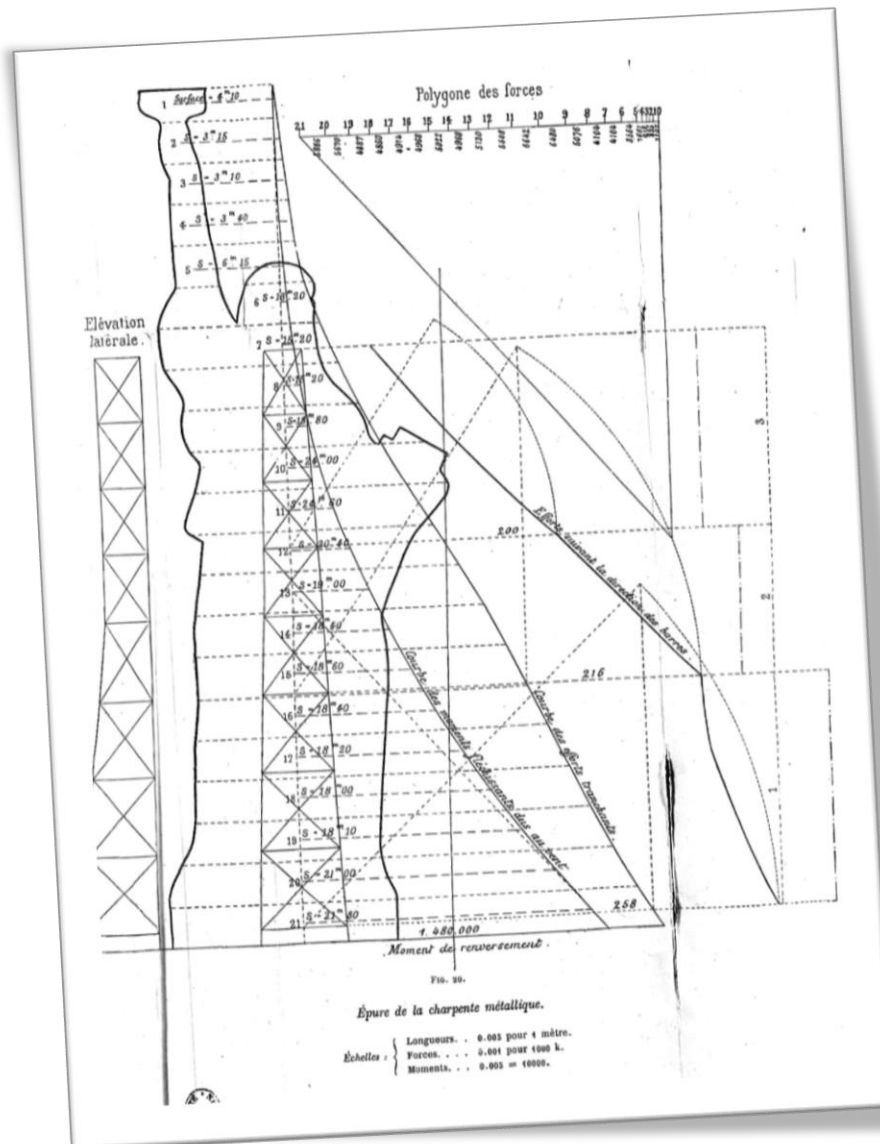


Statique graphique

Rappels théoriques – Exemples



Frédéric Menan

fmenan@cesi.fr

<https://lesdocsduprof.com/>

Février 2024

Table des matières

1	INTRODUCTION	3
2	APPORTS THEORIQUES	4
2.1	INTRODUCTION	4
2.2	PREMIERES CONSTATATIONS, PLAN DE SITUATION, PLAN DES FORCES	4
2.3	POLYGONE DES FORCES	7
2.4	POLYGONE FUNICULAIRE	8
2.5	MOMENT D'UNE FORCE.....	10
2.6	ANALYSE D'UN SYSTEME DE FORCES	11
3	ETUDE DES POUTRES PAR STATIQUE GRAPHIQUE	15
3.1	PROCEDURE	15
3.2	REACTION AUX APPUIS	17
3.3	CAS D'UNE CHARGE REPARTIE	19
3.4	REFERENCE [3]	22
3.5	CHOIX AU HASARD DU POINT O_1	26
3.6	PLUSIEURS MESURES POUR PLUS DE PRECISION	26
3.7	REDRESSER LE POLYGONE FUNICULAIRE.....	26
3.8	EXEMPLES.....	27
4	SYSTEMES ARTICULES	29
4.1	METHODE DE CREMONA (EPURE DE CREMONA).....	29
4.2	CAS D'UN NŒUD RELIANT DEUX BARRES.....	31
4.3	EXEMPLES.....	33
5	CINEMATIQUE GRAPHIQUE	34
6	EXEMPLES DIVERS	35
6.1	LA STATUE DE LA LIBERTE ECLAIRANT LE MONDE [15]	35
7	EXERCICES.....	37
8	EXERCICE 1. TREILLIS.....	37
9	FORMULAIRE MATHÉMATIQUES	38
9.1	GEOMETRIE.....	38
10	REFERENCES.....	39

Image page de garde : calcul par statique graphique des ancrages de la statue de la liberté par Mr Eiffel. Référence : « La statue de la liberté éclairant le monde ». Talansier, Charles « Le Génie civil » (Paris). 1883. Source BNF

1 Introduction

La statique graphique est une méthode simple et rapide pour de nombreux cas usuels de calcul de résistance des matériaux. Elle semble cependant être un peu tombée en désuétude, peut-être depuis l'apparition des codes de calcul ?

On voit pourtant encore aujourd'hui les bureaux d'études développer des outils simples, alternatives aux codes de calculs plus coûteux et lourds d'utilisation, dans le cas de calculs de pré-projet, en phase de devis, pour obtenir un ordre de grandeur ou pour un calcul rapide « sur le terrain ».

Ce document a pour objectif de présenter succinctement la statique graphique et de fournir des exemples d'utilisation concrets, utiles aux ingénieurs et techniciens.

Pour un développement complet des méthodes de calculs par statiques graphiques, l'auteur renvoie aux références suivantes : [1]–[9].

2 Apports théoriques

2.1 Introduction

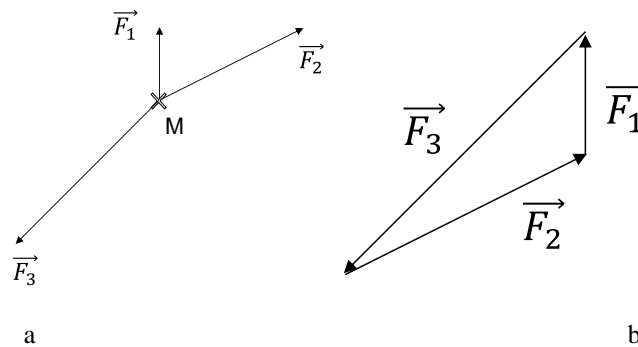


Figure 1. Principe fondamental de la statique. Vision "graphique"

Soit un point M, à l'équilibre, soumis à l'action de trois forces (Figure 1). Le Principe Fondamental de la Statique au point M énonce :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

Si l'on fait graphiquement la somme des trois vecteurs forces, c'est-à-dire en les traçant bout à bout comme sur la Figure 1b, on obtient le vecteur nul : tracer ces trois vecteurs à la suite nous fait revenir au point de départ. De cette constatation on constate de nombreuses applications : on peut vérifier qu'un solide est à l'équilibre ou, connaissant certaines forces et sachant que le solide est à l'équilibre, déterminer graphiquement les autres forces.

2.2 Premières constatations, plan de situation, plan des forces

2.2.1 Solide soumis à deux forces

Soient 2 forces \vec{F}_A et \vec{F}_B appliquées aux points A et B d'un solide.

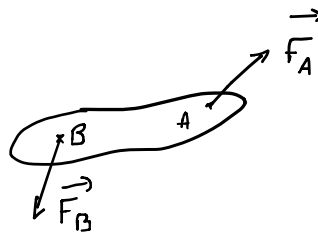


Figure 2. Solide soumis à deux forces

A l'équilibre on a :

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_B = \vec{0} \quad (2)$$

(2) indique que \overrightarrow{AB} et \vec{F}_B ont même direction, donc la force \vec{F}_B a pour direction la droite AB.

(1) indique donc que \vec{F}_A a pour direction la direction de \vec{F}_B , soit la droite AB.

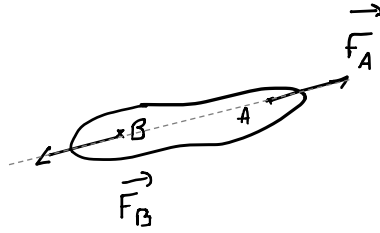
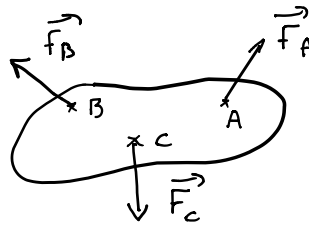


Figure 3. Solide soumis à deux forces, à l'équilibre

2.2.2 Solide soumis à trois forces

2.2.2.1 Cas de 3 forces non parallèles



Soit un solide à l'équilibre soumis à 3 forces appliquées en A, B et C, le PFS donne :

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_B + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{F}_C = \vec{0} \quad (2)$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_B$ est normal au plan $(\overrightarrow{AB}, \vec{F}_B)$. Le vecteur $\overrightarrow{AC} \wedge \vec{F}_C$ est normal au plan $(\overrightarrow{AC}, \vec{F}_C)$.

(2) montre que ces vecteurs sont opposés donc les forces \vec{F}_B et \vec{F}_C sont dans le plan ABC.

(1) montre que la force \vec{F}_A est également dans ce plan. Donc les 3 forces sont coplanaires.

Si \vec{F}_B et \vec{F}_C ne sont pas parallèles. Soit I leur point d'intersection. L'équation du moment statique écrite en I montre que le support de la force \vec{F}_A passe également par I. Donc les 3 forces sont concourantes.

Si \vec{F}_B et \vec{F}_C sont parallèles, alors (1) montre que \vec{F}_A est parallèle aux deux autres. Les 3 forces sont parallèles.

Pour conclure, si un solide est en équilibre sous l'action de 3 forces, ces forces sont :

- Coplanaires (dans un même plan)
- concourantes en un même point ou parallèles
- de somme vectorielle nulle

Démarche de résolution

Soit un solide soumis à l'action de 3 forces, à l'équilibre. En sommant graphiquement ces forces, on doit former un triangle (Figure 1).

Supposons connue la force \vec{F}_1 . On connaît également la direction de la force \vec{F}_2 appliquée en B. Les 3 forces sont concourantes donc on peut déterminer la direction de la force \vec{F}_3 appliquée en C. Enfin à l'aide du triangle des forces on peut retrouver des forces \vec{F}_2 et \vec{F}_3 . Les efforts connus sont tracés avec une échelle donnée (par exemple

1000 N = 1 cm). On trace les autres vecteurs pour retrouver le point de départ puis on mesure leur longueur et on retrouve l'amplitude des forces.

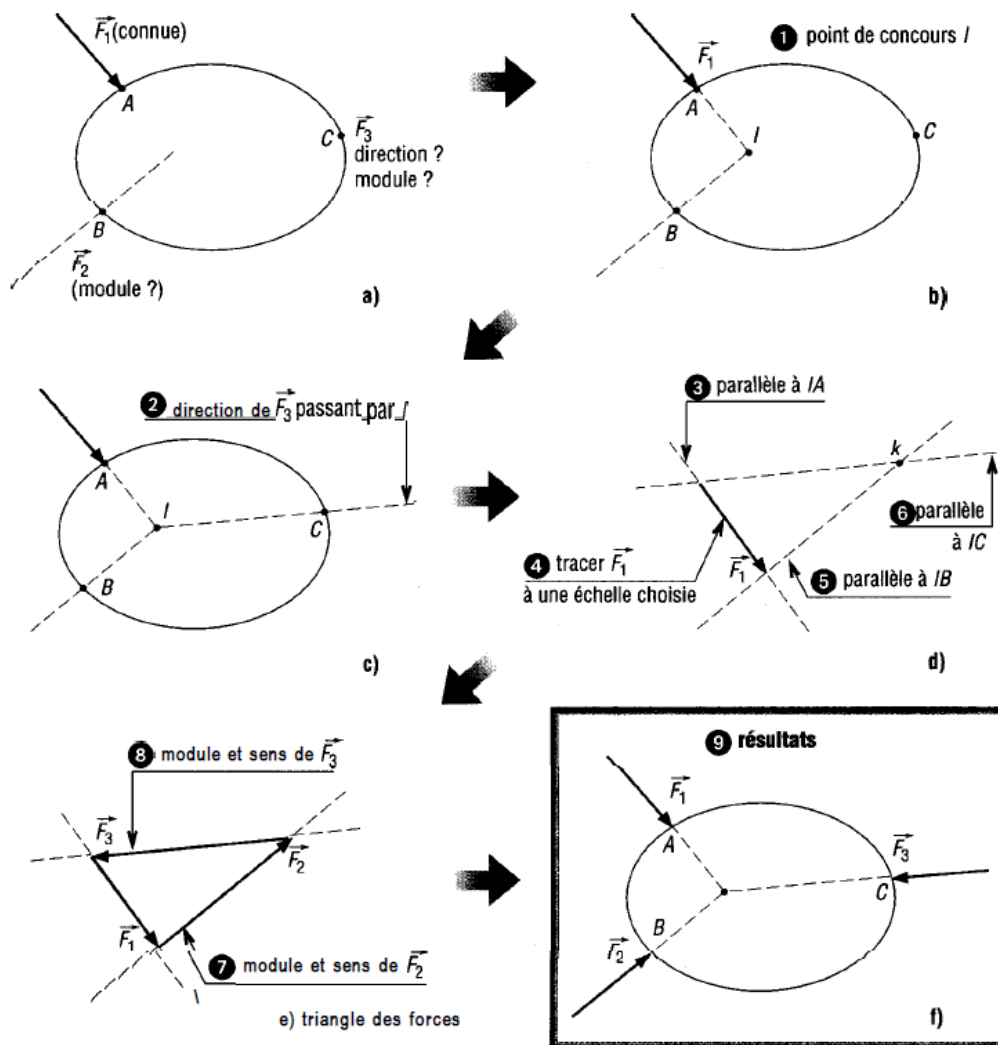


Figure 4. Statique graphique appliquée à un système de trois forces à l'équilibre [10]

2.2.2.2 Cas de 3 forces parallèles

Pour un solide soumis à trois forces parallèles on ne forme pas un triangle car toutes les forces ont même direction. Ce cas est particulièrement utile pour trouver les réactions d'appui dans une poutre. On verra plus tard une généralisation pour plusieurs forces appliquées.

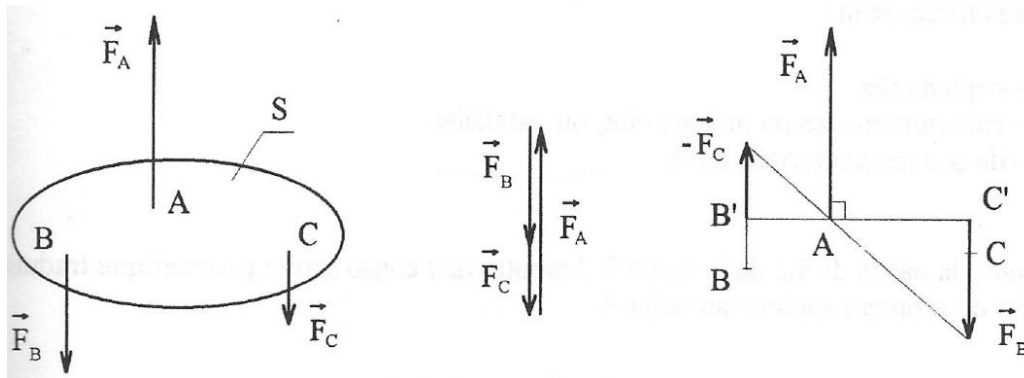


Figure 5. Solide soumis à trois forces parallèles [11]

2.2.3 Plan de situation et plan des forces

On constate qu'en statique graphique on trace et remplit deux figures :

- la figure correspondant au schéma du solide sur lequel on place les forces aux points d'application, sans nécessairement leur donner une échelle précise mais en précisant bien leur direction. On parlera de plan de situation. Sur ce plan les distances doivent être respectées avec une échelle connue (par exemple 1 m = 1 cm). Exemple : Figure 1a.
- La figure correspondant aux forces placées bout à bout, avec une échelle connue (par exemple 1 kN = 1cm). On parlera de plan des forces. Exemple : Figure 1b.

2.3 Polygone des forces

Soit un solide soumis à l'action de n forces. On donne ci-dessous l'exemple d'un solide soumis à 4 forces.

A partir d'un point A choisi au hasard, on trace bout à bout les forces \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 et \vec{F}_4 . Le contour ABCDE obtenu est appelé polygone des forces, ou polygone dynamique.

Le triangle des forces en Figure 1 et la Figure 5 au centre sont donc des polygones des forces. Quand les forces sont parallèles, le polygone des forces est ramené à une droite comme sur la Figure 5 au centre.

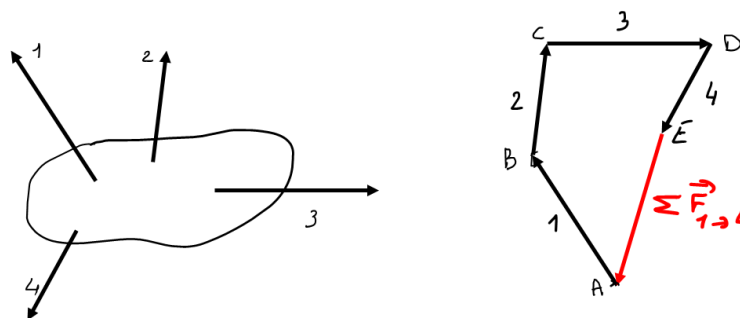


Figure 6. Solide soumis à n forces et polygone des forces de Varignon

La résultante des forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ et \vec{F}_4 est le vecteur \vec{EA} . On voit que si la somme des forces est nulle, la résultante est nulle et les points E et A sont confondus. On dit que le polygone des forces est fermé. Nous verrons par la suite si un polygone des forces fermé constitue une condition suffisante pour que le solide S soit à l'équilibre. Petit indice : un polygone des forces fermé indique que la somme des forces est nulle. Pour qu'un solide soit à l'équilibre, il faut aussi que la somme des moments en tout point du solide soit nulle. Continuons car il nous manque des outils théoriques pour répondre à cette question.

2.4 Polygone Funiculaire

Soit le solide ci-dessous soumis à 4 forces (Figure 7a). On a tracé le polygone des forces ABCDE (Figure 7b). Puis, partant d'un point O choisi au hasard, on trace les rayons OA, OB, OC, OD et OE.

Partant d'un point t choisi au hasard, les rayons polaires OA, OB, OC, OD et OE sont ensuite reportés sur les lignes d'action des forces comme sur la Figure 7c. La ligne tuvwx ainsi formée est appelée le polygone funiculaire du système de forces 1-2-3-4. On parle de polygone funiculaire car c'est la forme que prendrait une corde attachée aux extrémités du polygone et sollicitée par les 4 forces étudiées (Figure 8). La définition de www.larousse.fr précise : courbe funiculaire : courbe d'équilibre d'un fil soumis à l'action d'un système de forces extérieures données.

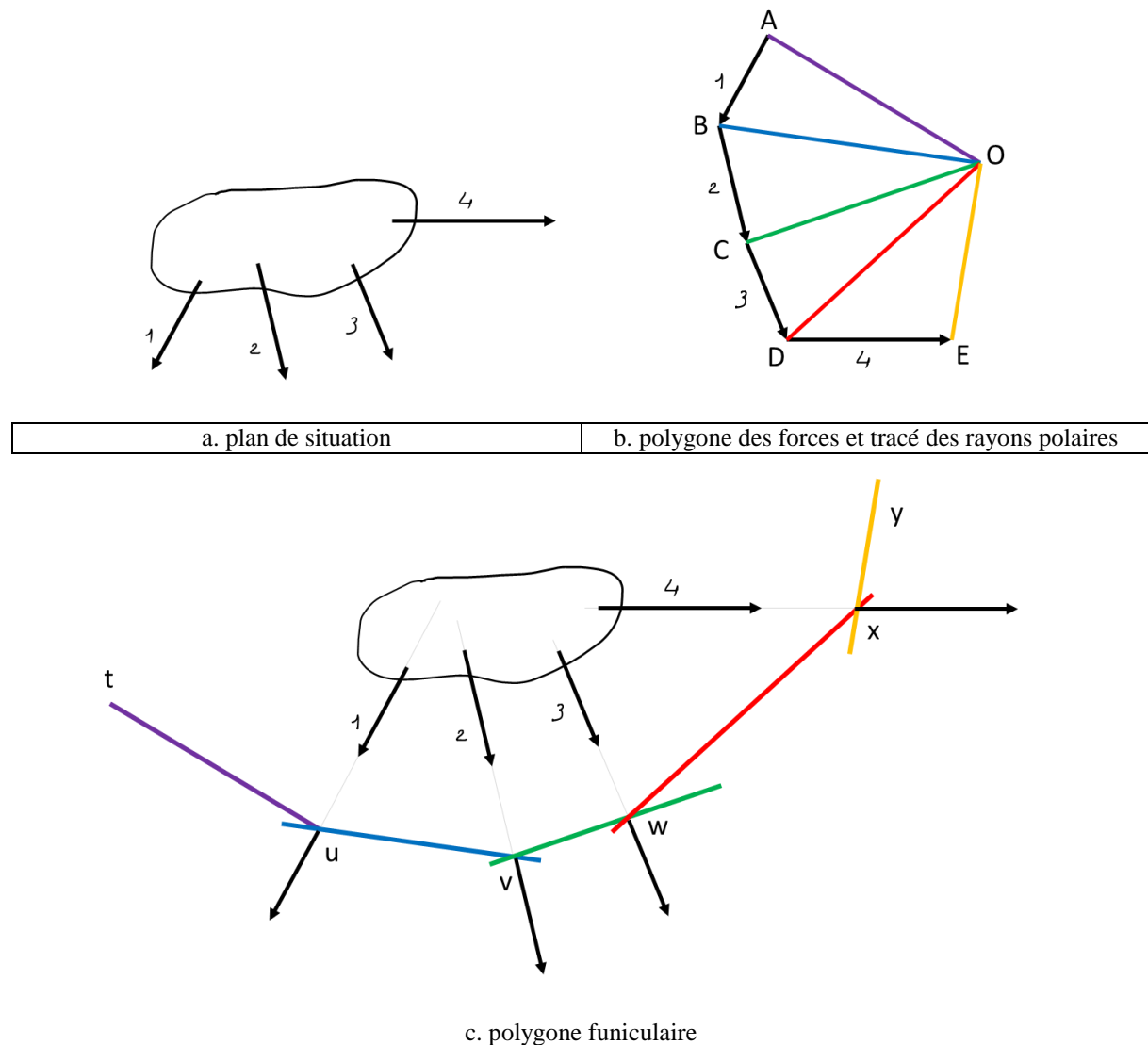


Figure 7. Solide soumis à 4 forces. Polygones des forces et polygone funiculaire

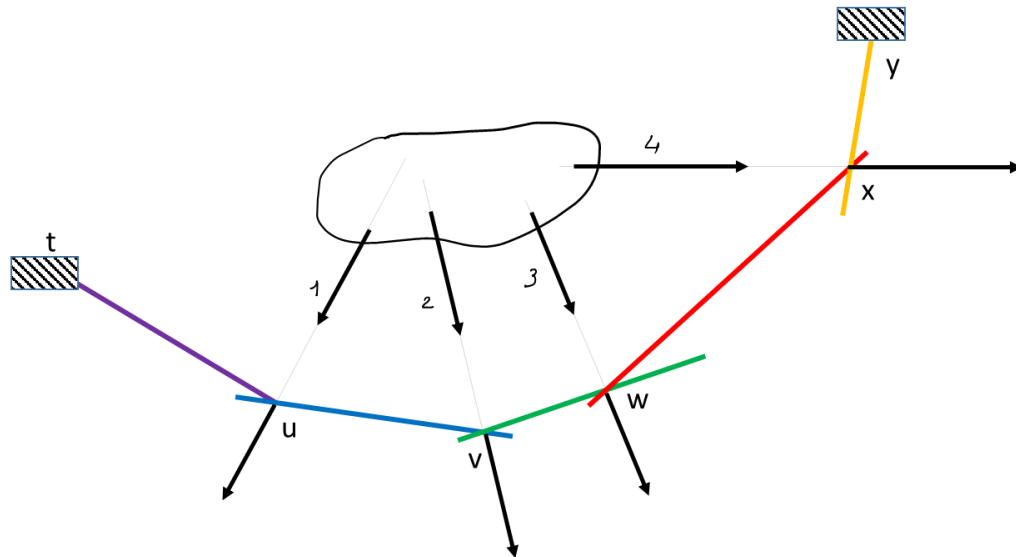


Figure 8. Polygone funiculaire

Remarquons un dernier point.

Ci-dessous sur le polygone des forces, le vecteur \overrightarrow{AE} est la résultante des forces 1-2-3-4.

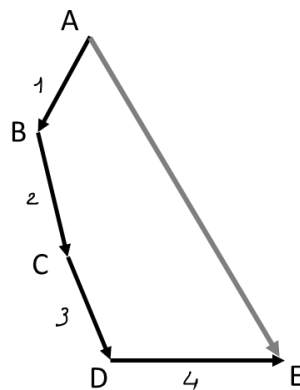


Figure 9. Résultante des forces 1-2-3-4

Si l'on prolonge les droites tu et yx , sur la Figure 10, leur point de rencontre est le point d'application de la résultante \overrightarrow{AE} des forces 1-2-3-4.

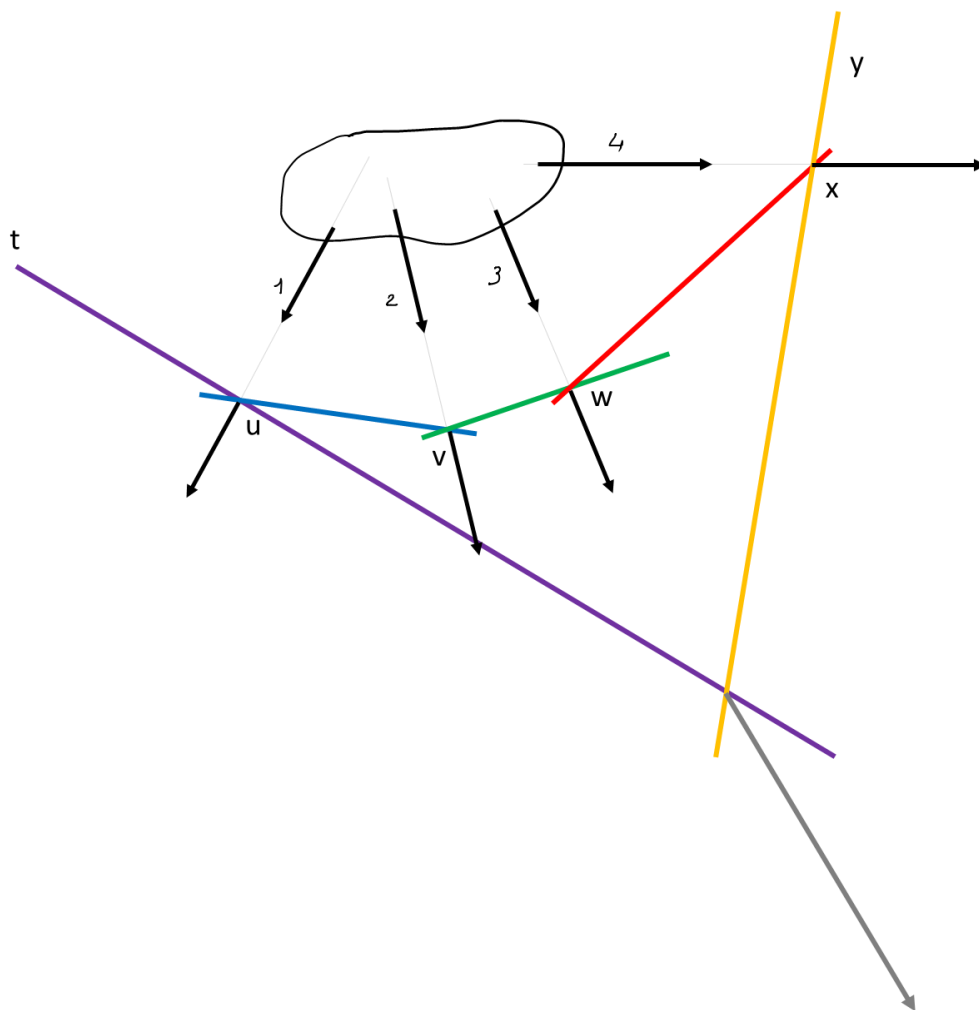


Figure 10. Point d'application des forces 1-2-3-4

Dernière remarque : dans la corde attachée que représente le polygone de la Figure 8, les tensions dans les sections tu , uv , vw , ... de la corde sont proportionnelles aux rayons OA , OB , OC ,etc.

2.5 Moment d'une force

On souhaite calculer le moment en C dû à la force \vec{F} de direction Δ (Figure 11). On sait que ce moment vaut, en valeur absolue, $\|\vec{F}\| \cdot h$, h distance appelée bras de levier de la force. On reporte la force \vec{F} sur le plan des forces (à droite) avec une échelle donnée. On obtient le segment de longueur \vec{F} puis on trace le polygone des forces a_0a_1P avec P choisi au hasard. Enfin on trace sur le plan de situation (à gauche) la figure constituée des droites 0 et 1 issues du polygone des forces : le polygone funiculaire vu précédemment.

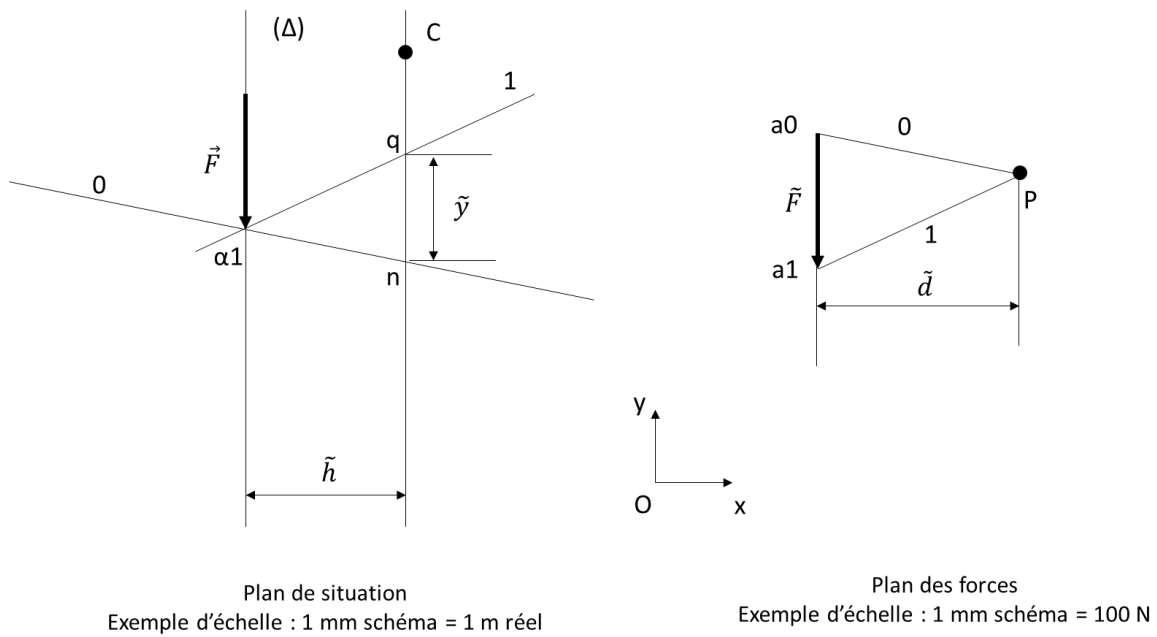


Figure 11. Moment d'une force, calcul graphique [1]

On constate que les triangles $\alpha_1 n q$ et $a_0 a_1 P$ sont semblables car ils ont leurs côtés parallèles deux à deux. Par conséquent :

$$\frac{\tilde{d}}{\tilde{F}} = \frac{\tilde{h}}{\tilde{y}} \Leftrightarrow \tilde{F} \cdot \tilde{h} = \tilde{d} \cdot \tilde{y}$$

Soit f l'échelle des forces. Par exemple, $f=1$ kN/cm. On a alors $\|\tilde{F}\| = \tilde{F} \cdot f$.

Soit L l'échelle des longueurs. Par exemple, $L=1$ m/cm. On a alors $h = \tilde{h} \cdot L$.

On a donc

$$\|\tilde{F}\| \cdot h = \tilde{F} \cdot f \cdot \tilde{h} \cdot L = \tilde{d} \cdot \tilde{y} \cdot f \cdot L$$

Ainsi le moment en C dû à la force \vec{F} est donné par la distance polaire \tilde{d} mesurée sur le plan des forces et par la distance \tilde{y} mesurée sur le plan de situation, connaissant bien sûr les échelles utilisées.

2.6 Analyse d'un système de forces

On a vu que si la somme des forces extérieures est nulle alors la résultante de ces forces est nulle et le polygone des forces est une figure fermée (Figure 6).

Si le polygone des forces est fermé, peut-on dire que le solide est à l'équilibre ?

Analysons les deux exemples ci-dessous.

2.6.1 Exemple 1

Le solide ci-dessous est soumis à trois forces parallèles. On vérifie que

$$\sum \vec{F} = (4 - 6 + 2) \cdot \vec{z} = \vec{0}$$

On voit sur la figure ci-dessous que le polygone des forces est fermé. Cependant, la somme des moments n'est pas nulle. En effet soit un point M situé à la distance x de B. La somme des moments suivant l'axe z donne :

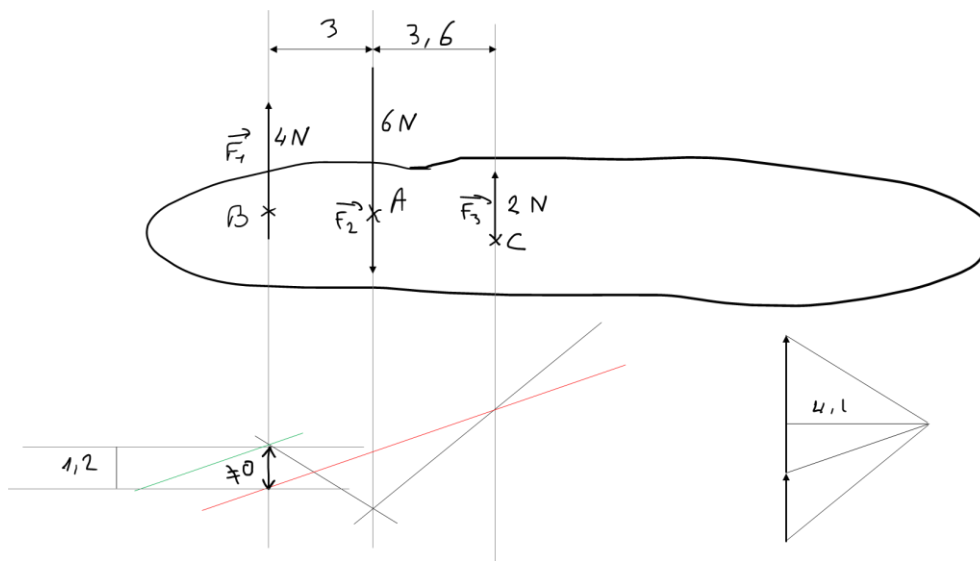
$$4x - 6(x + 3) + 2(x + 6,6) = 4x - 6x + 2x - 18 + 2 * 6,6 = -4,8 \text{ Nm}$$

Remarque : on vérifie aussi que la somme des moments en A, en B et en C vaut -4.8 Nm.

On a donc

$$\sum \vec{M} \neq \vec{0}$$

Le solide n'est pas à l'équilibre. Un système de forces donnant un moment constant en tout point est appelé couple. Le solide ci-dessous est en fait soumis à un couple de forces. Si l'on trace le polygone funiculaire, on voit que la dernière ligne (rouge) ne rencontre pas la première ligne (verte). Le polygone funiculaire n'est pas fermé.



Echelles : 1 m = 1 cm ; 1 N = 1 cm

On peut pousser l'exemple plus loin. On voit que suivant la direction des forces, la distance entre la première et la dernière ligne du polygone funiculaire est a=1.2 sur le plan. La distance polaire sur le polygone des forces est d=4.1. Le produit a.d = 1,2*4,1 = 4.9 Nm soit la valeur du couple de forces.

2.6.2 Exemple 2

Dans l'exemple ci-dessous, on a :

$$\sum \vec{F} = (4 - 6 + 2) \cdot \vec{z} = \vec{0}$$

De plus on vérifie qu'en tout point du solide, la somme des moments est nulle. En effet soit un point M situé à la distance x de B. La somme des moments suivant l'axe z donne :

$$4x - 6(x + 3) + 2(x + 9) = 4x - 6x + 2x - 18 + 18 = 0$$

On a donc

$$\sum \vec{M} = \vec{0}$$

Sur la figure ci-dessous, on voit que la dernière ligne du polygone funiculaire (rouge) est confondue avec la première ligne (verte). Elles sont parallèles et la distance qui les sépare est nulle. On dit que le polygone funiculaire est fermé.

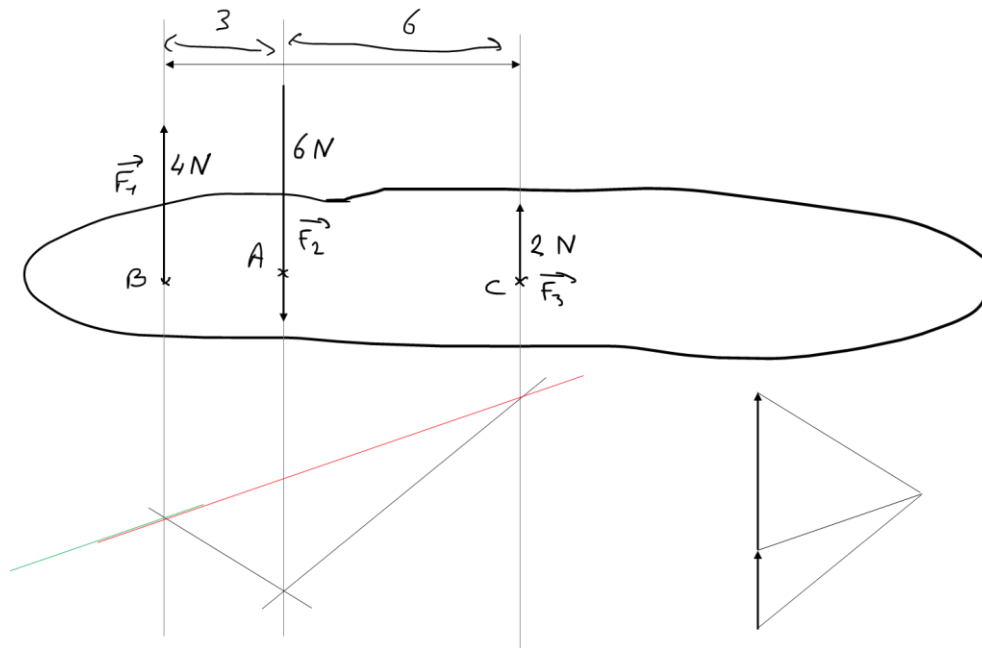


Figure 12. Analyse d'un système de force. Exemple 2

2.6.3 Exemple 3

Soit le solide ci-dessous soumis à 2 forces parallèles non concourantes. On sait que le système de forces présenté ici est un couple. Le polygone des forces a été tracé (AB), ainsi que les rayons polaires OA et OB. Le polygone funiculaire tuv w a été créé. La dernière droite du polygone funiculaire, (vw), coupe le support de la force 1 en x.

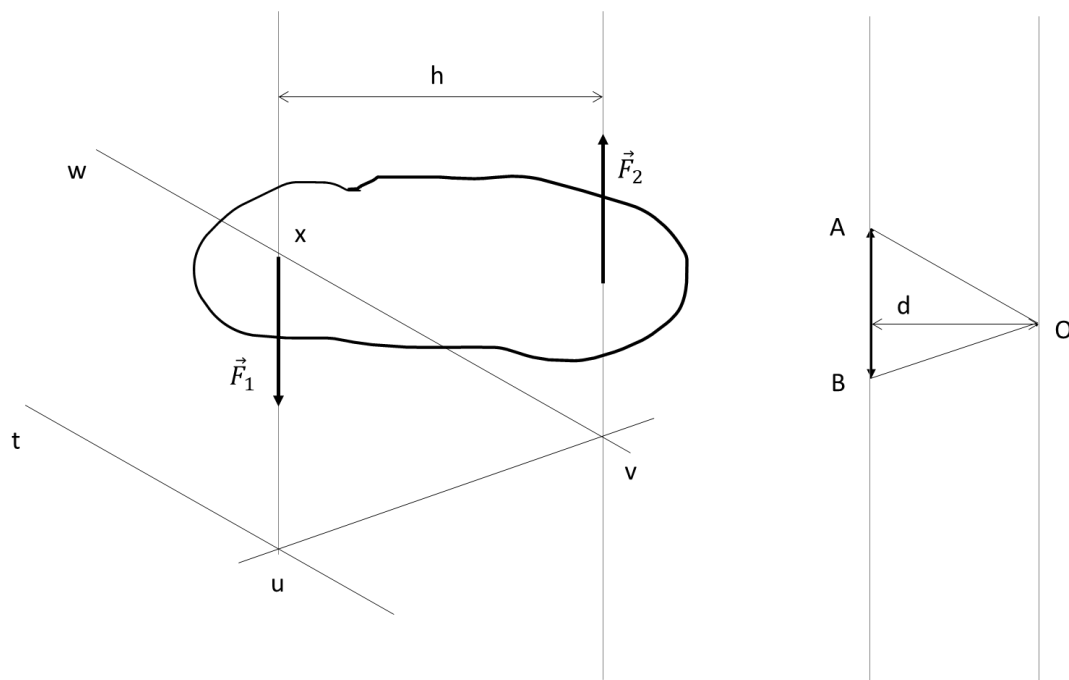


Figure 13. Analyse d'un couple de forces

Sur la Figure 13, par définition le couple induit par les forces 1 et 2 a pour norme $C = \|\vec{F}_1\| \cdot h$.

Or les triangles ABO et xuv sont semblables donc :

$$\frac{h}{d} = \frac{ux}{AB}$$

Donc

$$AB \cdot h = d \cdot ux$$

Or graphiquement AB représente $\|\vec{F}_1\|$ donc $AB \cdot h$ représente le couple C, moyennant les échelles choisies pour les longueurs et forces sur les figures. En conclusion, $d \cdot ux$ représente le couple C induit par les forces 1 et 2. On voit immédiatement que si $ux=0$ (polygone funiculaire fermé comme dans la Figure 12) le couple C induit par les forces 1 et 2 est nul.

2.6.4 Constatations, synthèse

Ainsi sans en avoir fait la démonstration formelle, on a mis en évidence le résultat suivant dont la démonstration sera trouvée dans [1].

Les conditions d'équilibre d'un système isolé sont :

Dans le plan des forces : polygone fermé ($\sum \vec{F} = \vec{0}$)

Dans le plan de situation : polygone funiculaire fermé ($\sum \vec{M} = \vec{0}$)

3 Etude des poutres par statique graphique

Les méthodes graphiques peuvent être des moyens rapides et simples de vérifier, avec une précision surprenante, les résultats de calculs analytiques ou numériques.

On présente dans ce document une méthode graphique pour déterminer dans une poutre dont les liaisons à chaque extrémité sont variables (libre, appui ou encastrement) :

- Le moment fléchissant
- Les réactions aux appuis

On considère le cas de charges ponctuelles. Le cas de charges réparties est rapporté à des charges ponctuelles (discretisé, voir exemple).

Dans les exemples de ce document, aucune unité de force ou moment n'est donnée, volontairement. Les unités dépendront de l'échelle graphique choisie.

3.1 Procédure

Etape 1/ Fixer une échelle pour les distances et une échelle pour les forces (par exemple 1 cm = 1m et 1 cm = 1kN)

Etape 2/ Représenter la poutre et les charges sur une feuille, à l'échelle (Figure 14).

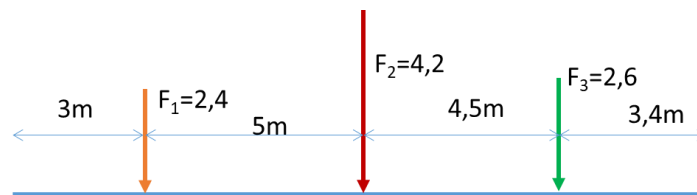


Figure 14. Poutre 1. Géométrie et cas de charge

Etape 3/ Polygone des forces. Quels que soient les types de liaison aux extrémités de la poutre (appui, encastrement, libre.....), le polygone des forces est le même.

Tracer les forces à la suite les unes des autres. Placer un point O_1 au hasard à la droite de la ligne créée. Rejoindre les extrémités des vecteurs forces au point O_1 par des lignes droites (Figure 15). Mesurer la distance h entre O_1 et la ligne des forces. h est appelée distance polaire.

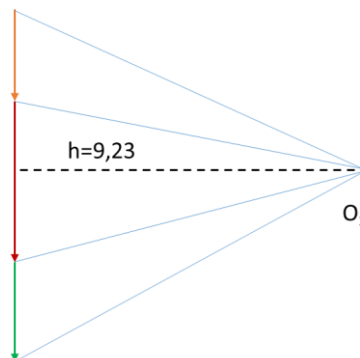


Figure 15. Polygone des forces

Etape 4/ Construction du polygone funiculaire et mesure du moment fléchissant

Le polygone funiculaire et plus précisément la ligne de fermeture du polygone funiculaire varie suivant le type de liaison aux extrémités de la poutre (appui, encastrement, libre.....).

- **Poutre encastree - libre**

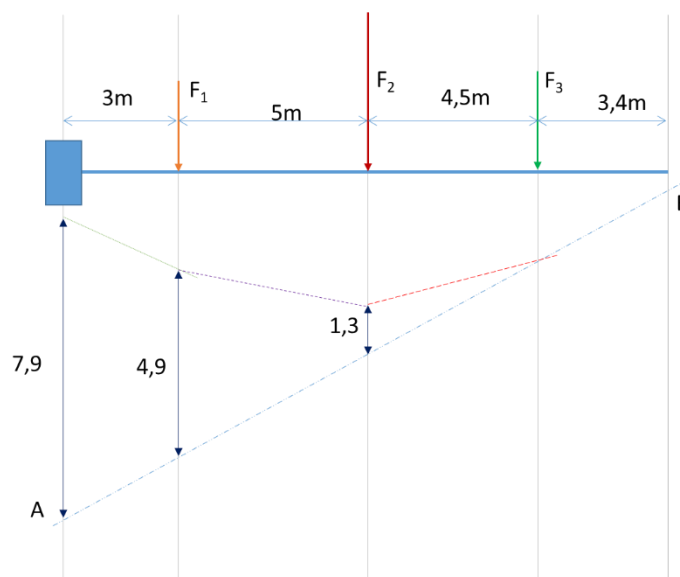


Figure 16. Polygone funiculaire. Encastrement à gauche / libre à droite. Lecture graphique du moment fléchissant

Pour le moment fléchissant dans une section donnée, lire l'ordonnée entre le polygone funiculaire et la ligne AB dans cette section. On donne ci-dessus la mesure pour les sections $x=0$, $x=3$ et $x=8$. L'ordonnée lue, multipliée par la distance polaire h donne le moment fléchissant (Tableau 1).

encastree et libre - cas 1			
		Moment fléchissant	
Abscisse	Ordonnée	Graphique	RDM7
$x=0$	7,9	72,92	73,30
$x=3$	4,9	45,23	45,70
$x=8$	1,3	12,00	11,70
		Réactions aux appuis	
		Graphique	RDM7
	$x=0$	9,2	9,2
	$x=15,9$	0	0

Tableau 1. Poutre 1 encastree à gauche et libre à droite. Comparaison statique graphique-RDM7

- **Poutre sur deux appuis**

Dans le cas d'une poutre sur deux appuis, la ligne de fermeture du polygone funiculaire est une droite passant par B et C. On mesure ensuite la distance (ordonnée) entre cette droite et l'enveloppe du polygone funiculaire.

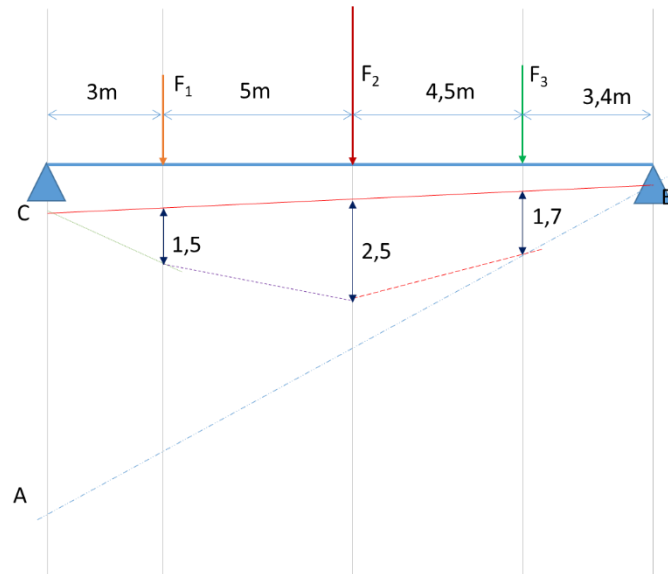


Figure 17. Poutre 1 sur deux appuis. Lecture du moment fléchissant

Les résultats et la comparaison avec le logiciel RDM7 sont résumés dans le Tableau 1.

2 appuis - cas 1			
		Moment fléchissant	
Abscisse	Ordonnée	Graphique	RDM7
x=3	1,5	13,85	13,77
x=8	2,7	24,92	24,72
x=12,5	1,7	15,69	15,67
		Réactions aux appuis	
		Graphique	RDM7
	x=0	4,60	4,59
	x=15,9	4,60	4,61

Tableau 2. . Poutre 1 sur deux appuis. Comparaison statique graphique-RDM7

3.2 Réaction aux appuis

On peut également retrouver les **réactions aux appuis** par statique graphique.

Sur le polygone des forces, on reporte la ligne de fermeture du polygone funiculaire (ligne rouge). On coupe alors la ligne des forces en deux parties. La partie du haut est la réaction d'appui en A. La partie du bas est la réaction en B.

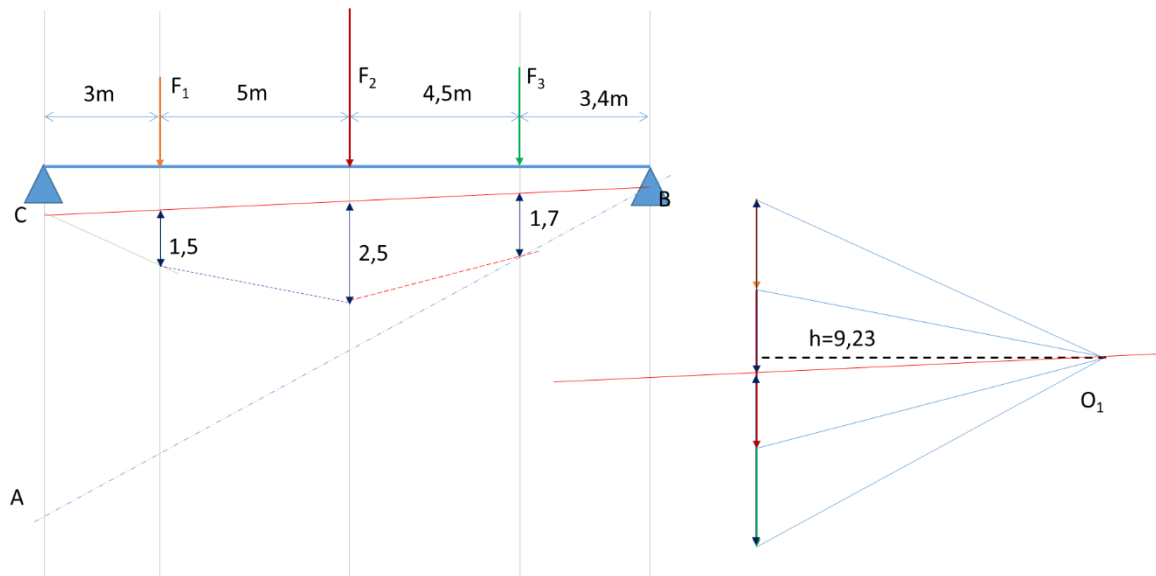


Figure 18. Poutre 1 sur deux appuis. Réactions d'appui

Exemple

Soit une poutre de longueur 16.

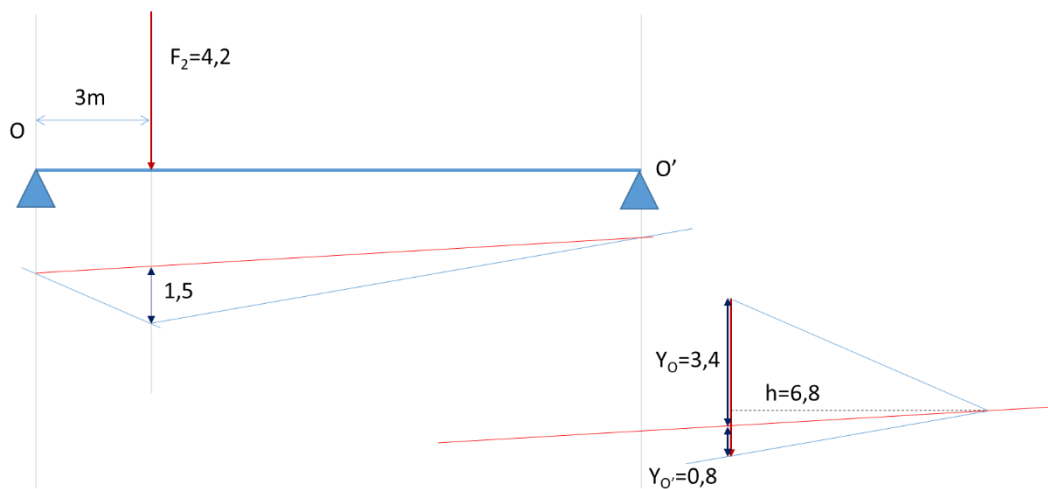


Figure 19. Exemple 3. Statique graphique

Graphiquement,

$$M_{f_{max}} = 1.5 \times 6.8 = 10.2$$

Méthode	Moment fléchissant	Réactions aux appuis
Statique graphique	10.2	$Y_O=3.4$ $Y_{O'}=0.8$
RDM7	10.24	$Y_O=3.41$ $Y_{O'}=0.79$

Figure 20. Exemple 3. Comparaison statique graphique – RDM7

Résolution analytique :

$$Y_O = \frac{13F}{16} = 3.4125$$

$$Y_{O'} = \frac{3F}{16} = 0.7875$$

$$M_{max} = 10.2375$$

Exemple

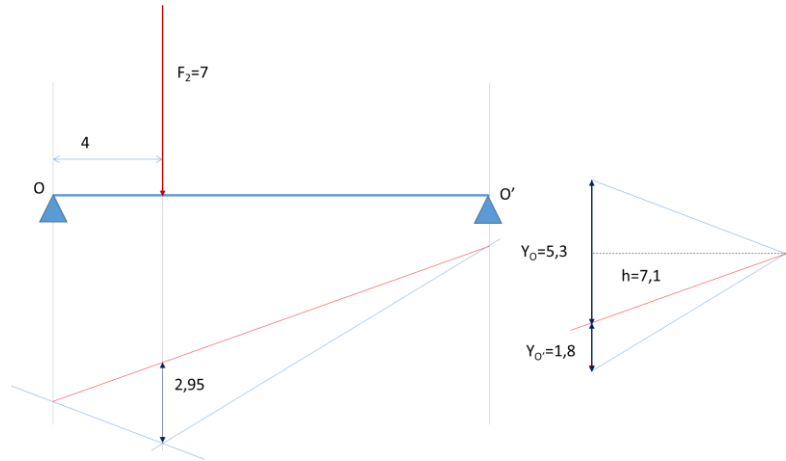


Figure 21. Exemple 4. Statique graphique

Méthode	Moment fléchissant	Réactions aux appuis
Statique graphique	20.95	$Y_0=5.3$ $Y_{O'}=1.8$
RDM7	21.00	$Y_0=5.25$ $Y_{O'}=1.75$

Figure 22. Exemple 3. Moment fléchissant

3.3 Cas d'une charge répartie

Dans le cas d'une charge répartie, on discrétise cette charge en plusieurs charges ponctuelles. Appelons « nœuds » les points d'application de ces charges. Pour n nœuds, couper la poutre en n sections identiques de longueur L/n puis appliquer une charge ponctuelle de valeur $q.L/n$ au centre de chaque section.



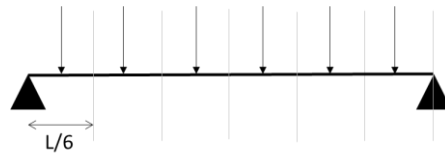
(a) 2 nœuds



(b) 3 nœuds



(c) 4 nœuds



(d) 6 nœuds

Figure 23. Discrétisation de la charge répartie en charges ponctuelles

3.3.1 Exemple 1

Soit la charge linéique q ci-dessous de 2 kN/m. La poutre est de longueur $L=10\text{m}$.



Figure 24. Statique graphique pour une charge répartie. Exemple 1

Pour ce problème, le moment fléchissant maximal est

$$M_{max} = \frac{q \cdot L^2}{8} = 25 \text{ kN.m}$$

Résultats obtenus en fonction du nombre de nœuds

Pour $n=1$, on retrouve le moment fléchissant d'une charge concentrée au centre :

$$M_{max} = \frac{q \cdot L^2}{2} = 50 \text{ kN.m}$$

Pour $n>1$, le résultat analytique donne un moment fléchissant maximal exact si n est pair.

Démonstration pour $n=2$



Dans une section d'abscisse x :

$$M = \frac{qL^2}{4} - q \cdot \frac{(L-x)^2}{2}$$

En $x=L/2$ on retrouve

$$M_{max} = \frac{q \cdot L^2}{8}$$

Si n est impair, l'application d'une charge ponctuelle au centre fausse le calcul du moment fléchissant qui sera alors supérieur au moment fléchissant exact.

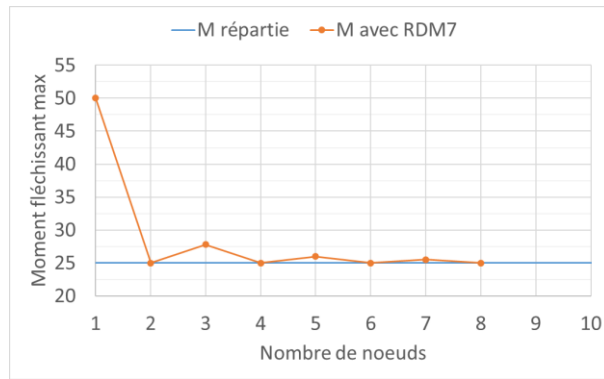


Figure 25. Statique graphique pour une charge répartie. Exemple 1. Influence du nombre de nœuds sur M_{\max}

A partir de 4 nœuds, l'allure du moment fléchissant montre un écart maximal de 14% avec l'allure pour la charge répartie.

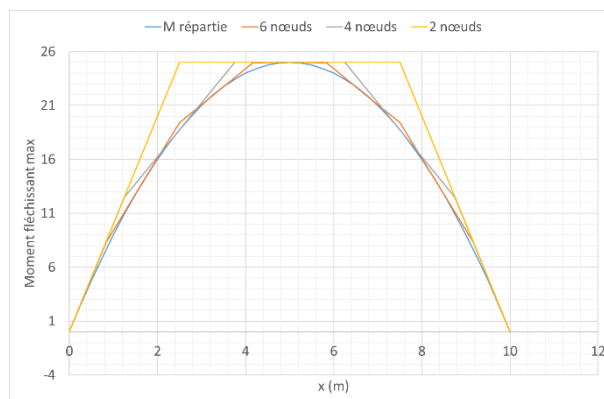


Figure 26. Statique graphique pour une charge répartie. Exemple 1. Allure du moment fléchissant

x (m)	2 nœuds	4 nœuds	6 nœuds	M répartie	écart
1,25	/	12,5		10,94	14%
2,5	25	/	/	18,75	33%

Tableau 3. Statique graphique pour une charge répartie. Exemple 1

3.3.2 Exemple 2

Soit une poutre sur deux appuis sollicitée par une charge linéique sur une partie seulement, et par une charge ponctuelle à 2m de l'appui de gauche.

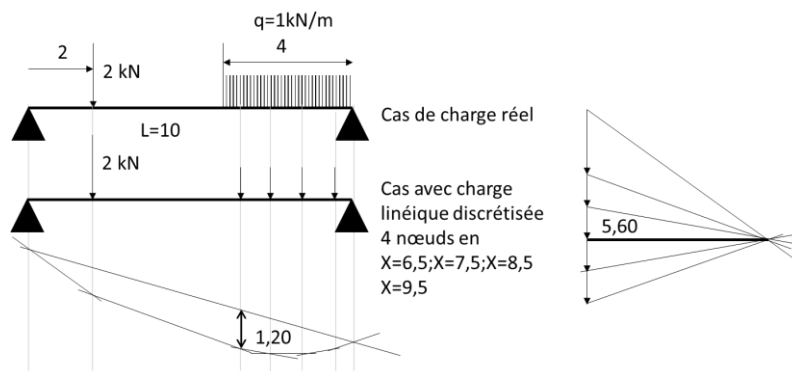
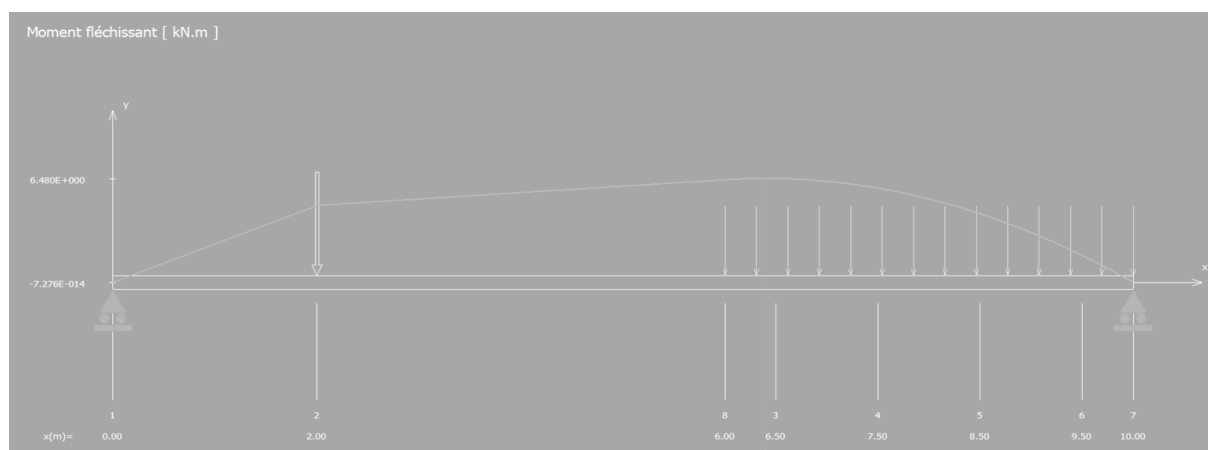
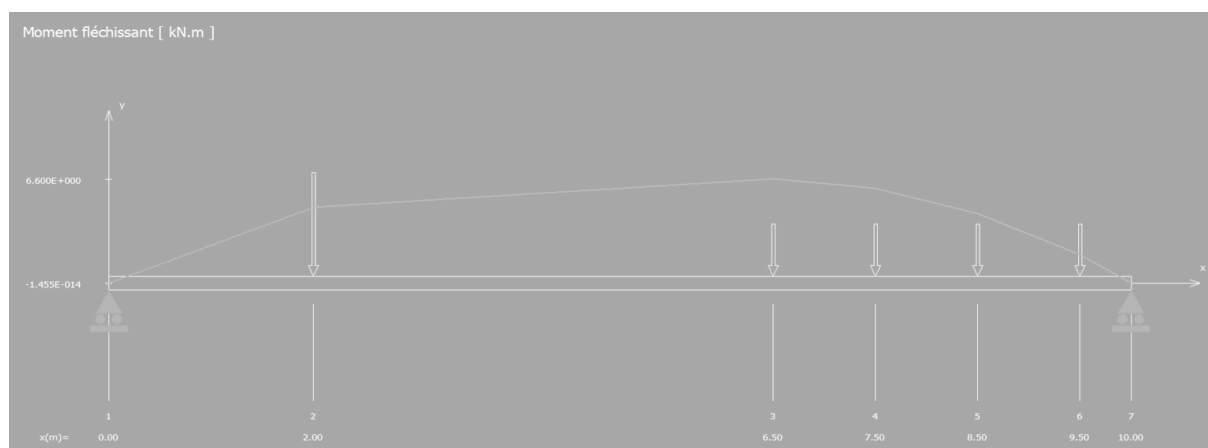


Figure 27. Statique graphique pour une charge répartie. Exemple 2

Par statique graphique, $M_{max} = 5.6 \times 1.2 = 6.72$



(a)



(b)

Figure 28. Exemple 2 sous RDM7 (a) charge répartie (b) charge discrétisée [12]

Modèle	Moment fléchissant max (kNm)
Statique graphique	6.72
RDM7 charge répartie	6.48
RDM7 charges répartie discrétisée	6.60

Figure 29. Exemple 2. Charge répartie synthèse

3.4 Référence [3]

Les moments fléchissants et les efforts tranchants correspondant à des charges données s'obtiennent par le tracé de deux figures : le *polygone des forces* et le *polygone funiculaire*.

Polygone des forces. — Le polygone des forces se construit en portant sur une verticale, dans l'ordre qu'elles occupent, des longueurs proportionnelles aux charges considérées 1, 2, 3, 4... (fig. 9), et en joignant ensuite par des rayons un point quelconque O_1 appelé *pôle* aux extrémités des longueurs représentant les forces. La distance h du pôle O_1 à la verticale des forces s'appelle la *distance polaire*.

Polygone funiculaire. — Le polygone funiculaire se trace à l'aide du polygone des forces, il a ses côtés parallèles aux rayons de ce dernier et ses sommets se trouvent sur les verticales des charges. Deux quelconques de ses côtés consécutifs qui se coupent sur la force n^{me} sont parallèles aux deux rayons qui interceptent sur la verticale dans le polygone des forces la force n^{me} .

Moments fléchissants. — Quel que soit le mode d'appui d'une poutre qui ne repose pas sur plus de deux appuis, les moments fléchissants engendrés par le système des charges

considérées seront représentés par les ordonnées verticales du polygone funiculaire. Mais la position de la ligne à partir de laquelle les ordonnées sont à mesurer, appelée *ligne de fermeture du polygone funiculaire*, dépend du mode d'appui.

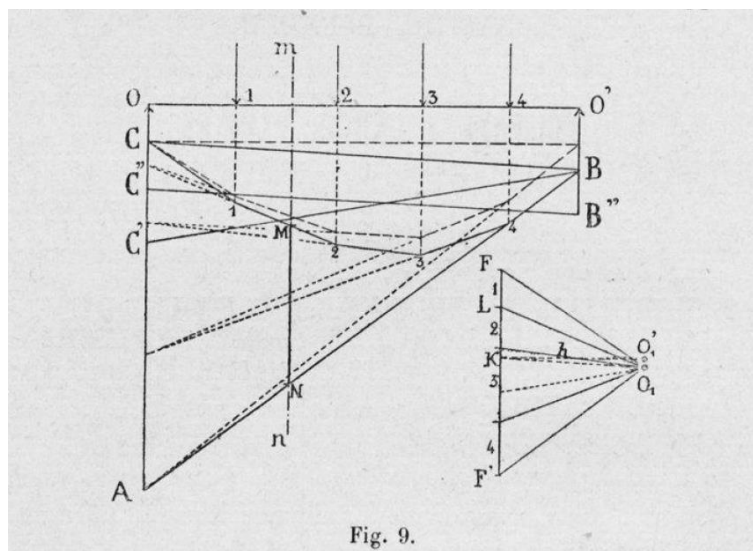


Fig. 9.

Source BNF

Pour une poutre OO' encastrée au point O et libre à l'autre extrémité, les ordonnées sont à mesurer à partir de la ligne AB dernier côté du polygone funiculaire ; et dans une section mn , par exemple, le moment fléchissant dans la poutre sera représenté par la longueur MN .

Dans le cas d'une poutre reposant librement à ses deux extrémités sur deux appuis O et O' , les ordonnées sont à mesurer à partir de la ligne CB obtenue en joignant entre eux les points d'intersection des verticales des appuis avec le polygone funiculaire.

Si la même poutre est encastrée sur l'un des appuis, O par exemple, le point C se déplace d'une quantité CC' égale au moment d'encastrement sur l'appui et la ligne à partir de laquelle on mesure les ordonnées est la ligne $C'B$.

Enfin, s'il y a encastrement sur les deux appuis, le point C se déplace en C'' et le point B en B'' . CC'' et BB'' représentent les moments d'encastrement sur les appuis et les ordonnées se mesurent à partir de la ligne $C''B''$.

§ 1 — CONSTRUCTION DU POLYGONE DES FORCES, ETC.

73

Pour convertir les ordonnées du polygone funiculaire en moments, il suffit de les mesurer à l'échelle des forces et de les multiplier par la distance polaire h .

Réactions sur les appuis. — Les réactions des appuis s'obtiennent en menant (fig. 9) dans le polygone des forces, par le pôle O_1 un rayon O_1K parallèle à la ligne de fermeture CB du polygone funiculaire. Ce rayon divise la somme des charges FF' en deux segments FK et KF' qui représentent les réactions, savoir FK la réaction à gauche, KF' la réaction à droite.

Source BNF

3.4.1 Exemple : poutre encastrée - libre

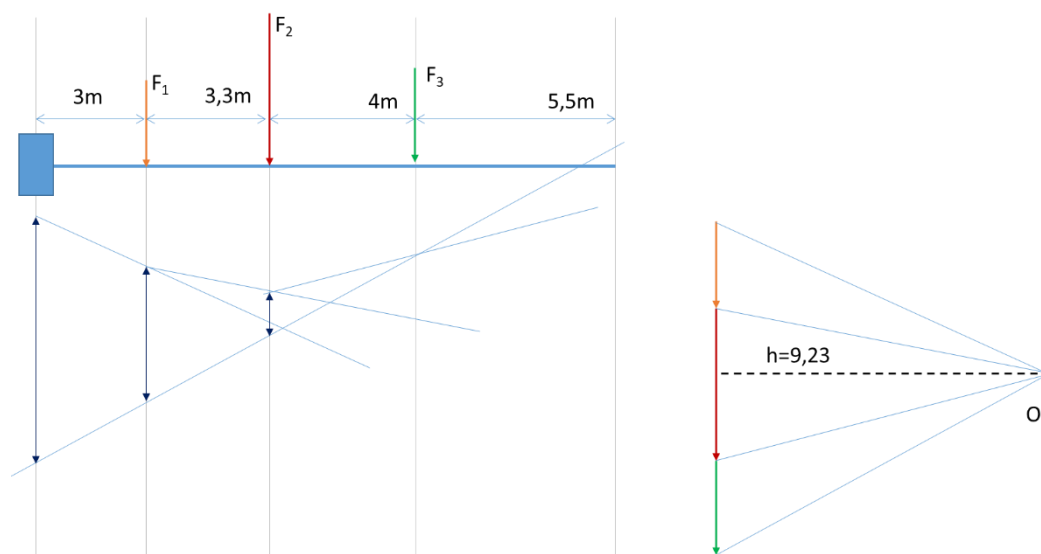


Figure 30. Exemple 2. Encastrée et libre

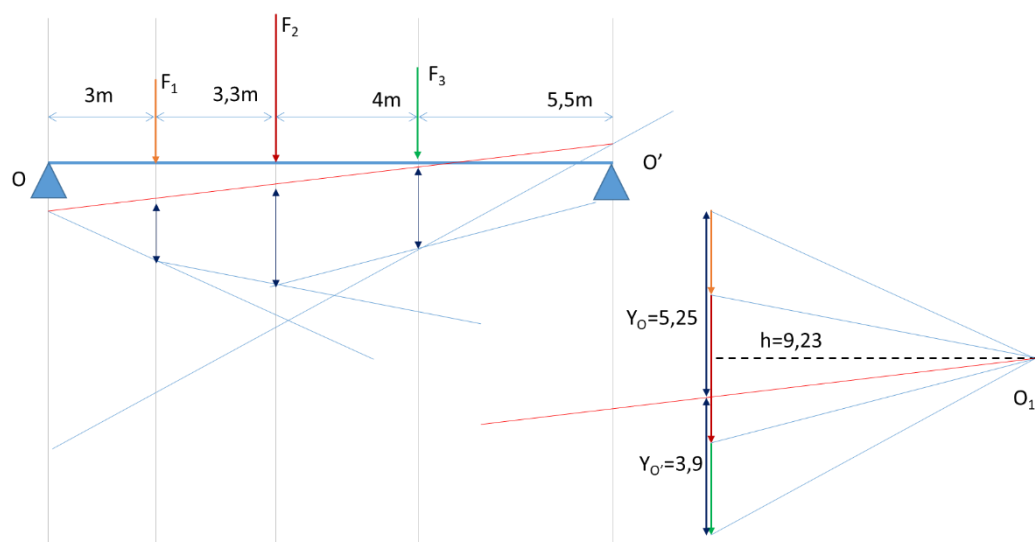


Figure 31. Exemple 2. Deux appuis

encastree et libre - cas 2				2 appuis - cas 2			
		Moment fléchissant				Moment fléchissant	
Abscisse	Ordonnée	Graphique	RDM7	Abscisse x	Ordonnée	Graphique	RDM7
x=0	6,8	62,76	60,44	3	1,7	15,69	16,20
x=3	3,5	32,31	32,84	6,3	2,8	25,84	26,09
x=8	1,2	11,08	10,40	10,3	2,3	21,23	21,29
						Réactions aux appuis	
						Graphique	RDM7
				x=0		5,25	5,40
				x=15,9		3,90	3,80

Figure 32. Exemple 2. Résultats

3.5 Choix au hasard du point O_1

Le cas poutre encastrée / libre a été recalculé avec un autre choix de point O_1 . Les résultats ne varient que par l'incertitude des mesures. La distance polaire n'a pas la même valeur et le polygone funiculaire n'a pas la même allure mais les valeurs de moment fléchissant ne changent pas (Tableau 4).

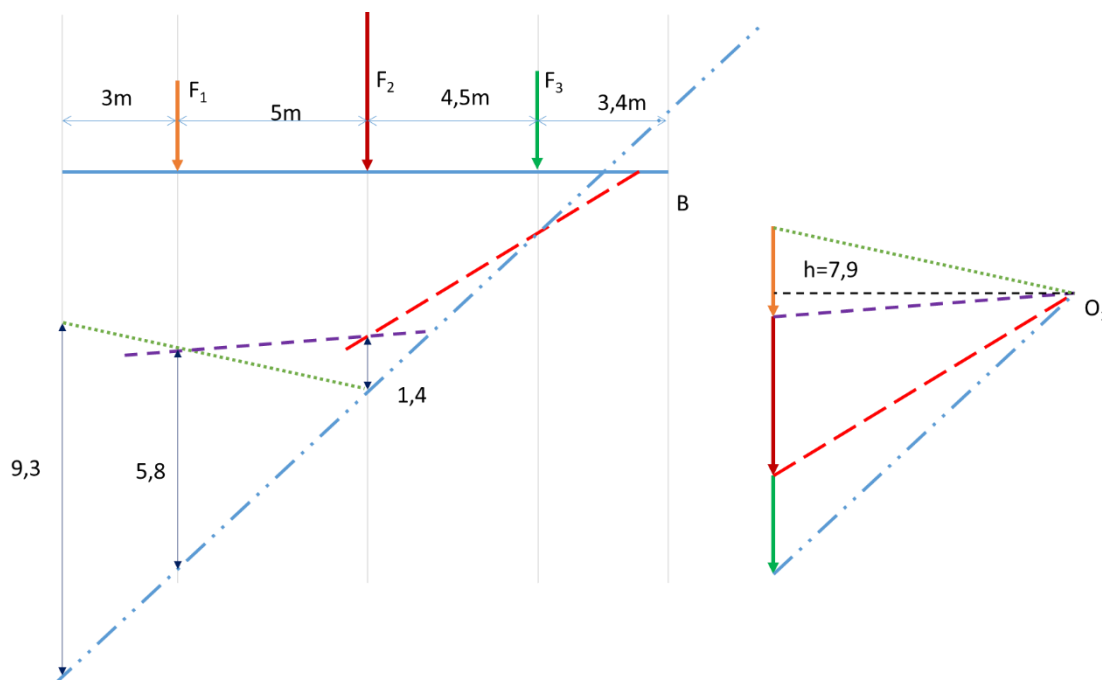


Figure 33. Exemple 1 réalisé avec un autre choix de point O_1

Abscisse	Moment fléchissant			
	Graphique $h=9,23$	Graphique $h=7,9$	Moyenne statique graphique avec les deux mesures	RDM7
$x=0$	72,92	73,47	73,19	73,30
$x=3$	45,23	45,82	45,52	45,70
$x=8$	12,00	11,06	11,53	11,70

Tableau 4. Exemple 1 réalisé avec un autre choix de point O_1

3.6 Plusieurs mesures pour plus de précision

La rapidité de la méthode permet de réaliser plusieurs analyses.

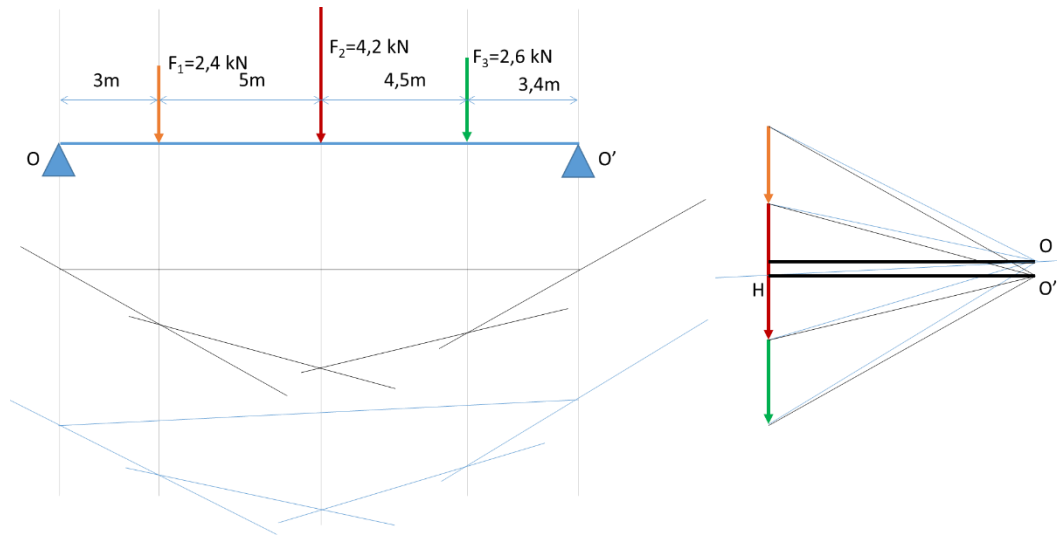
La moyenne des mesures se rapproche du résultat exact (Tableau 4).

3.7 Redresser le polygone funiculaire

Reprenons le cas d'une poutre sur deux appuis (Figure 17). En choisissant un pôle O au hasard sur le polygone des forces, le polygone funiculaire a une ligne de fermeture qui n'est pas nécessairement horizontale.

On peut vouloir redresser le polygone funiculaire pour fournir un polygone ayant l'allure exacte du moment fléchissant. Pour cela il suffit, sur le polygone des forces, de partir du point de rencontre entre la ligne de fermeture du polygone des forces et le tracé des efforts (point H ci-dessous). On reporte alors un segment horizontal de même

longueur que la distance polaire. Le bout de ce segment est un nouveau pôle. A partir de ce pôle, le polygone funiculaire sera redressé, tel que ci-dessous.



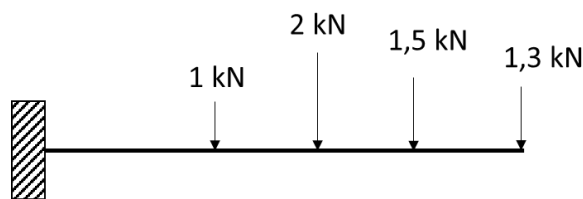
3.8 Exemples

3.8.1 Poutre console avec efforts ponctuels

Dans cet exemple on présente une façon élégante de tracer le diagramme des efforts tranchants et des moments fléchissant dans une poutre par statique graphique.

Dans l'exemple en Figure 30, le choix du pôle du polygone des forces demandait de redresser le polygone funiculaire. On reprend un exemple similaire mais en démarrant le polygone des forces au droit de la poutre, et en choisissant un pôle aligné avec la poutre.

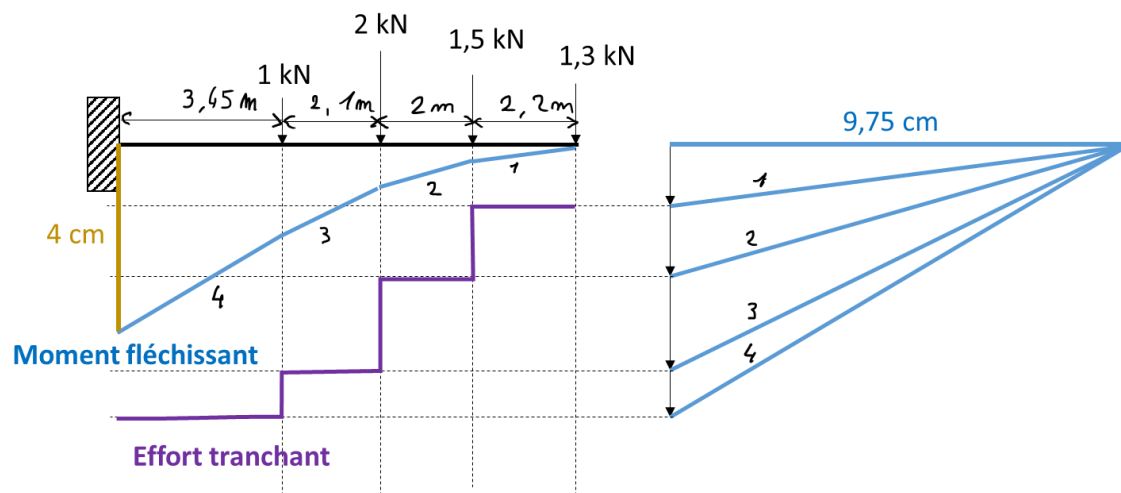
Soit une poutre encastree à gauche, libre à droite soumise à 4 charges ponctuelles. Le calcul analytique de l'effort tranchant et du moment fléchissant ne pose pas de soucis particuliers mais peut s'avérer fastidieux et donc sujet à erreurs. Par méthode graphique on peut rapidement vérifier le résultat donné par calcul.



Echelles

Longueurs (plan de situation) : 1 cm plan = 1 m réel

Efforts (plan des forces) : 1 cm plan = 1 kN réel



Le moment maximal déterminé par statique graphique a pour valeur :

$$4cm * 9.75cm * \frac{1m}{cm} * \frac{1kN}{cm} = 39 kNm$$

Par calcul analytique on obtient un moment fléchissant maximal de 38.6 kNm.

4 Systèmes articulés

Un système articulé est une structure constituée d'éléments appelés barres et articulés entre eux.

La statique graphique est très adaptée au cas des systèmes articulés car l'équilibre global de la structure donne des forces connues, et les directions des efforts dans les barres sont connues (barres ne fonctionnant qu'en traction compression donc les efforts aux extrémités sont parallèles à l'axe de la barre).

Exemple

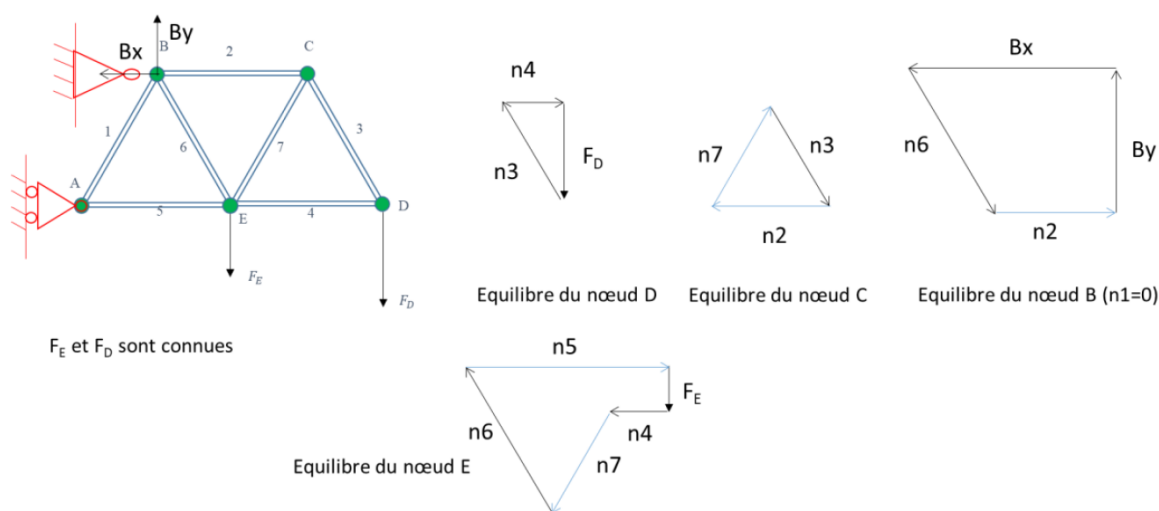


Figure 34. Application de la statique graphique à un système articulé

4.1 Méthode de Cremona (épure de Cremona)

On peut également rassembler sur une même figure tous les triangles de forces obtenus. Le mode opératoire est alors le suivant : on numérote les nœuds, on définit les régions délimitées par les barres et les forces, on tourne autour d'un nœud dans le sens trigonométrique, les forces dans les barres sont désignées pour l'origine par la lettre de la région de départ et pour l'extrémité par la lettre de la région d'arrivée.

La méthode de Cremona peut faire gagner du temps lorsque la structure comporte beaucoup de nœuds, par-rapport à l'écriture d'un triangle de forces par nœud. Mais elle demande une certaine expérience.

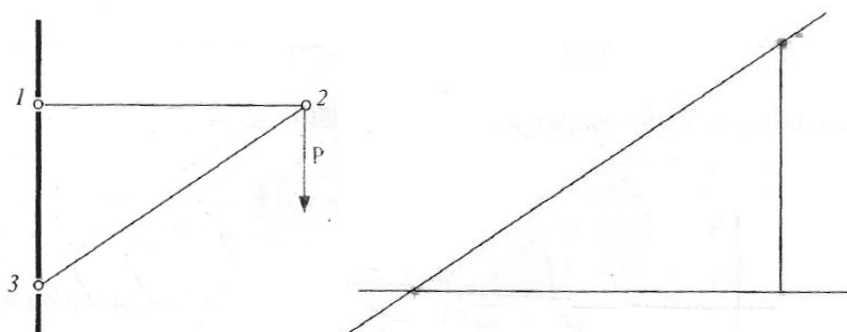
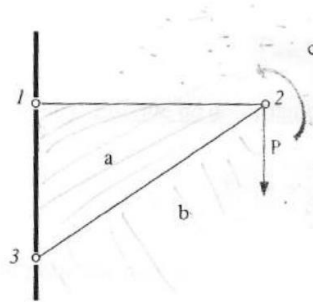


Figure 35. Exemple d'analyse du nœud 2 par la méthode de Crémone [13]

1° Epure de CREMONA – méthode graphique.

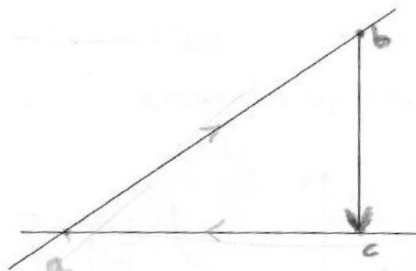
La méthode est basée sur le fait que le dynamique des forces agissant sur un nœud est fermé, et on ne peut avoir que deux inconnues par nœud.

La méthode opératoire est la suivante.



- 1) On numérote les nœuds
- 2) On définit les régions délimitées par les barres et les forces.
- 3) On tourne autour d'un nœud dans le sens trigonométrique, les forces dans les barres sont désignées pour l'origine par la lettre de la région de départ et pour l'extrémité par la lettre de la région d'arrivée.

Si on fait l'équilibre du nœud 2



La force \vec{P} est représentée par bc
 La barre 1-2 est représentée par ca qui s'éloigne du nœud, donc la barre est tendue.
 La barre 2-3 est représentée par ab qui va vers le nœud, donc la barre est comprimée.

[13]

101. Méthode de Cremona. — Etant donné un nœud, point d'application d'une force extérieure connue P , auquel aboutissent un certain nombre de barres, les deux équations particulières d'équilibre de ce nœud permettent de déterminer algébriquement les grandeurs de deux des forces intérieures F , si l'on connaît toutes les autres. La solution géométrique du problème est le polygone des *forces* ou de *Varignon*.

Toutes les fois qu'en suivant un ordre convenable, on peut résoudre *successivement* les équations d'équilibre des nœuds, en partant d'un nœud d'extrémité, il est donc possible de remplacer le calcul algébrique par la construction géométrique précitée, en l'appliquant *successivement* à tous les nœuds.

La méthode de *Cremona* consiste à superposer les polygones sur l'épure, en les traçant de telle sorte qu'un même segment de droite, indiquant la grandeur, la direction et le sens d'une force intérieure, appartienne à la fois aux deux polygones relatifs aux nœuds opposés de la barre correspondante.

La besogne matérielle du dessinateur est de ce chef notablement simplifiée et abrégée. En même temps ses opérations sont vérifiées, en fin de compte, par la nécessité où il se trouve d'aboutir, après une série de constructions qui se commandent les unes les autres, à un dernier polygone fermé, ne comportant que des côtés tous déjà tracés sur l'épure, à l'exception de la charge P appliquée au dernier nœud, qui est également connue.

[6]

4.2 Cas d'un nœud reliant deux barres

On donne ici une méthode de résolution graphique simple dans le cas de nœuds reliant deux barres

90. Exposé de la méthode graphique. — Considérons d'abord le cas très simple de deux barres AB , AC (*fig. 103*: cette figure représente trois positions différentes

des barres, auxquelles s'appliquent les mêmes lettres), articulées en A, fixées à leurs autres extrémités B, C, et soumises à une force P s'exerçant au point A. Ce point devant être en équilibre sous l'action de cette force et des réactions des deux barres, qui sont dirigées suivant les lignes AB, AC,

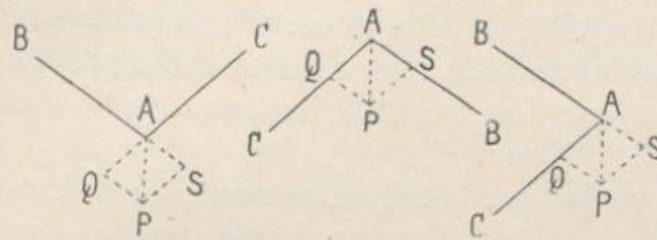


FIG. 103.

il suffira, pour connaître ces réactions, de mener par l'extrémité P de la ligne AP, représentant la force P, les deux lignes PQ, PS, respec-

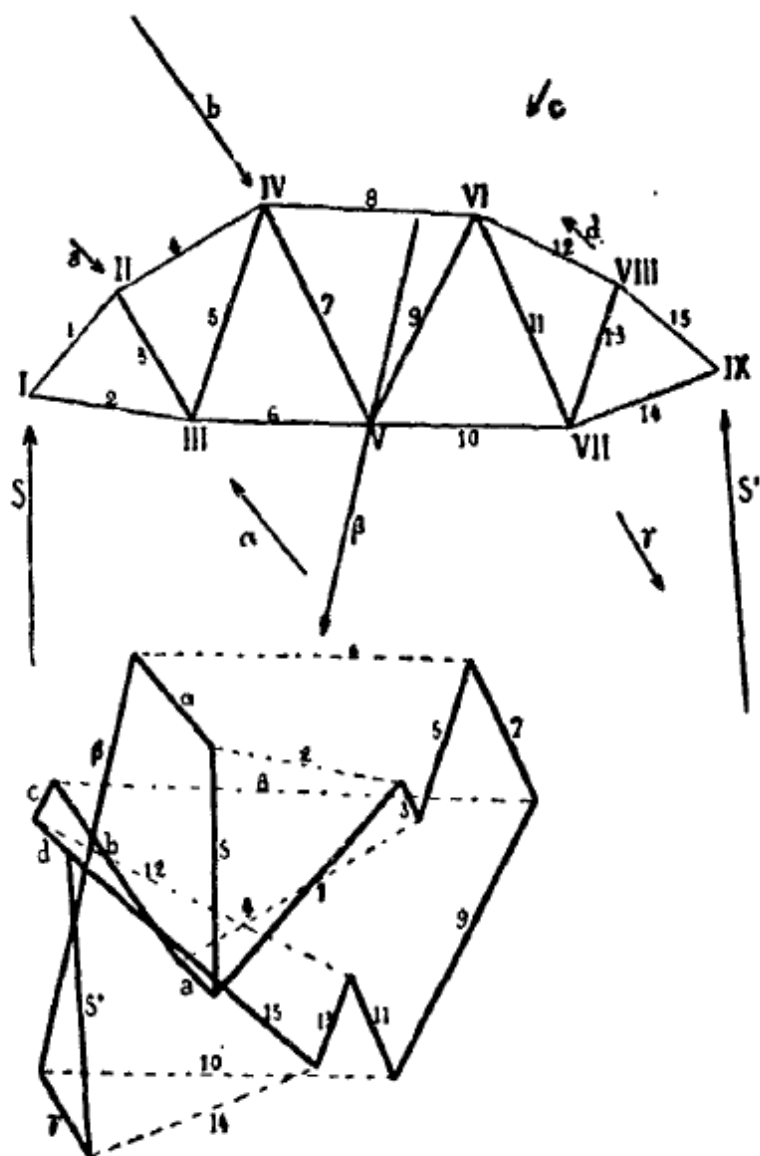
tivement parallèles à AB et à AC pour avoir, en AS et en AQ, les lignes représentant, en grandeur et en sens, les composantes de la force P suivant ces deux directions, lesquelles seront égales et directement opposées aux réactions exercées sur le même point par les barres qui y sont articulées.

On verra ainsi que la barre AB supportera un effort représenté par la longueur AS, et la barre AC un effort mesuré par AQ. Et il sera facile de reconnaître, d'après la disposition de la figure, si les efforts dont il s'agit sont des extensions ou des compressions.

Figure 36. Référence [14]. Source BNF

4.3 Exemples

4.3.1 Exemple



[6]

5 Cinématique graphique

On peut étendre l'utilisation des méthodes graphiques au cas de la cinématique.

Equiprojectivité

Soient deux points A et B d'un solide considéré indéformable et \vec{V}_A et \vec{V}_B leurs vecteurs vitesse. La projection orthogonale de \vec{V}_A sur AB est égale à la projection orthogonale de \vec{V}_B sur AB :

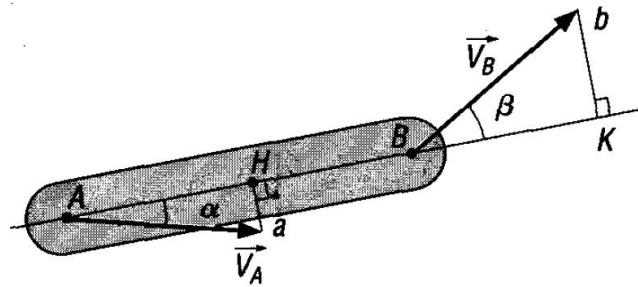


Figure 37. Equiprojectivité des vecteurs vitesse en cinématique graphique [10]

Centre Instantané de Rotation (CIR)

- Définition

Pour tout solide en mouvement plan, à l'instant t, il existe un point I unique ayant une vitesse nulle. On parle de centre instantané de rotation CIR.

- Détermination

Le CIR est situé à l'intersection des perpendiculaires aux vecteurs-vitesses du solide.

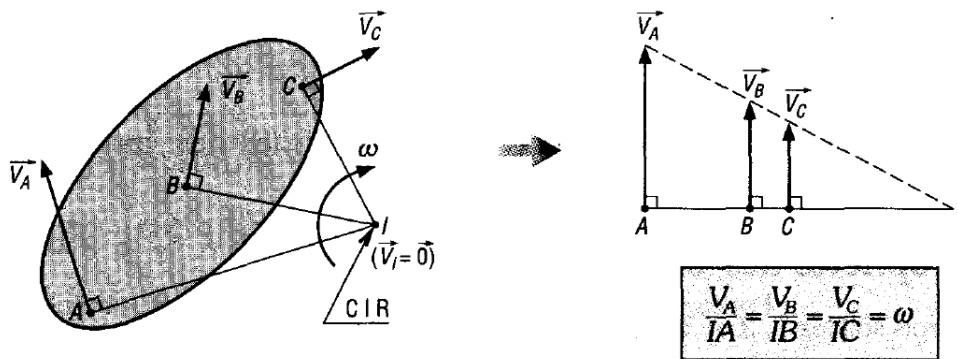


Figure 38. Centre instantané de rotation [10]

6 Exemples divers

6.1 La statue de la liberté éclairant le monde [15]

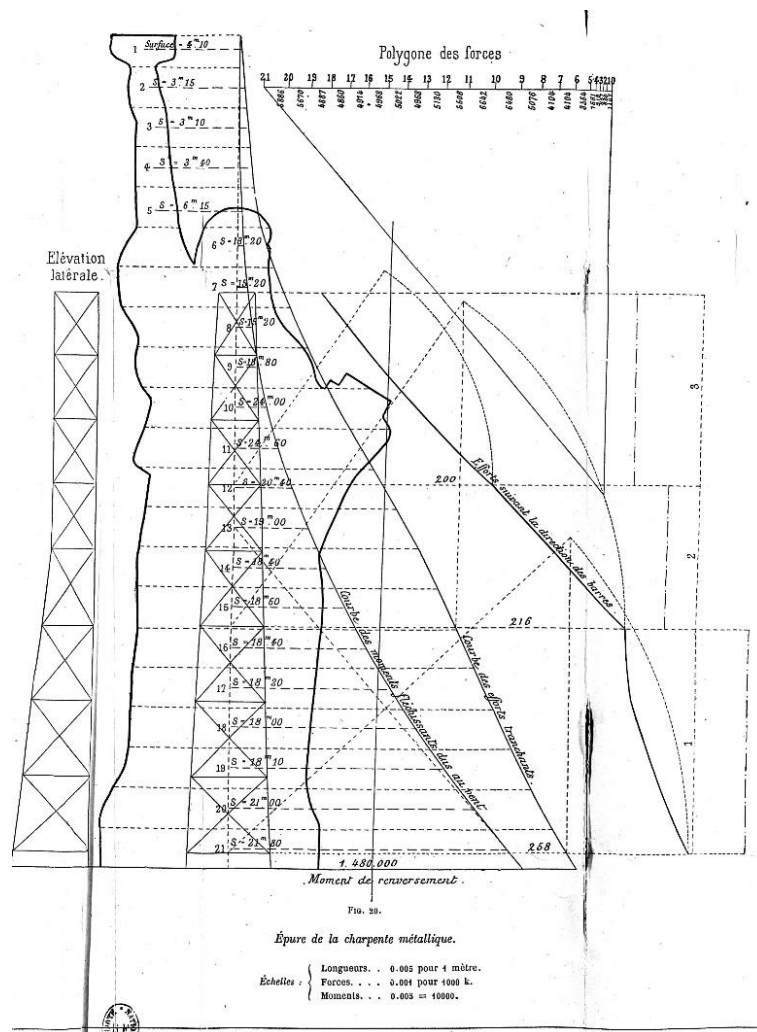
C'est à Mr Bartholdi, auteur du *Lion de Belfort*, que l'on doit la conception de la statue mais c'est à Mr Eiffel qu'a été affectée « la tâche difficile de calculer le squelette en fer de cette œuvre gigantesque. »

Les efforts agissant sur la statue et considérés pour le calcul sont son poids propre et le vent.

Le vent est une charge répartie sur toute la statue. Il semble qu'Eiffel ait discrétisé cette charge en 21 segments.

Le polygone des forces obtenu est tourné dans un sens différent des polygones obtenus sur des poutres puisqu'il considère les efforts horizontaux dus au vent et non des efforts verticaux. En tournant l'image, on retrouve le polygone des forces tel que présenté pour des poutres.

Sur le polygone des forces il manque probablement beaucoup de traits allant du bout des vecteurs forces au centre polaire et permettant de passer du polygone des forces à la courbe des moments fléchissants (polygone funiculaire). Eiffel ne nous donnera pas tous les détails de son calcul !



(1) Les calculs qui suivent sont un remarquable exemple des grandes ressources que présentent pour les Ingénieurs et les Constructeurs les nouvelles méthodes de « statique graphique » aujourd'hui entrées dans la pratique.

L'effort du vent se détermine par la considération des *moments de flexion* obtenus en multipliant les efforts par leur distance au point que l'on considère et en faisant la somme de ces produits. Assez longues lorsqu'on les fait analytiquement, ces opérations sont très rapides lorsque l'on a recours à la méthode graphique. C'est ce qui a été fait dans le cas présent.

A cet effet, on a déterminé sur une épure (fig. 20, planche 1) la projection de la statue à l'échelle de $0^m01\left(\frac{1}{100}\right)$, et on a divisé la surface ainsi obtenue en 21 éléments dont les surfaces ont été mesurées exactement. En multipliant la valeur de ces surfaces par 270

(coefficient de pression du vent), on obtient la valeur des efforts agissant sur chacun de ces éléments. Le tableau suivant résume ces calculs :

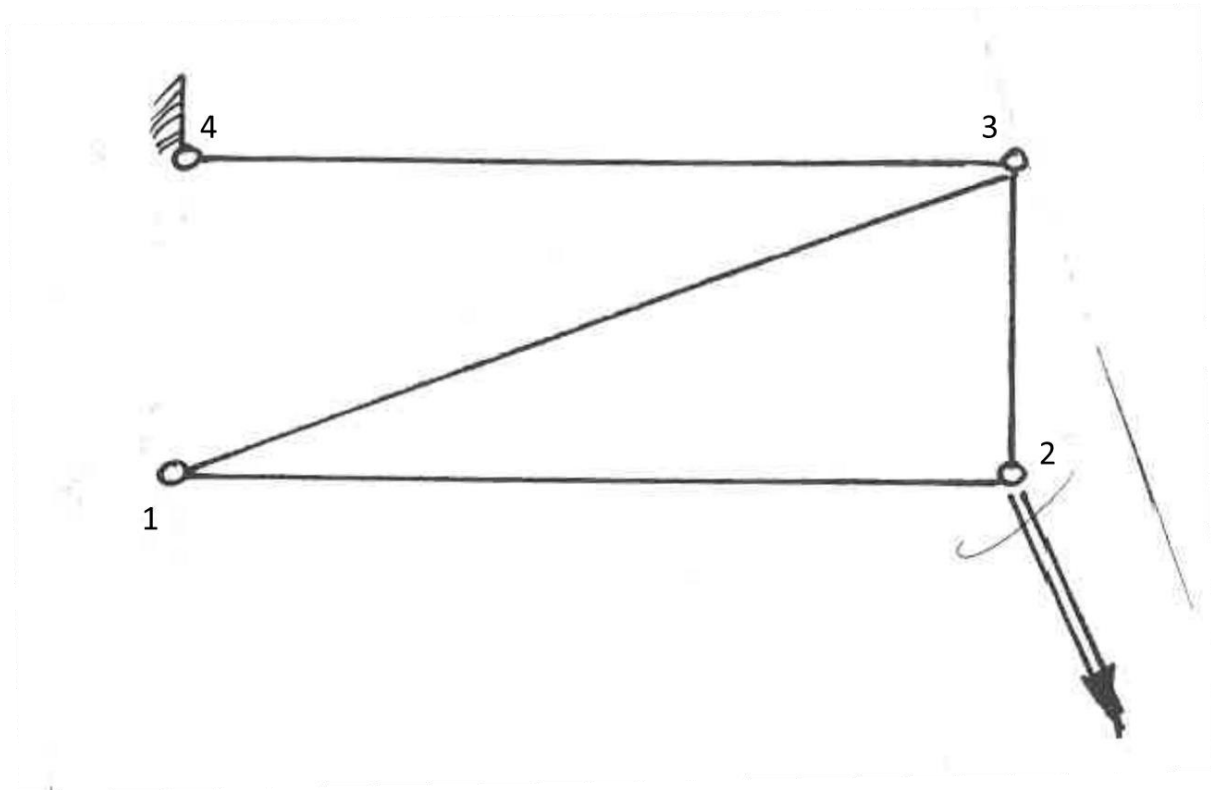
N° des éléments	Surface (mètres carrés)	Effort du vent (kilogr.)
1.	4,10	1 107
2.	3,15	850
3.	3,10	837
4.	3,40	918
5.	6,15	1 661
6.	13,20	3 564
7.	15,20	4 104
8.	15,20	4 104
9.	18,80	5 076
10.	24,00	6 480
11.	24,60	6 642
12.	20,40	5 508
13.	19,00	5 130
14.	18,40	4 968
15.	18,60	5 022
16.	18,40	4 968
17.	18,20	4 914
18.	18,00	4 860
19.	18,10	4 887
20.	21,00	5 670
21.	21,80	5 886
TOTAUX.	322,80	87 156

Ce tableau permet de construire immédiatement : 1° le polygone des forces; 2° la courbe des moments fléchissants.

Source BNF

7 Exercices

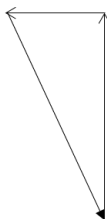
8 Exercice 1. Treillis



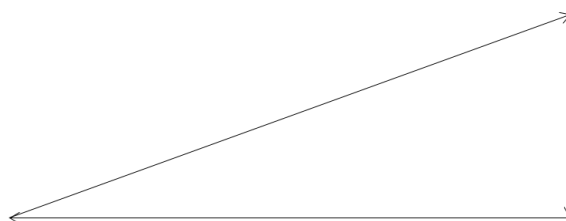
Données : longueur 1-2 = 7,7m ; Longueur 2-3 = 3m ; Force $F=10$ kN appliquée au nœud 2

Correction

Equilibre nœud 2



Equilibre nœud 3



Barre 23 : 9,1 kN Traction

Barre 21 : 4,4 kN Traction

Barre 34 : 24,7 kN Traction

Barre 31 : -26,1 kN Compression

9 Formulaire mathématiques

9.1 Géométrie

9.1.1 Triangles semblables

1. Construction. — Soit un triangle ABC . Le segment $A'B'$ étant quelconque, menons, d'un même côté de $A'B'$, les demi-droites $A'x$ et $B'y$ telles que :

$$\widehat{B'A'x} = \widehat{A} \text{ et } \widehat{A'B'y} = \widehat{B}.$$

Ces demi-droites se coupent en C' (fig. 1). Les deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont donc, par construction, deux angles égaux chacun à chacun (les troisièmes angles sont par suite égaux) : on dit qu'ils sont *semblables*.

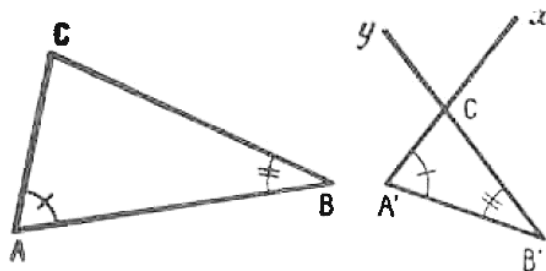


Fig. 1. — Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.

4. Théorème. — Si deux triangles sont semblables, leurs côtés homologues sont proportionnels.

$$H. \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{D} \\ \widehat{B} = \widehat{E} \end{cases}$$

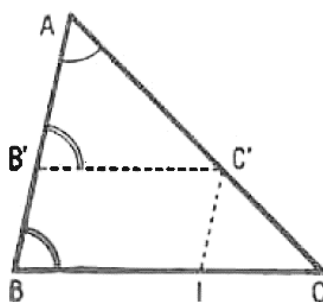


Fig. 6.

$$C. \left\{ \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \right.$$

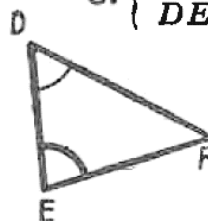


Figure 39. [16]

10 Références

[2]–[4], [6], [9], [14], [15] : source BNF

- [1] Larralde, *Mécanique Statique. II-Méthode Graphique. Collection des industries mécaniques*. MASSON, 1981.
- [2] K. Culmann, *Traité de statique graphique* ». Traduit de la 2ème édition allemande. 1880.
- [3] M. Koechlin, *Applications de la statique graphique*, 2^e éd. 1898.
- [4] Buchetti, *Manuel des constructions métalliques et mécaniques*. 1888.
- [5] Levy, *La statique graphique et ses applications aux constructions*. 1874.
- [6] J. Résal, *Stabilité des constructions : cours de l'Ecole des ponts et chaussées*. 1901.
- [7] F. Stussi, *Statique Appliquée et Résistance des Matériaux*, vol. 1. DUNOD, 1949.
- [8] Chillon, *Résistance des matériaux Tome 1*. DUNOD, 1961.
- [9] J. Résal, *Résistance des matériaux : cours de l'École des ponts et chaussées*. 1898.
- [10] J.-L. Fanchon, *Guide de Mécanique*. Nathan, 1998.
- [11] Bremont et Reocreux, *Mécanique 3*. Ellipses, 1998.
- [12] Y. Debard, « Logiciel RDM7 version 7.04 ». IUT Le Mans.
- [13] J. Texereau, « Calcul des structures. Cours ISAE-ENSMA ». 2003.
- [14] Flamant, *Résistance des matériaux : stabilité des constructions*. 1909.
- [15] Talansier, « La statue de la liberté éclairant le monde », *Le Génie Civil*, 1883.
- [16] R. Cluzel et J.-P. Robert, *La géométrie et ses applications*. Librairie Delagrave, 1952.