Mécanique des Fluides

-

Rappels de cours et exercices

Frédéric Menan

https://lesdocsduprof.com/

fmenan@cesi.fr

Juillet 2024

Table des matières

1 Rappels théoriques

1.1 Pression dans les fluides

1.1.1 Pression sur une surface

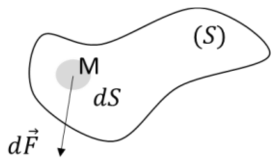
Soit une surface plane S sur laquelle s'exerce une force F. Par définition, la pression moyenne s'exerçant sur cette surface est

$$P_{moy} = \frac{F}{S}$$

Avec F en N, S en m², P_{moy} est N/m². 1 N/m² correspond à 1 Pascal. 1 Pa = 1 N/m²

Soit une surface S quelconque sur laquelle agit une force F. En considérant un petit élément d'aire dS de cette surface autour d'un point M, on définit la pression en M par

$$dF = p_M . dS$$



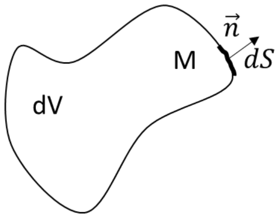
1.1.2 Pression dans un fluide parfait

Un fluide parfait est supposé non visqueux.

Considérons un fluide en équilibre dans le référentiel du laboratoire.

Soit un élément de volume dV de ce fluide délimité par une surface S. Soit $\vec{n}$ un vecteur unitaire normal à la surface S au point M. $\vec{n}$ est dirigé de l'intérieur vers l'extérieur de la surface. La force exercée par le milieu extérieur sur l'élément de surface dS est

$$d\vec{F} = -p_M . dS . \vec{n}$$



1.2 Equilibre mécanique d'un fluide

On considère un fluide dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g_M}$ au point M.

Le fluide a pour masse volumique ρ_M au point M.

Soit un petit élément de volume dV pris dans le fluide au voisinage de M.

Cet élément de fluide est soumis à son poids et aux forces de pression exercées par le milieu extérieur.

A l'équilibre,

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Poids de l'élément de fluide

$$\vec{P} = m.\overrightarrow{g_M} = \rho_M.dV.\overrightarrow{g_M} = \rho_M.dx.dy.dz.\overrightarrow{g_M}$$

Forces de pression exercées par le milieu extérieur

Sur la face arrière

$$d\overrightarrow{F_1} = p_x dydz.\vec{\imath}$$

Sur la face avant

$$d\overrightarrow{F_2} = -p_{x+dx} dydz.\vec{\imath}$$

Sur la face MCGD

$$d\overrightarrow{F_3} = p_y dxdz.\vec{\jmath}$$

Sur la face ABFE

$$d\overrightarrow{F_4} = -p_{y+dy} dxdz.\vec{\jmath}$$

Sur la face MAED

$$d\overrightarrow{F_5} = p_z dxdy.\vec{k}$$

Sur la face BCGF

$$d\overrightarrow{F_6} = -p_{z+dz} dxdy.\vec{k}$$

A l'équilibre

$$\rho_M.dV.\overrightarrow{g_M} + (p_x - p_{x+dx})dydz.\vec{\imath} + \left(p_y - p_{y+dy}\right)dxdz.\vec{\jmath} + (p_z - p_{z+dz})dxdy.\vec{k} = \vec{0}$$

La pression p dépend de x, y et z donc

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

Avec

$$p_{x+dx} - p_x = \frac{\partial p}{\partial x}dx$$

De même en y et z.

Donc

$$\rho_M.dx.dy.dz.\overrightarrow{g_M} - \frac{\partial p}{\partial x}dxdydz.\vec{\imath} - \frac{\partial p}{\partial y}dydxdz.\vec{\jmath} - \frac{\partial p}{\partial z}dzdxdy.\vec{k} = \vec{0}$$

On simplifie l'équation par dxdydz.

$$\rho_M.\overrightarrow{g_M} - \frac{\partial p}{\partial x}.\vec{\imath} - \frac{\partial p}{\partial y}.\vec{\jmath} - \frac{\partial p}{\partial z}.\vec{k} = \vec{0}$$

$$\rho_M.\overrightarrow{g_M} - \overrightarrow{grad}p_M = \vec{0}$$

Finalement,

$$\boxed{\overrightarrow{grad}p_M = \rho_M.\overrightarrow{g_M}}$$

1.3 Cas des liquides

Supposons un liquide homogène (masse volumique identique en tout point du liquide).

Soit ρ_0 la masse volumique du liquide.

Supposons le champ de pesanteur uniforme :

$$\overrightarrow{g_M} = -g_0.\vec{k}$$

Alors $\overrightarrow{grad}p_M = \rho_M.\overrightarrow{g_M}$ devient

$$-\rho_0.g_0.\vec{k} = \frac{\partial p}{\partial x}.\vec{\imath} + \frac{\partial p}{\partial y}.\vec{\jmath} + \frac{\partial p}{\partial z}.\vec{k}$$

Donc

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0}$$

On constate que la pression est constante sur un plan horizontal.

De plus

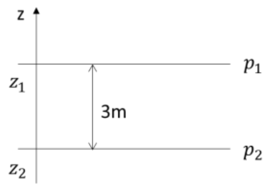
$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho_0 . g_0 \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$p_2 - p_1 = -\rho_0 . g_0 . (z_2 - z_1)$$

L'axe Oz étant orienté vers le haut.

<u>Exemple : différence de pression entre la surface libre et le fond du bassin dans une piscine</u>

$$p_2 - p_1 = -\rho_0 g_0 (z_2 - z_1) = -1000 \times 9{,}8 \times (-3) = 29400\ Pa$$



<u>Remarque</u>

Si le liquide est compressible, alors ρ dépend de z

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(z) . g_0$$

Pour résoudre le problème, il faut connaitre la loi qui donne la variation de ρ en fonction de z.

1.4 Cas des gaz

Supposons le champ de pesanteur uniforme

$$\vec{g}_M = -g_0 . \vec{k}$$

Le gaz est compressible. On est alors ramené à la situation précédente du liquide compressible.

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z) . g_0$$

Si le gaz peut être considéré comme parfait, son état est commandé par l'équation

$$p . V = nRT$$

Pour une quantité donnée de gaz,

$$\frac{pV}{T} = cste = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

$$V = \frac{p_0 V_0}{T_0} . \frac{T}{p}$$

$$m = \rho V = \rho_0 V_0$$

Donc

$$\rho = \rho_0 . \frac{p}{p_0} . \frac{T_0}{T}$$

Donc si le gaz est supposé parfait, $\frac{dp}{dz} = -\rho(z). g_0$ devient

$$dp = -\rho_0 . \frac{p}{p_0} . \frac{T_0}{T} . g_0 . dz$$

Supposons la température constante, $T = T_0$ et

$$dp = -\rho_0 . \frac{p}{p_0} . g_0 . dz$$

$$\frac{dp}{p} = -\rho_0 . \frac{g_0}{p_0} . dz$$

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\rho_0 . \frac{g_0}{p_0} \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = -\rho_0 . \frac{g_0}{p_0} . (z_2 - z_1)$$

$$p_2 = p_1 . e^{-\rho_0 . \frac{g_0}{p_0} . (z_2 - z_1)}$$

Avec l’axe Oz orienté vers le haut.

<u>Exemple</u>

Entre le point 1 à z=0m et le point 2 à z=1000m. Si $p = 1\ bar$ à z=0m.

$$p_2 = e^{1,3 * \frac{10}{100000} * (1000-0)} \approx 0,88\ bar$$

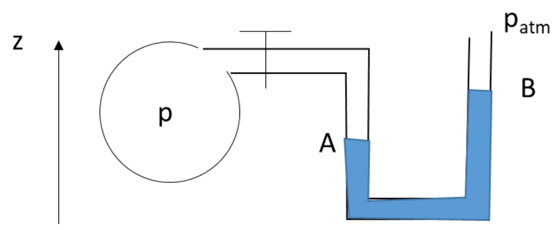
1.5 Quelques applications

1.5.1 Poussée d’Archimède

Un corps immergé dans un fluide subit de la part du fluide une poussée d’Archimède. Elle est verticale, dirigée de bas en haut, d’intensité égale au poids du volume de fluide déplacé.

1.5.2 Fonctionnement des manomètres

Manomètre à air libre



A l'équilibre,

$$dp = -\rho g dz$$

$$p_A - p_B = -\rho g(z_A - z_B)$$

$p_A = p$; $p_B = p_{atm}$

$p - p_{atm}$: pression relative ; p : pression absolue

2 Exercices

2.1 Exercice : statique des fluides

Un tube de verre en U dont les deux branches sont longues, verticales et ont une section intérieure de 1cm², est ouvert aux deux extrémités et contient de l'eau. On verse d'un côté 5cm³ d'huile qui surnage. La différence de niveau des deux surfaces libres est 7,5mm. L'huile utilisée est moins dense que l'eau.

Q1/ Quelle est la masse volumique de l'huile ?

Correction

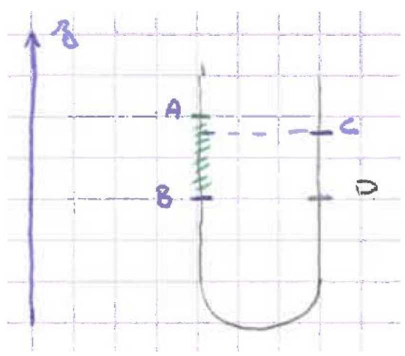
$$p_B - p_A = -\rho_{huile}.g.(z_B - z_A)$$

$$p_D - p_C = -\rho_{eau}.g.(z_D - z_C)$$

$$p_A = p_C = p_{atm}$$

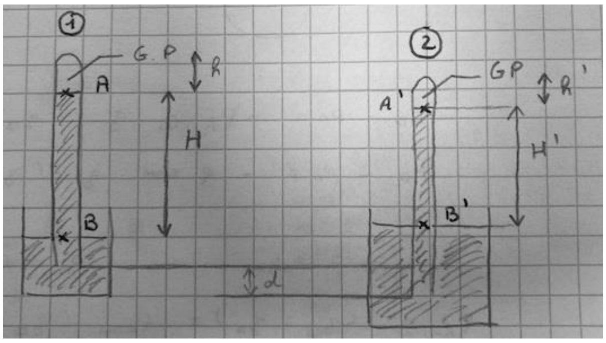
$$p_B = p_D$$

$$\rho_{huile} = 850\ kg/m^3$$



2.2 Exercice : statique des fluides

Un tube cylindrique retournée sur une cuve contient dans sa partie supérieure un gaz parfait. La hauteur de la colonne de gaz est 10cm, celle de la colonne de mercure est H=60cm. On enfonce le tube de 20cm, la température du gaz étant restée constante. La nouvelle hauteur H' de la colonne de mercure est de 45cm. En déduire la pression atmosphérique en hauteur de mercure.



Correction

$$p_A - p_B = -\rho g(z_A - z_B) = -\rho g H$$

Avec $p_A = p_1$ et $p_B = p_{atm}$

$$p_{A'} - p_{B'} = -\rho g H'$$

Avec $p_{A'} = p_2$ et $p_{B'} = p_{atm}$

De (1) à (2), transformation isotherme : $p_1.V_1 = p_2.V_2 = p_1 Sh = p_2 Sh'$

Finalement,

$$\begin{cases} p_1 - p_{atm} = -\rho g H \\ p_2 - p_{atm} = -\rho g H' \\ p_1.h = p_2.h' \end{cases}$$

$$p_{atm} = \frac{\rho g.\left(H.\frac{h}{h'} - H'\right)}{\frac{h}{h'} - 1} = 75\rho g$$

La pression atmosphérique équivaut à une colonne de mercure de 75cm environ.

2.3 Exercice : barrage

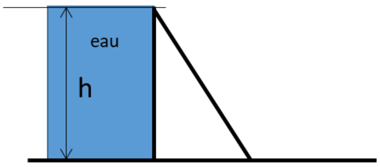
Un mur de barrage a le profil indiqué sur le schéma. Sa largeur est l_0.

1/ Déterminer la somme des forces de pression exercée sur le barrage par l'eau

2/ On suppose que la maçonnerie, non ancrée, repose directement sur le sol avec un coefficient de frottement f. Quelle valeur minimale faut-il donner à L pour éviter que le barrage glisse ?

$l_0 = 100m$; $h = 50m$; Densité du matériau $d = 2$; $f = 0{,}5$; $p_{atm} = 101325\ Pa$

$\rho(eau) = 1000\ kg/m^3$; $g = 9{,}81\ N.kg^{-1}$



Correction

1/ <u>Force $\vec{F}$ exercée par la pression de l'eau</u>

$$\overrightarrow{grad}p = \rho.\vec{g}$$

$$\frac{dp}{dz} = \rho.g$$

$$p_A - p_0 = \rho.g.(z_A - 0)$$

Avec $p_0 = p_{atm}$

A la profondeur z_A, la pression sur le barrage est donc

$$p_A = p_0 + \rho.g.z_A$$

Sur un élément de surface dS on a la force

$$dF = p.dS = p.l_0.dz = (p_0 + \rho g.z).l_0.dz$$

$$F = \int_0^h (p_0 + \rho g.z).l_0.dz = p_0 l_0 h + \frac{\rho g l_0 h^2}{2}$$

$$\boxed{\vec{F} = \begin{cases} p_0 l_0 h + \dfrac{\rho g l_0 h^2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{cases}}$$

2/ Inventaire des forces

- $\vec{F}$

- <u>Force $\overrightarrow{F'}$ exercée par la pression de l'air</u>
- Poids du barrage $\vec{P}$
- Réaction du sol sur le barrage $\vec{R}$

<u>Force $\overrightarrow{F'}$ exercée par la pression de l'air</u>

$$F' = p_0.S = p_0.l_0\sqrt{h^2 + L^2}$$

$$\vec{F}\begin{cases} F \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{F'}\begin{cases} F'_x = -F'.\cos\alpha = -p_0 l_0 h \\ \quad\quad 0 \\ F'_z = F'.\sin\alpha = p_0 l_0 L \end{cases}$$

Principe fondamental de la statique :

Sur $\vec{x}$ axe horizontal

$$p_0 l_0 h + \frac{\rho g l_0 h^2}{2} - p_0 l_0 h - f.N = 0$$

Sur $\vec{z}$

$$mg + p_0 l_0 L - N = 0$$

$$N = mg + p_0 l_0 L$$

$$L = \frac{\frac{1}{2}.\rho g h^2}{(\rho g h + p_0).f} \approx 41m$$

2.4 Exercice vitesse moyenne

Déterminer la vitesse moyenne de l'eau circulant dans une canalisation de 260mm de diamètre avec un débit de 6000 m^3 par jour.

Correction

Par définition,

$$Q = \bar{v}.S$$

: vitesse moyenne (m/s). On suppose que la vitesse est la même en tout point de la section. On appelle vitesse moyenne $\bar{v}$ cette vitesse. On a alors :

$$\bar{v} = \frac{Q}{S}$$

Q : débit (m^3/s) ; S : section (m^2)

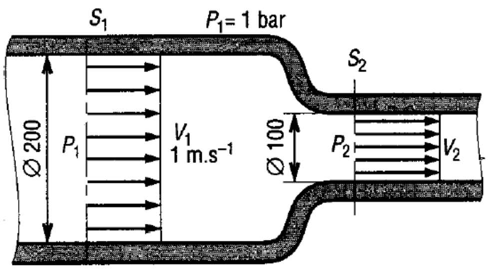
$$\bar{v} = \frac{6000}{86400} \cdot \frac{1}{\pi \cdot \frac{0.26^2}{4}} \approx 1{,}31\ m/s$$

2.5 Exercice : écoulement de fluide parfait

Une canalisation horizontale subit un rétrécissement.

L'eau de masse volumique 1000 kg/m^3 arrive en S_1 à la vitesse $v_1 = 1 m/s$ et à la pression de 1 bar.

Si en S_2 le diamètre est divisé par deux, déterminer P_2 et V_2.



Correction

Conservation du débit

$$v_1.S_1 = v_2.S_2$$

Donc

$$v_2 = v_1.\frac{S_1}{S_2} = v_1.\frac{d_1^2}{d_2^2}$$

$$v_2 = 1 * \frac{200^2}{100^2} = 4\ m/s$$

Loi de Bernoulli : avec $z_1 = z_2$

$$p_1 + \frac{1}{2}.\rho.v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}.\rho.v_2^2$$

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}.\rho.v_1^2 - \frac{1}{2}.\rho.v_2^2$$

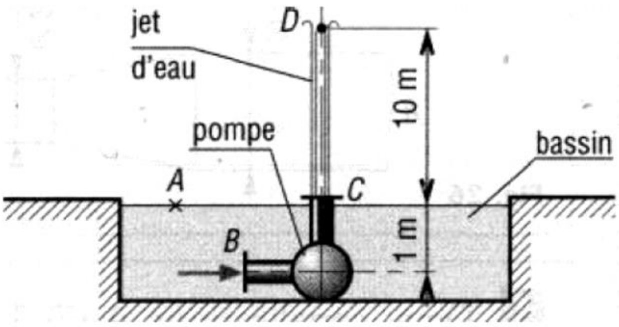
$$\boxed{p_2 = 0{,}925\ bar}$$

2.6 Exercice : jet d'eau

Le jet d'eau d'une fontaine publique est obtenu grâce à une pompe immergée.

Le débit d'eau est de 20 L/s et la hauteur du jet est de 10m.

Déterminer la vitesse du jet à sa sortie en C



Correction

Principe de Bernoulli entre les points C et D :

$$p_c + \frac{1}{2}\rho v_c^2 + \rho g z_c = p_D + \frac{1}{2}\rho v_D^2 + \rho g z_D$$

$p_c = p_D$ (pression atmosphérique)

$$z_D - z_c = 10$$

$$v_D = 0$$

Donc

$$\frac{1}{2}\rho v_c^2 = \rho g(z_D - z_c)$$

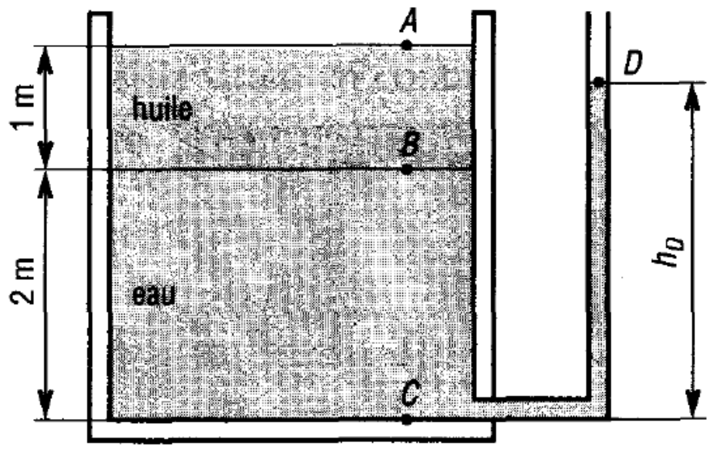
$$v_C = \sqrt{2g(z_D - z_c)}$$

$$\boxed{v_C = \sqrt{2 * 9{,}81 * 10} \approx 14\ m/s}$$

2.7 Exercice : réservoir

Un réservoir est rempli avec de l'eau (1000 kg/m³), sur une hauteur $h_{BC} = 2m$ et avec de l'huile (870 kg/m³) sur une hauteur $h_{BA} = 1m$.

Déterminer la hauteur d'eau h_D dans le tube piézométrique relié à la masse d'eau si $p_A = p_D$ (pression atmosphérique).



Correction

Bernoulli entre A et B :

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho_h g z_A = p_B + \frac{1}{2}\rho_h v_B^2 + \rho_h g z_B$$

Or $v_A = 0$ et $v_B = 0$ donc

$$p_B = p_A + \rho_h g(z_A - z_B)$$

Bernoulli entre B et D :

$$p_B + \frac{1}{2}\rho_e v_B^2 + \rho_e g z_B = p_D + \frac{1}{2}\rho_e v_D^2 + \rho_e g z_D$$

Or $v_D = 0$ donc

$$p_B + \rho_e g z_B = p_D + \rho_e g z_D$$

Donc

$$p_A + \rho_h g(z_A - z_B) + \rho_e g z_B = p_D + \rho_e g z_D$$

Or $p_A = p_D$ donc

$$\rho_h(z_A - z_B) + \rho_e z_B = \rho_e z_D$$

Finalement,

$$z_D = \frac{\rho_h(z_A - z_B) + \rho_e z_B}{\rho_e}$$

$$\boxed{z_D = \frac{870 * 1 + 1000 * 2}{1000} = 2{,}87m}$$

Il est physiquement cohérent de trouver moins de 3m.

2.8 Exercice : pertes de charges

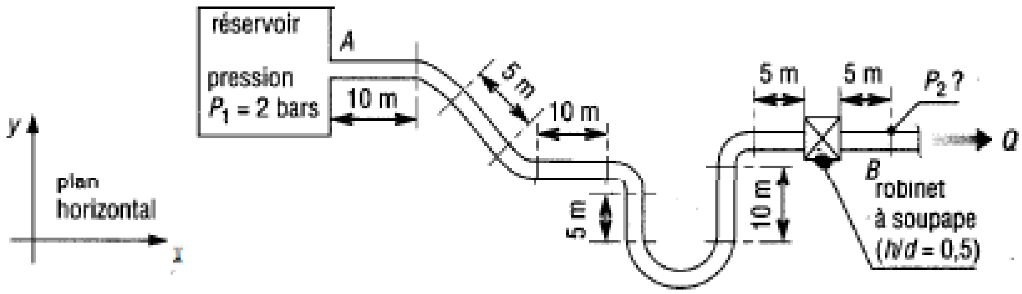
Soit la canalisation horizontale en tube d'acier ci-dessous.

1/ Déterminer le nombre de Reynolds entre le réservoir et le robinet à soupape

2/ En déduire la nature de l'écoulement

3/ En déduire les pertes de charges régulières entre A et B.

On donnera les pertes de charges en Pa.



Données

- Diamètre canalisation D=100mm
- Rugosité R=0.1mm
- Longueur L=50m
- Viscosité $\upsilon = 0{,}5534.10^{-6}\ m^2/s$
- Masse volumique du fluide $\rho = 988\ kg/m^3$
- Vitesse moyenne d'écoulement $\bar{v} = 2\ m/s$
- Masse volumique $\rho = 988\ kg/m^3$
- Nombre de Darcy en régime laminaire $\lambda = 64/Re$
- Nombre de Darcy en régime turbulent $\lambda = 0{,}79.\sqrt{\frac{R}{D}}$

Correction

1/

$$Re = \frac{\bar{v}.D}{\upsilon} = 361402$$

2/ Ecoulement turbulent

3/ $\lambda = 0{,}79.\sqrt{\frac{R}{D}} \approx 0{,}025$

Donc

$$\Delta p = \frac{\rho.\lambda.L.\bar{v}^2}{2D} \approx 24682\ Pa$$

3 Références

[1]

[1] J.-L. Fanchon, *Guide de Mécanique*. Nathan, 1998.