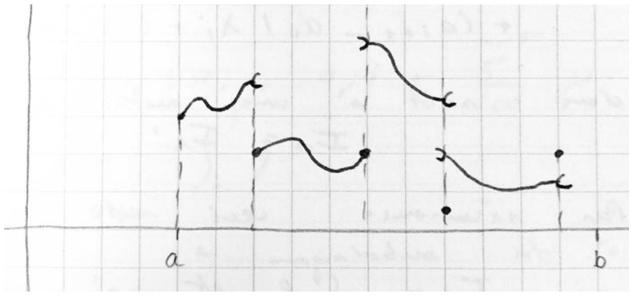


Soit f une fonction en escalier sur [a,b]. On dit que la subdivision $s = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ est subordonnée ou adaptée à f si $\forall i \in [\![0; n-1]\!]$ $f_{]a_i;a_{i+1}[}$ est constante.

1.6.2 Fonction continue par morceaux

Soit f une fonction définie sur [a,b] à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction f est continue par morceaux sur [a,b] si il existe une subdivision $s = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ de [a,b] telle que $\forall i \in [\![0; n-1]\!]$ $f_{]a_i;a_{i+1}[}$ soit continue et telle que $f_{]a_i;a_{i+1}[}$ soit prolongeable par continuité sur $[a_i, \dots, a_{i+1}]$.

Exemple



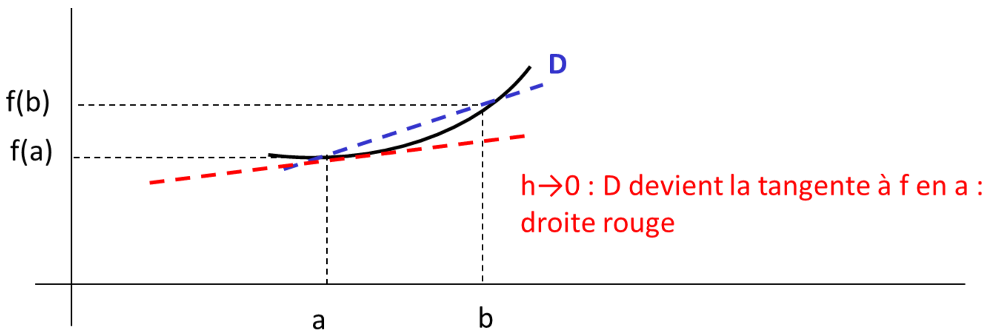
2 Dérivée d'une fonction

2.1 Taux d'accroissement

Soit f fonction définie sur un intervalle I contenant 2 réels a et b.

On appelle taux d'accroissement de f entre a et b le réel :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



2.2 Dérivée

Si b = a+h, alors quand h→0, la droite D devient la tangente à f en a.

On définit alors la dérivée en a comme la pente de cette tangente :

$$\boxed{f'(a) = lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}}$$

L'équation complète de la tangente est

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

<u>Exemple</u>

Soit la fonction $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{3(a+h)^2-5(a+h)+7-(3a^2-5a+7)}{h} = 6a-5+3h$$

Quand $h \to 0$

$$f'(a) = 6a-5$$

2.3 Fonctions non dérivables

On reprend la notion de dérivée.

$$f'(a) = lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}$$

$f'(a)$ est ainsi la limite d'une fraction dont le dénominateur h tend vers 0. Il faut donc que le numérateur tende aussi vers 0 pour que la dérivée existe.

Par conséquent, seules des fonctions continues peuvent être dérivables.

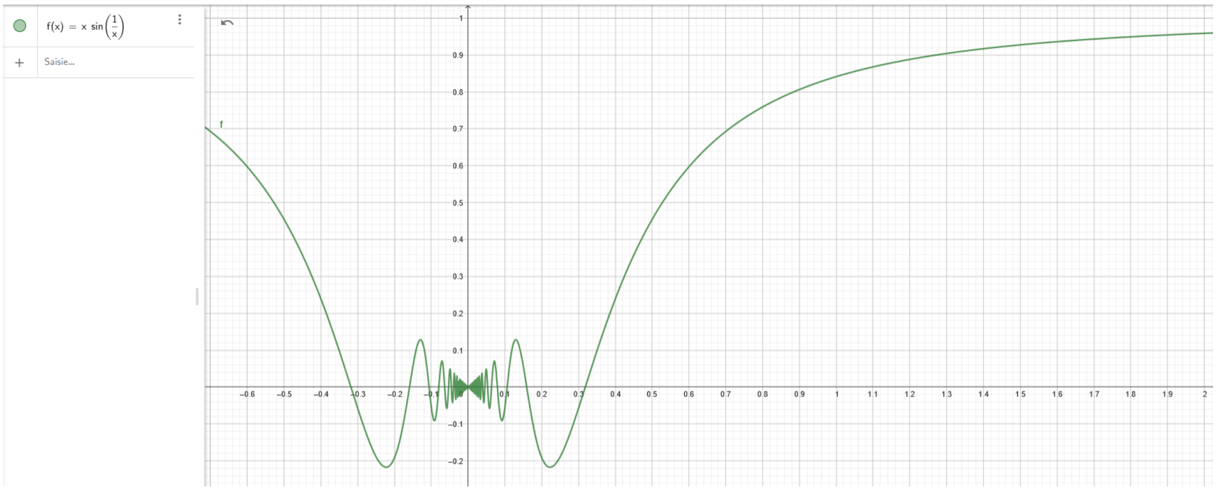
Remarque : attention, une fonction continue n'est pas nécessairement dérivable.

Remarque : une fonction n'est pas nécessairement dérivable sur l'ensemble de son domaine de définition.

Exemple

Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x = 0 \\ x.\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \end{cases}$$



La fonction f est continue. Cependant elle n'est pas dérivable en 0. En effet

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

$\sin\left(\frac{1}{h}\right)$ n'a pas de limite quand h tend vers 0 donc $f'(0)$ n'existe pas. la fonction f n'est pas dérivable en 0.

2.4 Dérivée à droite et dérivée à gauche

Une fonction peut être non dérivable ou non continue en un point mais dérivable à gauche et/ou à droite en ce point.

On appelle dérivée à droite la grandeur

$$f'(a^+) = lim_{h\to0^+}\frac{f(a+h) - f(a^+)}{h}$$

On appelle dérivée à gauche la grandeur

$$f'(a^-) = lim_{h\to0^-}\frac{f(a+h) - f(a^-)}{h}$$

2.5 Fonction dérivable par morceaux

Soient n+1 réels tels que $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$.

On dit que f est dérivable par morceaux sur un segment $[a_1; a_{n+1}]$ si :

- Elle est continue et dérivable sur chacun des intervalles $]a_k; a_{k+1}[$
- Elle admet une dérivée à droite et une limite à droite en $a_1, a_2, \dots \dots, a_n$
- Elle admet une dérivée à gauche et une limite à gauche en $a_2, \dots \dots, a_{n+1}$

2.6 Dérivées d'ordre supérieur

On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f. Elle est obtenu en dérivant n fois la fonction f.

2.7 Accroissements finis

2.7.1 Maximum / minimum / Extremum

Soit f une fonction définie sur I et à éléments dans I. On dit que f présente un maximum en a si

$$\forall x \in I, f(x) \leq f(a)$$

On dit que f présente un maximum strict en a si

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, f(x) < f(a)$$

On dit que f présente un maximum local en a si

$$\exists \alpha > 0 : \forall x \in]a - \alpha; a + \alpha[\cap I, f(x) \leq f(a)$$

On définit de manière analogue un maximum local strict.

On définit de manière analogue un minimum, un minimum strict, un minimum local, un minimum strict local.

Un extremum est un maximum ou un minimum.

2.7.2 Borne sup / borne inf

Soit f une fonction définie sur I et bornée alors on appelle borne supérieure de f le sup{f(I)} et borne inférieur l'inf{f(I)}.

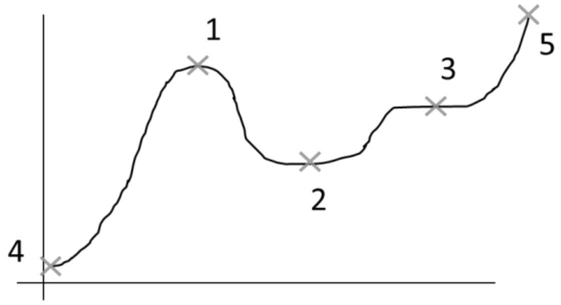
On note $\sup_I\{f\}$ et $\inf_I\{f\}$.

2.7.3 Extremums locaux

On dit que f(c) est une maximum local de la fonction f s'il existe un intervalle ouvert contenu dans le domaine de définition de f, contenant c, tel que pour tout x de cet intervalle, $f(x) \leq f(c)$.

On dit que f(c) est une minimum local de la fonction f s'il existe un intervalle ouvert contenu dans le domaine de définition de f, contenant c, tel que pour tout x de cet intervalle, $f(x) \geq f(c)$.

Le point 1 de la figure ci-dessous est un maximum local. Le point 2 est un minimum local. Le point 3 est ni l'un ni l'autre. Les points 4 et 5 ne sont ni des minimum ni des maximum locaux car la fonction n'est pas définie à droite de 5 et la fonction n'est pas définie à gauche de 4.



2.7.3.1 Théorème

Si $f(c)$ est un extremum local et si f est dérivable au point c alors $f'(c) = 0$.

2.7.3.2 Point critique

Soit f une fonction dérivable et c un réel tel que $f'(c) = 0$. Le réel c est appelé point critique de f et $f(c)$ est appelée valeur critique de f.

Attention : un point critique n'est pas nécessairement un extremum local (voir point 2 de la figure ci-dessus).

2.7.3.3 Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert et contenant un point critique a de f contenu dans l'intervalle I.

Si $f''(a) > 0$ la valeur critique $f(a)$ est un minimum local de f.

Si $f''(a) < 0$ la valeur critique $f(a)$ est un maximum local de f.

2.7.4 Extremum absolu

Le maximum absolu est la plus grande valeur parmi tous les maximums. Idem pour le minimum absolu.

2.7.5 Théorème de Rolle

Soit f de [a,b] dans IR, continue sur [a,b], dérivable sur]a,b[et telle que f(a)=f(b), alors il existe un réel c de]a,b[tel que

$$f'(c) = 0$$

2.7.6 Théorème des accroissements finis

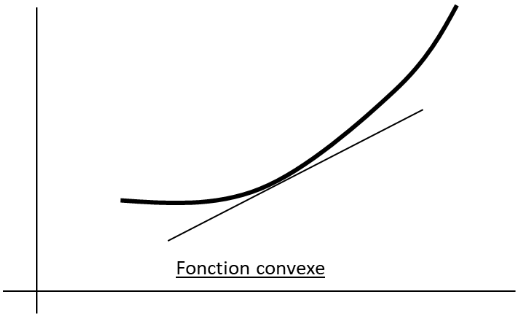
Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b] à valeurs dans IR, dérivable sur]a,b[, alors il existe un c de]a,b[tel que

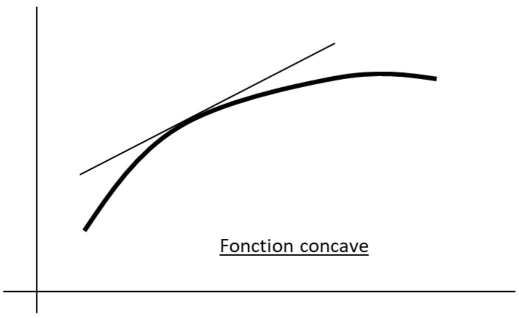
$$f(b) - f(a) = f'(c).(b - a)$$

2.7.7 Fonction convexe / Fonction concave

Une fonction est dite concave en M lorsque pour tout x compris dans un voisinage de M, la courbe représentative de f est sous la tangente à f en M.

Une fonction est dite convexe en M lorsque pour tout x compris dans un voisinage de M, la courbe représentative de f est au-dessus la tangente à f en M.





2.7.7.1 Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

Si $f''(x) \geq 0$ pour tout x de I, alors la fonction est convexe.

Si $f''(x) \leq 0$ pour tout x de I, alors la fonction est concave.

3 Intégrale d'une fonction

3.1 Définition

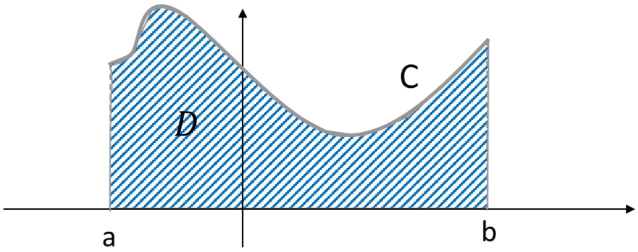
Soit f une fonction continue et positive sur [a ; b]

On appelle D le domaine du plan limité par la courbe C représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équation x =a et x = b.

On appelle intégrale de la fonction f sur [a ;b] l'aire A du domaine D en unités d'aire.

On note

$$A = \int_a^b f(x)dx$$



3.2 Propriétés

3.2.1 Comparaison

Soient f et g deux fonctions continues *et positives* sur [a,b].

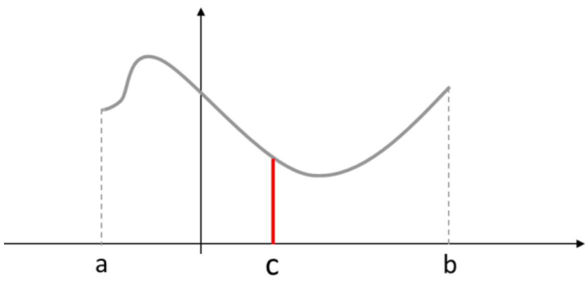
Si pour tout x de [a,b], f(x) ≤ g(x), alors

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

3.2.2 Relation de Chasles

Sot f une fonction continue et positive sur [a,b]. Soit c compris entre a et b, alors

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$



3.2.3 Valeur moyenne µ d'une fonction

$$\mu = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t)dt$$

3.2.4 Inégalités de la moyenne

Soit f une fonction définie sur [a, b], continue positive sur [a, b].

Soient 2 réels m et M tels que pour tout x de [a, b], on a m ≤ f(x) ≤ M

Alors m ≤ μ ≤ M avec μ valeur moyenne de f sur [a, b].

3.3 Calcul d'intégrales

3 méthodes analytiques :

1. Calcul d'intégrale avec primitive
2. Calcul d'intégrale en utilisant un changement de variable
3. Calcul d'intégrale en utilisant l'intégration par parties

3.3.1 Calcul d'intégrale avec primitive

Soit f fonction continue positive sur [a,b] et F une de ses primitives. Alors

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b}$$

Pourquoi l'aire sous la courbe peut être calculée avec une primitive ?

La démo est faite pour f positive et croissante, sinon, on admet.

Aire du domaine entre a et x :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Aire du domaine entre a et x+h :

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt$$

Or

$$\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt = \int_a^{x+h} f(t)dt$$

Donc

$$F(x) + \int_x^{x+h} f(t)dt = F(x+h)$$

Donc

$$F(x+h)-F(x)=\int_{x}^{x+h} f(t)dt$$

Or f croissante donc pour tout t de [x ; x+h], f(x) ≤ f(t) ≤ f(x+h)

Inégalités de la moyenne avec f(x) et f(x+h) et f croissante :

$$f(x)\leq \frac{1}{h}.\int_{x}^{x+h} f(t)dt \leq f(x+h)$$

Donc

$$f(x)\leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h}\leq f(x+h)$$

Or

$$\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$$

Donc selon théoreme des gendarmes

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$

F est donc dérivable en x et F’ = f

3.3.2 Calcul d’intégrale avec un changement de variable

Soit Φ fonction continue et dévirable sur [α,β].

Soit f fonction continue sur un intervalle contenant Φ[α,β].

On a :

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} (f(\Phi(x)).\Phi'(x).dx=\int_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(\beta)} f(u).du}$$

<u>Démo</u>

Une primitive de (foΦ).Φ’ est FoΦ où F est une primitive de f.

On a donc

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f(\Phi(x)).\Phi'^{(x)}.dx = Fo\Phi(\beta)-Fo\Phi(\alpha)=F(\Phi(\beta))-F(\Phi(\alpha))=\int_{\Phi(\alpha)}^{\Phi(\beta)} f(u).du$$

<u>Exemple</u>

$$I=\int_{0}^{\pi/2} sin^2x.cosx.dx$$

Soit u(x)=sinx, on a alors du=cosx.dx et :

$$I = \int_0^1 u^2 . du = \left[\frac{1}{3} . u^3\right]_0^1 = 1/3$$

3.3.3 Calcul d'intégrale en utilisant l'intégration par parties

$$\boxed{\int_a^b u(t).v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt}$$

Démonstration

On sait que

$$(u.v)' = u'v + uv'$$

Donc

$$\int_a^b (uv)'dt = [u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'vdt + \int_a^b uv'dt$$

Exemple

$$I = \int_0^{\pi/2} x.cosx.dx$$

Soient : u(x)=x et u'(x)=1 ; v(x)=sin x et v'(x)=cos x

Alors en appliquant la formule d'IPP :

$$I = [x.sinx]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx.dx = \frac{\pi}{2} - 0 - [-cosx]_0^{\pi/2}$$

$$I = \frac{\pi}{2} - 1$$

Quand utiliser l'IPP ?

Quand l'intégrale de u'v est plus facile à calculer que l'intégrale de uv',

Ce qui est le cas pour le produit de :

- polynome par sinus ou cos (u = polynome)
- polynome par log (u = log)
- e^x par sinus ou cos

3.4 Intégrales généralisées

L'intégrale $\int_a^b f(x).dx$ a été définie pour une fonction f continue ou continue par morceaux sur l'intervalle borné [a ;b]. On peut étendre l'étude aux cas suivants :

- La fonction f n'est pas prolongeable par continuité
- L'intervalle n'est pas borné

3.4.1 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle non borné

3.4.1.1 Etude d'un exemple

$$I(x) = \int_0^X e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^X = 1 - e^{-X}$$

$$\lim_{X\to+\infty} I(X) = 1$$

On écrit alors

$$\lim_{X\to+\infty} I(X) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx$$

3.4.1.2 Définitions

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f: [a; +\infty[\to \mathbb{R}$ continue. On dit que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente si et seulement si $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_a^{+\infty} f(x)dx$ existe et est finie.

On écrit

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{X\to+\infty} \int_a^X f(x)dx$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

De même, soit $f:]-\infty; a[\to \mathbb{R}$ continue. $\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim\limits_{X\to-\infty} \int_X^a f(x)dx$ si cette limite existe et est finie.

3.4.1.3 Exemples

<u>Intégrales de Riemann</u>

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

α est un réel.

$$f_\alpha: \begin{cases} [1; +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \to \dfrac{1}{x^\alpha} \end{cases}$$

Soit $X \geq 1$ et $\alpha \neq 1$

$$\int_1^X \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_1^X = \frac{1}{1-\alpha}.(X^{1-\alpha} - 1) = \frac{1}{1-\alpha}.\left(e^{(1-\alpha).lnX} - 1\right)$$

Si $\alpha > 1$

$$I(\alpha) \to -\frac{1}{1-\alpha}$$

Si $\alpha < 1$

$$I(\alpha) \to +\infty$$

Si $\alpha = 1$

$$I(\alpha) = \ln(X) \to +\infty \; quand \; X \to +\infty$$

Conclusion : l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Intégrales de la forme

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha.x} dx$$

Calcul

$$\int_0^X e^{-\alpha.x} dx = \left[\frac{e^{-\alpha.x}}{-\alpha}\right]_0^X = \frac{1}{\alpha}.(1 - e^{-\alpha.X})$$

$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha.x} dx$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

3.4.2 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle de la forme [a ;b[ou]a ;b] ou]a ;b[non prolongeable par continuité en a ou b

3.4.2.1 Exemple

Soit

$$f \begin{cases} [0;1[\to \mathbb{R} \\ x \to \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \end{cases}$$

$$I(X) = \int_0^X f(x)dx = \left[-2.\sqrt{1-X}\right]_0^X = -2\sqrt{1-X} + 2$$

Si $X \to 1$, $\lim\limits_{X\to 1} I(X) = 2$.

On écrit

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{X\to 1} I(X) = 2$$

3.4.2.2 Définitions

Soit $f : [a; b[\to \mathbb{R}$ continue. On dit que $\int_a^b f(x)dx$ est convergente si et seulement si $\lim\limits_{X\to b} \int_a^X f(x)dx$ existe et est finie.

On écrit alors

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{X\to b} \int_a^X f(x)dx$$

De façon plus générale, soit $f :]a; b[\to \mathbb{R}$ continue.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{X\to a} \int_X^c f(x)dx + \lim_{Y\to b} \int_c^Y f(x)dx$$

3.4.2.3 Exemples

Riemann

$$I(\alpha) = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$$

Si $\alpha \neq 1$

$$I(\alpha) = \left[\frac{1}{1-\alpha}.(x-a)^{1-\alpha}\right]_X^b = \frac{1}{1-\alpha}.((b-a)^{1-\alpha} - (X-a)^{1-\alpha})$$

Si $\alpha > 1$

$$\lim_{X\to a} \int_X^b f(x)dx = +\infty$$

Si $\alpha < 1$

$$\lim_{X\to a} \int_X^b f(x)dx = \frac{1}{1-\alpha}.((b-a)^{1-\alpha})$$

Si $\alpha = 1$

$$\int_X^b \frac{dx}{x-a} = [\ln(x-a)]_X^b = \ln(b-a) - \ln(X-a) \to +\infty \; quand \; X \to a$$

$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$

3.4.3 Intégrales généralisées des fonctions positives

3.4.3.1 Théorème de comparaison

Soit J un intervalle de la forme]a ;b] ou [a ;b[ou [a ;b] avec a et b réels positifs. Soient f et g des fonctions continues telles que $\forall x \in J, 0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Alors si $\int_a^b g(x)dx$ est convergente alors $\int_a^b f(x)dx$ est aussi convergente.

De plus,

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Si $\int_a^b f(x)dx$ est divergente alors $\int_a^b g(x)dx$ est aussi divergente et

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^X f(x)dx = +\infty$$

Exemple 1

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$\forall x \geq 1$

$$x^2 \geq x$$

$$e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

Or $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ est convergente donc d'après le théorème de comparaison, $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ est convergente.

De même pour $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Exemple 2

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n . e^{-x} dx$$

Avec n entier naturel. On montre que $\forall x > 0$

$$0 \leq x^n . e^{-x} < \frac{1}{x^2}$$

$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^2} . dx$ est convergente (intégrale de Riemann) donc d'après le théorème de comparaison, $\int_{x_0}^{+\infty} x^n . e^{-x} dx$ est aussi convergente.

3.4.4 Intégrales généralisées de fonctions équivalentes

Soit f et g deux fonctions continues sur]a ;b] ou [a ;b[ou [a ;b].

On suppose que $f(x) \sim g(x)$ en b (pour $I = [a; b[$), alors $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ sont de même nature.

Démonstration : admise.

Exemple

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}.(1-x)}$$

En 0,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}.(1-x)} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Or l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$$

est une intégrale de Riemann donc $\int_0^1 f(x)dx$ est convergente.

En $+\infty$,

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

Or l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$$

est une intégrale de Riemann donc $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

Finalement, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}.(1-x)}$ est convergente.

4 Fonctions usuelles

4.1 Logarithme

On cherche les fonctions vérifiant l'équation E ci-dessous

$$\forall(x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x.y) = f(x) + f(y)$$

Condition nécessaire

Si l'on veut que la propriété soit vraie en x=y=0, alors : $f(0) = f(0) + f(0) = 0$ donc pour y=0, alors pour tout x, $f(0) = f(x) + f(0)$ donc $f(x) = 0$ donc f est la fonction nulle…..

On cherche alors au moins une solution en prenant $(x; y) \in \mathbb{R}^{+*2}$ qui soit dérivable

En dérivant par-rapport à x,

$$y.f'(x.y) = f'(x) + 0$$

En particulier pour $x = 1$

$$y.f'(y) = f'(1)$$

$$f'(y) = \frac{f'(1)}{y}$$

Pour $x = y = 1$, on obtient $f(1) = f(1) + f(1)$ donc $f(1) = 0$.

S'il existe une solution à l'équation E, c'est une primitive de k/x et elle s'annule en 1.

Condition suffisante

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que

$$f'(x) = \frac{k}{x}$$

$$f(1) = 0$$

$$f'(xy) = \frac{k}{xy}.y = \frac{k}{x} = f'(x)$$

$$f(xy) = f(x) + cste$$

Pour $x = 1$, $f(y) = f(1) + cste = 0 + cste$ donc $cste = f(y)$

Finalement

$$f(x.y) = f(x) + f(y)$$

Lorsque k=1, la fonction f est appelée logarithme népérien

Propriétés

$\forall(x; y) \in \mathbb{R}^{+*2}$

$$\ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Donc la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

$$\ln(1) = 0$$

4.2 Logarithme en base a

4.2.1 Définition

On appelle logarithme en base a de x le réel noté $\log_a(x)$ et défini par

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$$

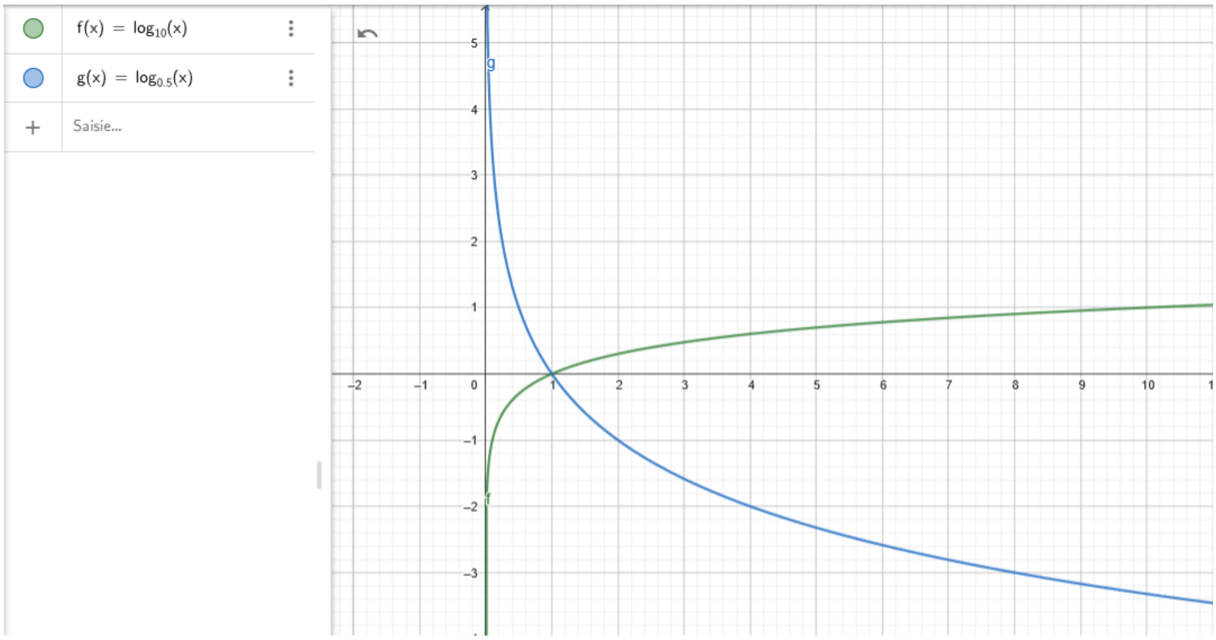
Pour $a > 0$ et $a \neq 1$

4.2.2 Représentation graphique

$$(\log_a \quad)'(x) = \frac{1}{x.\ln a}$$

Si a>1, $(\log_a \quad)'(x) > 0$

Si a<1, $(\log_a \quad)'(x) < 0$



4.2.3 Changement de base

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

a>0 ; $a \neq 1$; b>0 ; $b \neq 1$

$$\log_a(x) = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}.\log_b(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

4.3 Fonction exponentielle

On appelle fonction exponentielle en base a la réciproque de la fonction logarithme en base a.

a>0 ; $a \neq 1$

$$y = \exp_a(x) \Leftrightarrow x = \log_a(y)$$

<u>Propriétés</u>

$$\exp_a(x) = a^x = e^{(x.\ln a)}$$

Démonstration

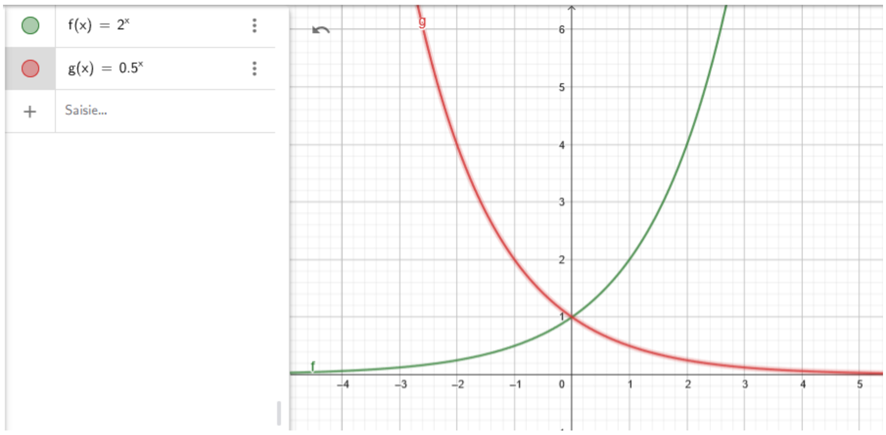
$$y = \exp_a(x) \Leftrightarrow x = \log_a y \Leftrightarrow x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)} \Leftrightarrow \ln y = x.\ln a \Leftrightarrow y = e^{(x.\ln a)}$$

Courbes représentatives

$$f'(x) = \ln a\,.\,e^{(x.\ln a)} > 0$$

Si $a > 0, f' > 0$

Si $0 < a < 1, f' < 0$



<u>Propriétés</u>

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^x.a^y = a^{x+y}$$

4.4 Fonctions circulaires réciproques

4.4.1 Arcsinus

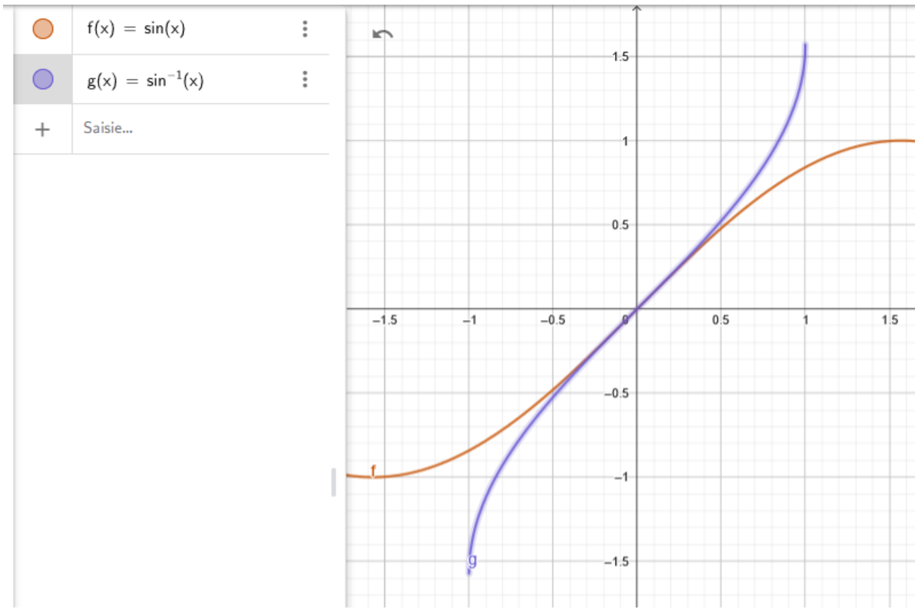
La restriction de la fonction sinus à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ est bijective. Sa fonction réciproque est appelée arcsinus.

$$Arcsin\begin{cases}[-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ x \to \arcsin(x)\end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow Arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Arcsin est la fonction réciproque d'une fonction dérivable donc elle est dérivable sur $]-1;1;[$ car $sin'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $sin'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et on a

$$Arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



4.4.2 Arcosinus

La restriction de cosinus à [0 ;π] est bijective ; Sa réciproque est la fonction arcosinus notée arcos

$$Arcos\begin{cases}[-1;1] \to [0;\pi] \\ x \to \arccos(x)\end{cases}$$

$$y = arcos(x) \Leftrightarrow x = \cos y$$

$$Arcos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4.4.3 Arctan

$$Arctan\begin{cases}\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\\ x \to \arctan(x)\end{cases}$$

$$y = \arctan(x) \Leftrightarrow x = \tan y$$

$$Arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

4.5 Fonctions hyperboliques

4.5.1 Sinus hyperbolique

On appelle sinus hyperbolique la fonction notée sh définie sur $\mathbb{R}$ par

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

4.5.2 Cosinus hyperbolique

On appelle cosinus hyperbolique la fonction notée ch définie sur $\mathbb{R}$ par

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

La fonction ch est la partie paire de la fonction exponentielle.

La fonction sh est sa partie impaire.

4.5.3 Propriétés

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$ch(x) + sh(x) = e^x$$

$$ch(x) - sh(x) = e^{-x}$$

$$ch^2(x) - sh^2(x) = 1$$

$$ch(x) \geq 1$$

$$sh(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

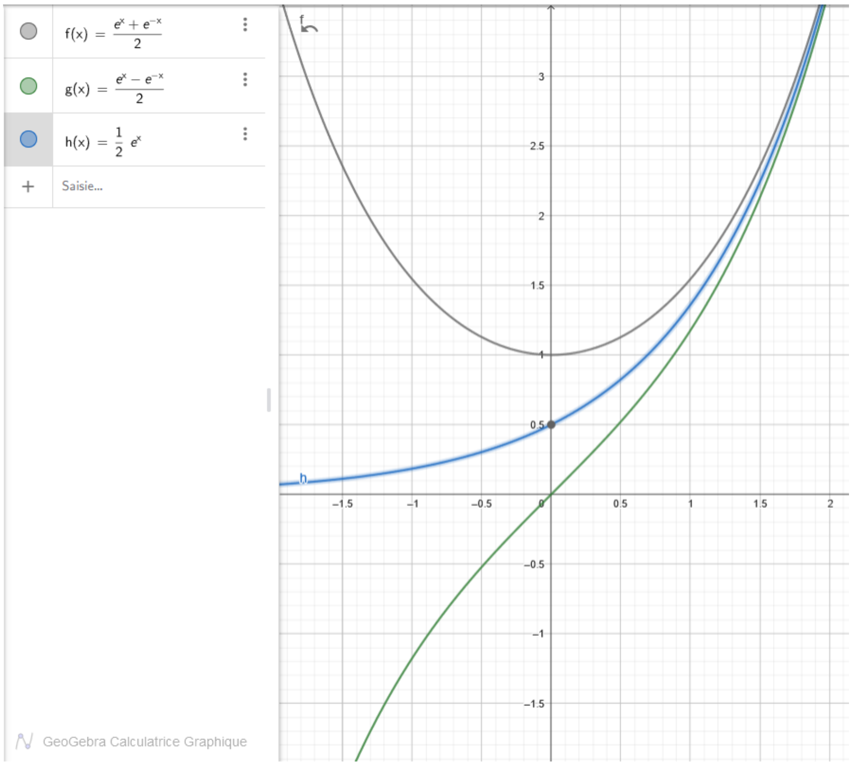
4.5.4 Etude des variations

Les fonctions ch et sh sont respectivement paires et impaires. On fera leur étude sur $\mathbb{R}^+$. Elles sont toutes les deux dérivables et

$$ch'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x)$$

$$sh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x)$$

Or pour tout réel x, $ch(x) \geq 0$ donc la fonction sh est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

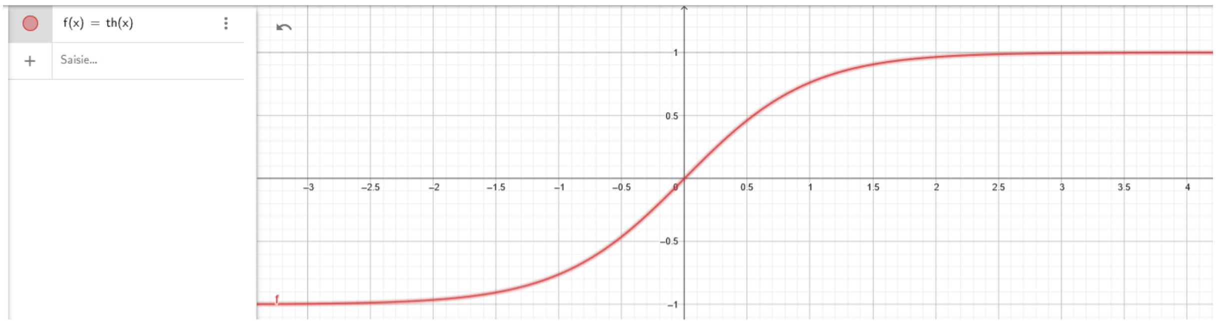


4.5.5 Tangente hyperbolique

On appelle tangente hyperbolique la fonction notée th définie sur $\mathbb{R}$ par

$$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$$

$$th(x) = \frac{1}{ch^2(x)} = 1 - th^2(x)$$



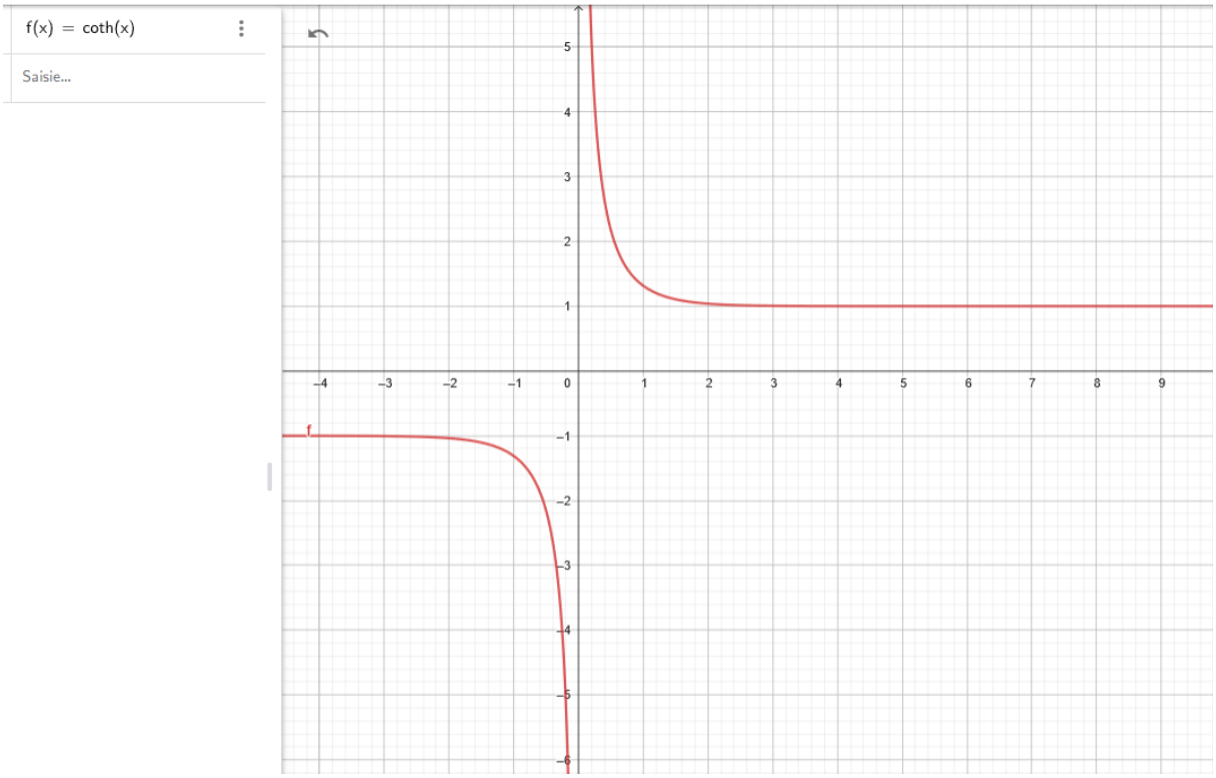
4.5.6 Cotangente hyperbolique

Elle est noté coth et définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\coth(x) = \frac{ch(x)}{sh(x)} = \frac{1}{th(x)}$$

Cette fonction est impaire.

$$\coth'(x) = -\frac{1}{sh^2(x)} < 0$$



4.5.7 Formules d'addition

$$ch(a+b) = cha.chb + sha.shb$$

$$sh(a+b) = sha.chb + shb.cha$$

$$ch(a-b) = cha.chb - sha.shb$$

$$sh(a-b) = sha.chb - shb.cha$$

$$th(a+b) = \frac{tha + thb}{1 + tha.thb}$$

$$ch(2x) = ch^2(x) + sh^2(x)$$

$$sh(2x) = 2shx.chx$$

5 Exercices

5.1.1 Exercice : calcul de limites

Déterminer, si elle existe, la limite de chacune des fonctions suivantes en x_0.

A défaut, déterminer si elles existent les limites à gauche et à droite en x_0.

$f_1(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ en $x_0 = 1$ et $x_0 = -1$

$f_2(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+x-6}}$ en $x_0 = 2$

$f_3(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ en $x_0 = 2$

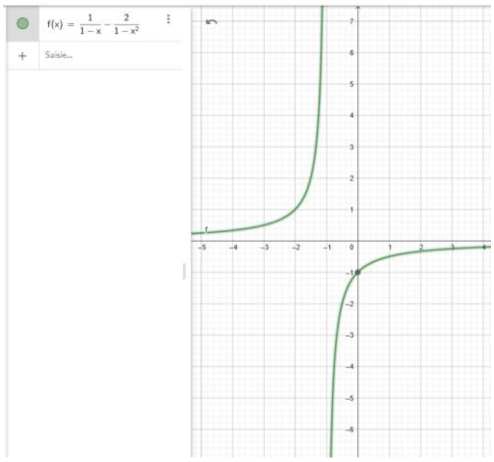
Correction

$$f_1(x) = \frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)} = -\frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x \to 1} f_1(x) = -\frac{1}{2}$$

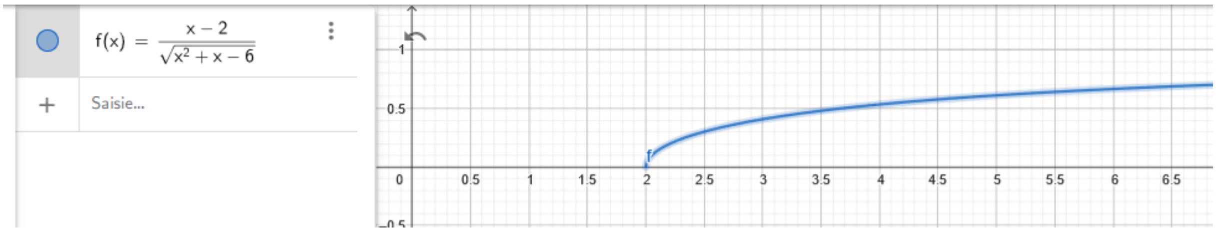
$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f_1(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f_1(x) = -\infty$$



$$f_2(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+x-6}} = \frac{\sqrt{x-2}.\sqrt{x-2}}{\sqrt{(x-2)(x+3)}} = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$$

$$\lim_{x \to 2} f_2(x) = 0$$



$$f_3(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

La fonction f n'est pas définie pour x<2 donc elle n'est pas continue en 2. On peut cependant chercher si elle a une limite à droite.

$$f_3(x) = \frac{1-\sqrt{x-2}}{x-2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 2 \\ >}} f_3(x) = +\infty$$

5.1.2 Exercice

Calculer

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Correction

La fonction est paire :

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Or

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{X\to+\infty} \int_{0}^{X} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{X\to+\infty} [\arctan(X)]_0^X = \frac{\pi}{2}$$

$$I = \pi$$

5.1.3 Exercice

Calculer

$$I = \int_{0}^{1} \mathrm{x}.\arctan(x)\,dx$$

Correction

$$u = \frac{x^2}{2}$$

$$u' = x$$

$$v = \arctan(x)$$

$$v' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$I = \left[\frac{1}{2}x^2.\arctan(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2.\frac{1}{1+x^2}.dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}$$

5.1.4 Exercice

Etudier la convergence de

$$I = \int_0^1 \ln(x)\,dx$$

La fonction $f : x \to \ln x$ est continue sur]0 ;1].

Correction

Pour X>0

$$\int_X^1 \ln(x)\,dx = [x.(\ln(\mathrm{x}) - 1)]_X^1 = -1 - X.\ln(X) + X \to -1 \; quand \; X \to 0$$

$\int_0^1 \ln(x)\,dx$ est convergente.

5.1.5 Exercice

Soit n un entier naturel et l'intégrale I telle que

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n.e^{-x}dx = I_n = \lim_{X\to+\infty}\int_0^X x^n.e^{-x}dx$$

1/ Montrer que

$$I_n = n.I_{n+1}$$

2/ En déduire que

$$I_n = n!$$

Correction

1/ Par intégration par parties,

$$\int_0^X x^n.e^{-x}dx = n.\int_0^X x^{n-1}.e^{-x}dx$$

2/ $I_0 = 1\,;I_1 = 1\,;I_2 = 2.I_1 = 2\times 1\,;I_3 = 3.I_2$

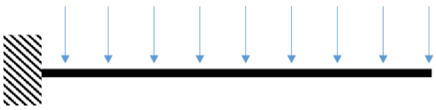
Par récurrence on montre que

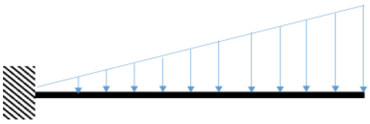
$$I_n = n!$$

5.1.6 Exercice : effort total dû à une charge répartie, intégrales simples

Soit une poutre de longueur L encastrée à une extrémité soumise à un effort réparti q en N/m tout le long de la poutre.

Donner l'expression de l'effort total F appliqué sur la poutre pour les deux cas de charge ci-dessous





Correction

Q1/ Donner l'expression de l'effort total F appliqué sur la poutre.

$$F = \int_0^L q.dx = q.L$$

Q2/ Même question pour un effort réparti tel que ci-dessous

Soit q=a.x

$$F = \int_0^L a.x.dx = a.\frac{L^2}{2}$$

5.1.7 Exercice : calcul d'intégrale

Calculer

$$I = \int_0^{\pi/6} \sin x\,.cosx.dx$$

$$I = \int_0^3 x.e^x dx$$

Correction

$$I = \int_0^{\pi/6} \sin x \,.\, cosx.\, dx$$

Soit u(x)=sinx, on a alors du=cosx.dx et :

$$I = \int_0^{1/2} u.\, du = \frac{1}{8}$$

Python

```
from scipy import integrate
import numpy as np
f = lambda x: np.sin(x)*np.cos(x)
integrate.quad(f, 0, np.pi/6)
```

$$I = [x.\, e^x]_0^3 - \int_0^3 e^x dx = 3.\, e^3 - (e^3 - 1) = 2.\, e^3 + 1$$

Python

```
from scipy import integrate
import numpy as np

f = lambda x: x*np.exp(x)

integrate.quad(f, 0, 3)
```

5.1.8 Exercice : calcul d'intégrale

Calculer

$$I = \int_0^{\pi/2} x.\cos x \,.\, dx$$

Correction

IPP avec $u(x) = x; u'(x) = 1; v(x) = \sin x\,; v'(x) = \cos x$

$$I = \frac{\pi}{2} - 1$$

5.1.9 Etude d'une fonction

Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par

$$f(x) = th\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

Correction

Domaine de définition : ensemble des réels, privé de x=-1

$$f'(x) = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{ch^2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} = \frac{2}{(x+1)^2 . ch^2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)} > 0$$

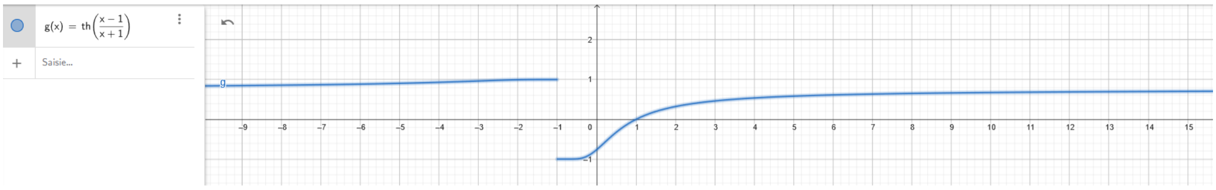
Fonction strictement croissante

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = th(1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = th(1)$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -1$$



6 Références bibliographiques

[1], [2], [3], [4], [4], [5], [6], [7], [8], [9]

[1] J. Quinet et J. Quinet, *Fonctions usuelles*, 6. éd. in Cours élémentaire de mathématiques supérieures / J. Quinet, no. T. 2. Paris: Dunod, 1992.

[2] J. Quinet et J. Quinet, *Equations différentielles*, 6. éd. in Cours élémentaire de mathématiques supérieures / J. Quinet, no. T. 4. Paris: Dunod, 1999.

[3] G. Serane, *Mathématiques de la physique appliquée à l'usage des candidats au certificat de T.M.P est élèves-ingénieurs et des ingénieurs*. Paris: DUNOD, 1965.

[4] J. Quinet et J. Quinet, *Calcul intégral et séries*, 6. éd. in Cours élémentaire de mathématiques supérieures / J. Quinet, no. T. 3. Paris: Dunod, 1996.

[5] Y. Brémont et P. Réocreux, *Mécanique du solide indéformable: cinétique, dynamique cours et exercices résolus classes préparatoires aux grandes écoles, PSI, PSI*, MP, MP*, PT, PT*, premier cycle universitaire*. in Mécanique, no. 3. Paris: Ellipses, 1998.

[6] S. Belhaj et A. Ben Aïssa, *Mathématiques pour l'informatique: cours et exercices corrigés licence 1 & 2 informatique*. Paris: Vuibert, 2013.

[7] J. Vélu, *Méthodes mathématiques pour l'informatique: cours et exercices corrigés*, 5è ed. in Info Sup. Malakoff: Dunod, 2019.

[8] J. Vélu, *Mathématiques générales: cours et exercices corrigés*. Malakoff (Hauts-de-Seine): Dunod, 2020.

[9] Duran, *La vérité réside dans la limite le calcul infinitésimal Collection le monde est mathématique*. 2010.

https://www.geogebra.org/graphing