

TORSION

(autour de $G \vec{x}$)

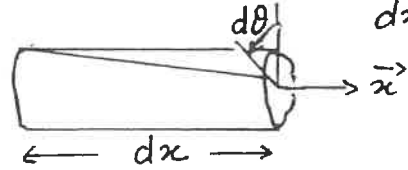


* ACTION : Moment de torsion M_t

* DÉFORMATION GÉNÉRALISÉE : angle de rotation unitaire $\alpha = \frac{d\theta}{dx}$

* CONTRAINTES DE CISAILLEMENT

$$\tau_{xy} \text{ et } \tau_{xz}$$



* DÉFORMATIONS : $\epsilon_{xy} = \frac{\alpha}{2} \Theta_{,y}$ et $\epsilon_{xz} = -\frac{\alpha}{2} \Theta_{,x}$ avec $\begin{cases} \Delta \Theta = -2 \text{ dans } \Omega \\ \frac{d\Theta}{ds} = 0 \text{ sur } \Gamma(\text{contour}). \end{cases}$

* LOI DE COMPORTEMENT : $\tau_{xy} = 2G \epsilon_{xy}$ et $\tau_{xz} = 2G \epsilon_{xz}$

* ÉQUILIBRE DE LA SECTION

$$M_t = \int_{\Sigma} (y \tau_{xz} - z \tau_{xy}) ds$$



Constante de torsion : (Σ) simplement connexe $J = 2 \int_{\Sigma} \Theta ds$
 (Σ) multiplement connexe : g. cours.

* ACTION = MATERIAU x GEOMETRIE x DEFORMATION GÉNÉRALISÉE

Loi de comportement R.D.T.

$$M_t = G J \alpha$$

* ENERGIE DE DEFORMATION : $W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_t^2}{G J} dx$

CAS PARTICULIER

POUTRE CYLINDRIQUE DE RÉVOLUTION

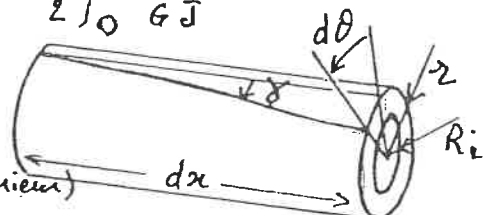
• $\Theta = [R_e^2 - (y^2 + z^2)]/2$ (R_e = Rayon extérieur)

• $\epsilon_{xy} = -\frac{\alpha}{2} z$ et $\epsilon_{xz} = \frac{\alpha}{2} y$

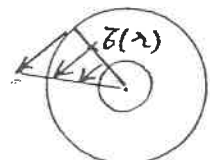
• $\tau_{xy} = -G \alpha z$ et $\tau_{xz} = G \alpha y$

• Moment quadratique polaire $I_0 = \int_{\Sigma} r^2 ds$

• Relation $M_t = G I_0 \alpha$

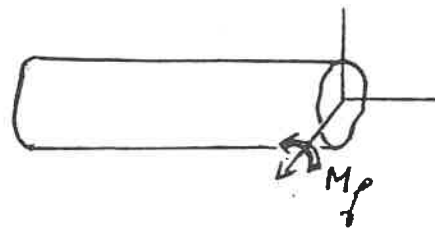


• $\gamma dx = r d\theta$
 • $\gamma = [\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2]^{1/2} \rightarrow \begin{cases} \gamma = r \frac{d\theta}{dx} = r \alpha \\ \gamma = G \alpha r \end{cases}$



FLEXION.

(autour de $G\vec{z}$, axe principal de Σ).

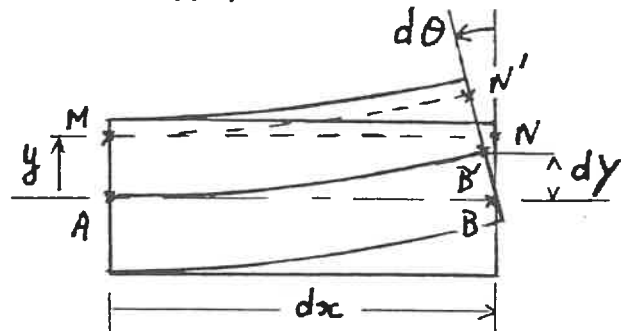


* ACTION : Moment fléchissant M_f

* DEFORMATION GÉNÉRALISÉE : Courbure : $\frac{1}{R(x)} \approx y''(x)$ ($y =$ flèche)

* CONTRAINTE NORMALE : σ_{xx}

* DEFORMATION : $\epsilon_{xx}(x,y) = -\frac{y}{R(x)}$



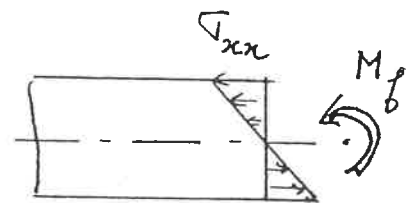
En effet : $dx = MN = AB$ et $Rd\theta = \widehat{AB'} = AB$
 $(R-y)d\theta = \widehat{MN'}$

$$\text{d'où } \epsilon_{xx}(x,y) = \frac{MN' - MN}{MN} = -\frac{y}{R(x)}$$

* LOI DE COMPORTEMENT : $\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$

* ÉQUILIBRE DE LA SECTION : $M_f = \int_{\Sigma} y \sigma_{xx} dS$

. Répartition linéaire : $\sigma_{xx} = -\frac{M_f y}{I_z}$



. Moment quadratique $I_z = \int_{\Sigma} y^2 dS$

* ACTION = MATÉRIAU $\times$ GÉOMÉTRIE $\times$ DÉFORMATION GÉNÉRALISÉE

Loi de comportement R.D.M. :

$$M_f = EI_z y''$$

* ÉNERGIE DE DÉFORMATION : $W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_f^2}{EI_z} dx$

CISAILLEMENT.

(dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$)



2

* ACTION

: Effort tranchant T

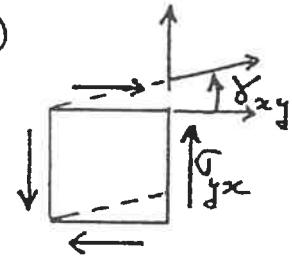
* DÉFORMATION GÉNÉRALISÉE

: glissement : $\gamma = \gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - (\vec{x}', \vec{y}')$
(diminution de l'angle droit).

* CONTRAINTE DE CISAILLEMENT: $\tau_{xy} = \tau_{yx} (= \tau)$

* DÉFORMATION

: $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$

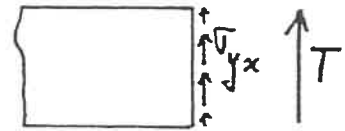


* LOI DE COMPORTEMENT

: $\tau_{xy} = 2 G \epsilon_{xy}$ ($G = \mu$; $\tau = G \gamma$)

* ÉQUILIBRE DE LA SECTION

: $T = \int_{\Sigma} \tau_{xy} dS$



. Répartition uniforme : $\tau_{moy} = \frac{T}{S}$: $S = \text{aire de } \Sigma$.
(approximation)

: $\tau = \frac{T}{S(1+\eta)}$: $S(1+\eta) = \text{section réduite}$

. facteur correctif : section rectangulaire $\eta = -\frac{1}{6}$
section circulaire $\eta = -\frac{1}{10}$

* ACTION = MATÉRIAU x GÉOMÉTRIE x DÉFORMATION GÉNÉRALISÉE.

Loi de comportement R.D.M. :

$$T = G [S(1+\eta)] \gamma$$

* ÉNERGIE DE DÉFORMATION : $W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{T^2}{G(1+\eta)S} dx$

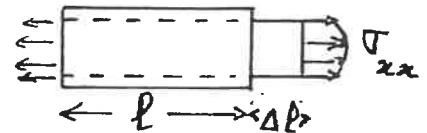
TRACTION - COMPRESSION.
(d'axe $\vec{x}$).



* ACTION : Effort normal N

* DÉFORMATION GÉNÉRALISÉE : Allongement unitaire $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$

* CONTRAINTE NORMALE : σ_{xx}

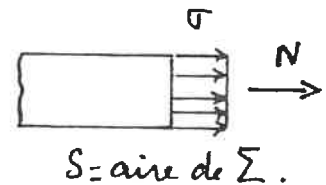


* DÉFORMATION : $\epsilon_{xx} = \epsilon = \frac{\Delta l}{l}$

* LOI DE COMPORTEMENT : $\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$ (Poisson: $\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\nu \epsilon_{xx}$)

* ÉQUILIBRE DE LA SECTION : $N = \int_{\Sigma} \sigma_{xx} dS$

Répartition uniforme: $\sigma = \sigma_{xx} = \frac{N}{S}$



* ACTION = MATÉRIAU $\times$ GÉOMÉTRIE $\times$ DÉFORMATION GÉNÉRALISÉE

Loi de comportement R.D.M.:

$$N = E S \epsilon$$

* ENERGIE DE DÉFORMATION: $W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{E S} dx$